丘成桐　孙理察　著

微分几何讲义

Lectures on Differential Geometry



高等教育出版社
Higher Education Press

图书在版编目(CIP)数据

微分几何讲义/丘成桐,孙理察著.—北京:高等教育出版社,2004.12(2006重印)

ISBN 7-04-016142-7

Ⅰ.微… Ⅱ.①丘…②孙… Ⅲ.微分几何-高等学校-教材 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第124831号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 郭 伟 **封面设计** 王凌波

版式设计 郑轩辕 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2004年12月第1版
印 张	30.75	**印 次**	2006年2月第2次印刷
字 数	490 000	**定 价**	56.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 16142-00

序

本书主要部分源于钟家庆兄的笔记，当时我和孙理察每周两讲，由于孩子都还在襁褓中，准备工作有一定的困难，但是作者二人兴致勃勃，在准备这些讲座时还发展了一些新的定理。以后到了圣地亚哥，我有十五个博士生在课上听讲，很遗憾的是没有学生留有完整的讲稿。以后张恭庆和丁伟岳重整这部分讲稿时，已不能将当时作者二人的讲辞全部还原，这是很可惜的。事隔二十年，作者二人已无从追忆当年创作的细节。

所幸国内学者包括当时做笔记的几位学者和我们的学生，确也在这本书上得到一些好处，宛然成一流派，称为几何分析。遗憾的是书中有一部分精要的地方未受到重视，尤其是李伟光和我发展的在抛物方程的不等式，在国外由美国的 Hamilton、苏联的 Perelman 得出几何学上的深入发展，解决了一些重要的问题。毕竟几何分析的一个主要目标是了解几何结构，不特分析而已矣。盼望本书读者能够了解这一点。

讲稿在中国先行出版，到九十年代才出版英文版 *，并加上几篇我的个人著作，以补不足。这次中文新版增加了三篇我近年的文章和演讲辞：《几何学的未来发展》、《几何与分析回顾》、《复几何的历史及前景》，另对原中文版第一、二、三、六章作了较大的改动，使本书渐臻完善。

作者原意再写极小子流形和 Monge-Ampère 方程在几何上的应用，时光荏苒，作者二人自从加州分开后，竟无机会再聚在一起续写前书，调和映射一书已有英文版，希望中文版在不久即可面世。

当年帮忙整理此书的钟家庆教授早已仙逝，最为可惜，其余诸子则在中国学坛上担当重任，月旦人物，然而学如流水，未足自负，书中多处尚需发展。希望以后能够有一个安静而有学术气氛的地方，了却未完成的心愿。本书新版，再加上我在交通大学的一篇《几何学的未来发展》的演讲辞，或可从宏观的角度来看几何的发展。

---

*中文版《微分几何》，科学出版社，1988；英文版 *Lectures on Differential Geometry*, International Press, 1994.

本书承蒙浙江大学沈一兵、王斯雷二位参考英文版认真翻译、校订；台湾交通大学林松山整理《几何学的未来发展》；浙江大学徐浩翻译《几何与分析回顾》、《复几何的历史及前景》二文. 在此一并表示感谢.

丘成桐

二零零四年十一月一日

原　序

我们知道, 在数学的各个分支中, 几何学自古以来一直被数学家们所重视. 其原因在于: 几何学研究的是自然现象的某种表现形式, 而自然现象具有很真实的感觉, 所以它们一直是数学家灵感的重要源泉. 因此, 几何学和数学的其他分支有着极为密切的关系; 当然也由于自然科学的发展而得到推动 . 20 世纪 30 年代 Einstein 提出的广义相对论, 近 20 年来 Yang-Mills 提出的规范场论等等, 都是几何学和物理结合的最好例子.

几何学的主要部分是微分几何学. 近代微分几何学研究流形上的解析结构和这种结构所蕴含的几何现象. 这些可以说是由 Gauss 和 Riemann 等人所奠基的. 自从 Riemann 提出 Riemann 几何以后, 局部几何学就有了飞速的发展, 产生了张量分析. 同时, Klein 发表了著名的爱尔朗根纲领, 由群论角度研究空间变换群的不变量, 从而引进了各种不同的几何学. 另外, 复变函数的单值化理论促进了 Riemann 曲面的研究. 这种种理论以及经典的曲面理论, 构成了 20 世纪微分几何发展的基础.

在 20 世纪, 微分几何的发展极其迅速, 大致可分为四个不同方面.

第一方面, Cartan 和 Weyl 作了 Lie 群和 Riemann 对称空间的分类, Cartan 将联络的概念推广, 将 Klein 的理论和 Riemann 几何融合, 又引进了外微分, 发展了 Cartan-Kähler 理论, 因此, 使局部微分几何大大地推进了一步;

第二方面, 由于拓扑学和代数几何的蓬勃发展, de Rham, Hodge, Kodaira, Hopf, Lefschetz, Whitney, Weil, 陈省身 (S. S. Chern) 等人将它们和微分几何建立起密切的关系, 从而发展了整体微分几何;

第三方面, 由于古典几何学的影响, 凸曲面几何学、综合几何学、积分几何学在 Alexandroff, Cohn-Vossen, Pogorelov, Busemann, Rauch, Santalo 等人的领导下, 有了很大的进展;

第四方面, 由于微分方程理论的逐渐成熟, 几何学家开始应用分析方法来解决几何问题, 反过来, 微分几何理论又提供了大量有意义的微分方程, 而研究这些方程, 往往要提出新的观点和方法, 所以分析学家也密切注意着几何学的发展, 在这方面的领导人有 Hadamard, Morse Lewy, Morrey, Bochner, Nash,

Moser, Nirenberg, Efimov. 他们的工作，奠定了近 20 年来非线性偏微分方程在几何中的应用的基础.

本书将介绍上述的主要工作, 读者可以发现, 微分几何是一个整体的学问, 上述四个方面实际上是很自然地融合在一起的，因此，第一册的目的在于研究 Riemann 流形上整体微分方程理论，并且导出曲率与拓扑之间的关系. 在第一册中，我们只讨论一个方程的情形. 在陆续出版的第二册和第三册中，我们会涉及方程组的问题, 例如, 我们将要涉及 Hodge 理论、极小子流形、调和映射、规范场、 Kähler 流形、 Monge-Amperé 方程，其中将讨论几何与拓扑、代数几何、广义相对论和高能物理之间的关系.

第一册包含六章内容, 前四章讨论 Laplace 算子, 它是微分几何中最重要的算子. 这是由于很多重要的非线性算子在线性化后，往往是某个 Riemann 度量的 Laplace 算子. 在具体讨论中，我们往往要用线性算子去逼近非线性算子, 所以我们希望给出尽量不依赖于 Riemann 度量的各种估计，我们考虑的空间, 可能是有界函数空间，也可能是平方可积函数空间. 我们知道，在经典调和分析中，主要是考虑 $\mathbb{R}^n$ 及其中的有界域上的调和函数，它们的推广应该是完备 Riemann 流形，其中有非负 Ricci 张量的流形对应于 Euclid 空间、有负曲率的流形对应于有界域. 原则上来说，经典调和分析中的主要定理在流形上都应该有相应的推广. 本书前两章，就是讨论其中比较重要的推广. 值得注意的是, 我们往往要提出新的方法来进行这种推广. 同时，我们发现，很多几何问题又都可以用这种分析方法来解决. 当 Laplace 算子作用在平方可积函数空间时, 最重要的是研究此算子的谱分析. 当流形为紧时，谱是离散的, 所以在第三章中，我们研究特征函数及谱的性质; 在第四章中，我们研究热核，目的也在于研究谱的性质，也希望研究波动核的性质，其原因自然是由于它提供了谱和测地线之间的关系. 当流形非紧时，我们对谱的性质知道得仍然很少，特别是关于连续谱的情形. 这些希望以后能够涉及.

第五、六章主要考虑由于保角形变所导出的非线性偏微分方程. 这方面, 从 Poincaré 起，就不断有工作，我们首先讨论了 Yamabe 问题. 当然，只限于紧流形的情形. 在非紧流形的情形， Yamabe 问题还没有完全解决，希望以后也能涉及. 在第六章考虑保角平坦 Riemann 流形的性质. 在那里，读者可以发现，在纯量曲率恒正的情形，对这种流形可以有一个比较清楚的了解; 但是在

负纯量曲率的情形，则仍然是一个困难的问题.

由于整体微分几何方面没有一本比较合适的教科书，特别是以拓扑、代数几何为基础，以分析为主要工具的系统教材，我们这本书可以说是这方面的一个尝试.

本书是作者的一系列演讲，其中前部分是 1983 年在 Princeton 讲的四章，由钟家庆整理讲稿，后部分是 1984 年及 1985 年在 San Diego 讲的四章，第五章由许以超和丁伟岳整理讲稿，第六章的主要结果是作者们在此期间获得的，此章由张恭庆整理讲稿. 整理讲稿的各位数学家都是学有专长，往往在整理期间加上他们极宝贵的意见，使本书生色不少. 另外，作者的学生田刚、曹怀东、李俊等人进行了修改，在此一并表示感谢. 由于水平有限，书中错误及不妥之处自属难免，还望读者多多提出宝贵意见.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
孙理察 (Richard Schoen)
1986 年 2 月 1 日于加州大学圣地亚哥分校

目 录

第 一 章　比较定理与梯度估计

1.1 比较定理

比较定理 是流形上分析的基本工具之一，其本质是通过对 Jacobi 场与流形曲率的联系，以及流形曲率的性质进行分析而获得关于流形的更一般的性质. 另一方面，从 Jacobi 方程 看，它又是微分方程在几何中的应用. 例如，比较定理之一 ——Bonnet 定理，就是应用 Sturm-Liouville 理论的结果. 在微分几何中，有各种形式的比较定理，这方面的详细叙述可参见 Cheeger, Ebin 的书 ([10]).

设 M 是 n 维完备的 Riemann 流形；其 Riemann 度量记为

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

其中 $\{x^i\}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是局部坐标. 熟知 (M, ds^2) 上的 Laplace-Beltrami 算子定义为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

其中，$g = \det(g_{ij})$，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

M 上有一个自然的函数，即关于一固定点的距离函数. 任取固定点 $p \in M$，定义

$$\rho(x) = \text{dist}\ (p, x), \forall x \in M.$$

显然，$\rho(x)$ 不仅是连续的，而且是 Lipschitz 连续函数．由测度论可知，$\rho(x)$ 几乎处处可微.

对固定点 $p \in M$, 考虑指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$, 其存在性是熟知的 Hopf-Rinow 定理以及 M 的完备性的直接推论. 对于任一向量 $X \in T_pM$, 设 $\gamma(t) = \exp_p(tX)\,(t \geqslant 0)$ 是从 p 出发的沿方向 X 的光滑测地线（即 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X$）. 当 t 很小时，γ 是连接 $\gamma(t)$ 与 p 的惟一极小测地线, 且 $d\exp_p|_{tX} : T_{tX}(T_pM) \to T_{\exp_p(tX)}M$ 是微分同胚. 但随着 t 值增大时，这种性质可能不成立.

令 $t_0 = \sup\{t > 0\,|\,\gamma\text{是连接}\gamma(t)\text{和}p\text{的惟一极小测地线}\}$. 如果 $t_0 < +\infty$, 我们称 $\gamma(t_0)$ 为相对于 p 的沿 γ 的割点 (cut point). 所有相对于 p 的割点构成割迹 (cut locus)，我们记此割迹为 $\mathrm{Cut}(p)$.

显然，对于任一 $X \in T_pX, ||X|| = 1$, 在测地线 $\exp_p(tX)(t > 0)$ 上至多有一割点，因此 $\mathrm{Cut}(p)$ 是 S^{n-1} 中一闭子集在指数映射 $\exp_p$ 下的象，所以其 n 维测度为 0.

进一步，记 $\mu(X) = \mathrm{dist}\,(p, \gamma(t_0))$ 为沿 γ 至割点的距离，其中 $X \in S^{n-1} \subset T_pM$.

定义

$$E = \{tX|0 \leqslant t < \mu(X), X \in S^{n-1} \subset T_pM\},$$

则 $\exp_p : E \to \exp_p(E)$ 是微分同胚，因而诱导 M 的一个正规标架，显然，这是 M 以 p 为原点的可能的最大正规标架 ，且

$$M = \exp_p(E) \cup \mathrm{Cut}\,(p).$$

从定义可看出，$\exp_p(E)$ 是以 p 为中心的星形区域 (star domain)，而前面定义的相对于 p 的距离函数 $\rho(x)$, 在 $\exp_p(E)$ 中是光滑的.

在 $\rho(x)$ 的可微点上，因为测地线以弧长为参数，故有

$$|\nabla\rho| = 1,$$

即 $\sum g^{ij}\rho_i\rho_j = 1$, 其中 ρ_i 为 ρ 沿 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 方向的协变微分.

熟知，在 M 中任意一点 p 处的 Ricci 曲率 是一个双线性型

$$\mathrm{Ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

在 p 点的切空间 T_pM 中取单位正交标架 $\{e_i\}, \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, 如果 $e = \sum a^i e_i$, 则

$$\mathrm{Ric}(e,e) = \sum R_{ij} a^i a^j,\ R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j).$$

如果取 $e = e_n$, 则

$$\mathrm{Ric}(e,e) = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e),$$

其中 $K(e_i, e)$ 是由 e, e_i 所张成的二维平面所对应的截面曲率.

设 $f \in C^2(M)$.f 的 Hesse 形式记作 $H(f)$, 定义如下: 设 X, Y 是过点 $x \in M$ 的两切向量. 将 X, Y 扩充成在 x 的邻域内可微的向量场 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$, 定义

$$H(f)(X,Y) = (\widetilde{X}\widetilde{Y}f)(x) - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}f)(x). \tag{1.1.1}$$

此处 ∇ 表示 M 的 Riemann 联络. 容易验证, $H(f)(X,Y)$ 不依赖于扩充向量场 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ 的选择.

固定 $p \in M$, 对任何 ρ 的割迹之内的点 x, 记连接 p 和 x 的极小测地线为 σ, 使 $\sigma(0) = p, \sigma(r) = x$. 任取 $X \in T_xM$ 使得 $\langle X, \dfrac{\partial}{\partial r}\rangle(x) = 0$. 因为 x 不是 p 的共轭点, 我们可以将 X 扩充成沿 σ 的一个 Jacobi 场 $\widetilde{X}$, 满足 $\widetilde{X}(\sigma(0)) = 0, \widetilde{X}(\sigma(r)) = X, \left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0 (0 \leqslant t \leqslant r)$ (参见 [10]). 这样, 有

$$\begin{aligned} H(r)(X,X) &= \widetilde{X}\widetilde{X}r - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X})r \\ &= X\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle. \end{aligned}$$

最后一步是由于 $\left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = 0$. 因此, 在 x 点上, 有

$$\begin{aligned} H(r)(X,X) &= \int_0^r \frac{d}{dt}\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle\, dt \\ &= \int_0^r (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2 + \langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle)\, dt. \end{aligned}$$

但由于 $\widetilde{X}$ 是 Jacobi 场, 即

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X} + R(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

所以

$$H(r)(X,X)=\int_0^r\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2-\left\langle R(\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t},\widetilde{X}\right\rangle\right)dt. \tag{1.1.2}$$

注 在 Jacobi 场的理论中，上述表达式正是向量场 $\widetilde{X}$ 沿 σ 的“指标形式” (index form)$I_0^r(\widetilde{X})$ （可参见 [10] ）.

定理 1.1 (Hesse 比较定理） 设 M_1 和 M_2 是两个 n 维完备 Riemann 流形，$\gamma_i:[0,a]\to M_i$, $(i=1,2)$ 是两条以弧长为参数的测地线. 记 M_i 上以 $\gamma_i(0)$ 为起点的距离为 ρ_i. 设 $\gamma_i(a)$ 在 $\gamma_i(0)$ 的割迹之内，假定 $\forall t\ (0\leqslant t\leqslant a)$, 有

$$截面曲率K_1\left(X_1,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\geqslant 截面曲率K_2\left(X_2,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right),$$

其中 X_i 分别是 $T_{\gamma_i(t)}M_i$ 中与切向量 $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$ 正交的单位向量，则

$$H(\rho_1)(X_1,X_1)\leqslant H(\rho_2)(X_2,X_2), \tag{1.1.3}$$

此处 X_i 是 $T_{\gamma_i(a)}M_i$ 中的单位向量，且 $\left\langle X_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle(\gamma_i(a))=0$.

证明 沿 γ_i 作正交的单位平行向量场 $E_1^{(i)},\cdots,E_n^{(i)}$, 使

$$E_n^i=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\quad(i=1,2).$$

由 (1.1.2)，有

$$H(\rho_i)(X_i,X_i)=\int_0^a\left(|\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\widetilde{X}_i|^2-\left\langle R(\widetilde{X}_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i})\frac{\partial}{\partial\gamma_i},\widetilde{X}_i\right\rangle\right)d\gamma_i,$$

其中 $\widetilde{X}_i$ 是沿 γ_i 的 Jacobi 场，$\widetilde{X}_i(\gamma_i(0))=0,\widetilde{X}_i(\gamma_i(a))=X_i$. 因为 $\left\langle X_i,\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle=0$, 所以 $\widetilde{X}_i$ 在 γ_i 的各点都和 $E_n^{(i)}$ 正交. 记

$$\widetilde{X}_2=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(2)}.$$

根据 $E_j^{(1)}(a)$ 的取法的任意性，自然可假定

$$X_1=\widetilde{X}_1(a)=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(a)E_j^{(1)}.$$

沿测地线 γ_1 定义向量场 Z：

$$Z=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(1)},$$

则 Z 和 $\widetilde{X}_1$ 有相同的初值和终值，并且 $|\widetilde{X}_2|=|Z|$ 及

$$\begin{aligned}|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2| &= |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(2)}|\\ &= |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(1)}|=|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|.\end{aligned}$$

根据 Jacobi 场理论中的基本事实（见 [10], p.24 ）：沿一条无共轭点的测地线在具相同初、终值的所有向量场的"指标形式" 中以 Jacobi 场的指标形式为最小，由此即得

$$\begin{aligned}H(\rho_1)(X_1,X_1) &= J_0^a(\widetilde{X}_1)\leqslant I_0^a(Z)\\ &= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|^2-\left\langle R\left(Z,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1},Z\right\rangle\right)d\gamma_1\\ &= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2-\left\langle R\left(Z,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1},Z\right\rangle\right)d\gamma_1\\ &\leqslant \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2-\left\langle R\left(\widetilde{X}_2,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_2},\widetilde{X}_2\right\rangle\right)d\gamma_2\\ &= J_0^a(\widetilde{X}_2)=H(\rho_2)(X_2,X_2).\end{aligned}$$

最后的不等号是由于定理的假设条件. 定理至此证毕.

在讨论流形上的分析问题时, 以下形式的 Laplace 算子比较定理非常有用, 它是上述定理的直接推论.

系 1.1 （ Laplace 算子比较定理） 设 n 维完备 Riemann 流形 M 满足 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant-(n-1)k^2\ (k\geqslant0)$. 再设 N 为 n 维单连通的以 $(-k^2)$ 为常截面曲率的空间，称为空间形式 (space form). 以 ρ_M 和 ρ_N 分别记 M 和 N 上相对固定点的距离. 如果 $x\in M, y\in N$, 使 $\rho_M(x)=\rho_N(y)$, 则当 x 是 ρ_M 的可微点时，有

$$\Delta\rho_M(x)\leqslant\Delta\rho_N(y). \tag{1.1.4}$$

为了得出更便于应用的形式, 我们需要计算常曲率 $(-k^2)$ 空间形式中的 $\Delta\rho$. 根据 (1.1.2)，

$$H(\rho)(X,X)=\int_0^\rho\left(|\frac{\partial}{\partial\gamma}\widetilde{X}|^2-\left\langle R(\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma},\widetilde{X}\right\rangle\right)d\gamma,$$

其中 $\widetilde{X}$ 是沿极小测地线 γ 的 Jacobi 场，满足 $\widetilde{X}(0)=0$,

$$\widetilde{X}(\gamma(\rho))=X.$$

因此计算 $\Delta\rho$ 化为求沿极小测地线的 Jacobi 场的问题.

在以 $-k^2$ 为常曲率的空间形式中, 沿任何正规测地线 γ 的 Jacobi 场可以这样求得：设 $p=\gamma(0), q=\gamma(\rho), X\perp\dot{\gamma}(\rho)$, 将 X 沿 γ 平行移动得到的向量场仍记为 $X(t)(0\leqslant t\leqslant\rho)$, 那么沿 γ 的 Jacobi 场 $Y(t)$, 如果满足 $Y(0)=0, Y(\rho)=X$, 则具有以下形式：

$$Y(t)=f(t)X(t),$$

其中函数 $f(t)$ 满足经典的 Jacobi 方程 ：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)-k^2f(t)=0,\\ f(0)=0,\quad f(\rho)=1.\end{cases}\tag{1.1.5}$$

熟知 (1.1.5) 的解为

$$f(t)=\frac{1}{\operatorname{sh}k\rho}\operatorname{sh}kt.\tag{1.1.6}$$

现设 $\{\frac{\partial}{\partial\gamma},X_1,\cdots,X_{n-1}\}$ 是 $T_{\gamma(\rho)}M$ 的单位正交基, 它们沿 γ 平行移动得相应的向量场. 于是， $\widetilde{X}_j(t)=f(t)X_j(t)\ (1\leqslant j\leqslant n-1)$ 是满足 $\widetilde{X}_j(\rho)=X_j$ 的 Jacobi 场. 根据 (1.1.2)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho&=\sum_{j=1}^{n-1}H(\rho)(X_j,X_j)\\&=(n-1)\int_0^\rho\left(|\frac{df}{dt}|^2+k^2f^2(t)\right)dt\\&=(n-1)k\coth k\rho.\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

系 1.2 如果 n 维完备 Riemann 流形的 Ricci 曲率 $\geqslant-(n-1)k^2$, 则在 ρ 的可微点上有

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}(1+k\rho).\tag{1.1.8}$$

证明 根据系 1.1 及 (1.1.7)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho&\leqslant(n-1)k\coth k\rho\\&=\frac{n-1}{\rho}k\rho\coth k\rho.\end{aligned}$$

易知

$$k\rho \coth k\rho \leqslant (1 + k\rho),$$

所以

$$\Delta\rho \leqslant \frac{n-1}{\rho}(1 + k\rho).$$

根据 (1.1.8)，当流形的 Ricci 曲率非负时，在 ρ 的可微点上总有

$$\Delta\rho \leqslant \frac{n-1}{\rho}. \tag{1.1.9}$$

不幸的是，上式在割点处失去意义. 然而，在研究流形整体性态时，由于 $M = \exp_p(E) \cup \mathrm{Cut}\,(p)$, 且 $\exp_p(E)$ 是星形区域，所以 M 的拓扑性质表现于 $\mathrm{Cut}\,(p)$ 附近，致使我们希望在 $\mathrm{Cut}\,(p)$ 附近 $\Delta\rho$ 仍具较好的性质. 为此，我们将证明，在分布意义下，(1.1.9) 在 M 上成立，即对于任何 $\varphi \in C_0^\infty(M), \varphi \geqslant 0$, 有

$$\int_M \rho\Delta\varphi \leqslant \int_M \frac{n-1}{\rho} \cdot \varphi. \tag{1.1.10}$$

命题 1.1 设 M 是完备的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率非负. 任意固定一点 $p \in M$, 记相对于 p 的距离函数为 ρ, 则在分布意义下 (1.1.9) 在 M 上成立.

证明 设 $\Omega = \exp_p(E)$. $M = \Omega \cup \mathrm{Cut}\,(p)$, 其中 Ω 是一星形区域. Lipschitz 函数 ρ 在 Ω 中是可微的，因此在 Ω 中有

$$\Delta\rho \leqslant \frac{n-1}{\rho}.$$

取任意 $\varphi \in C_0^\infty(M), \varphi \geqslant 0$. 因为

$$\mathrm{mes}\,(\mathrm{Cut}\,(p)) = 0,$$

因而有

$$\int_M \rho\Delta\varphi = \int_\Omega \rho\Delta\varphi.$$

因为 Ω 是星形区域，即从 p 点出发的每条测地射线与 Ω 的边界只相交一次，因此，可取一族星形子域 Ω_ε, 使 $\Omega_\varepsilon \subset \Omega, \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Omega_\varepsilon = \Omega$, 并且 Ω_ε 是 Ω 沿 ρ 方向内缩而成的. 因为 Stokes 公式对 Lipschitz 函数仍然成立，再注意到 $\varphi \in C_0^\infty(M)$,

我们有

$$\int_M \rho\Delta\varphi = -\int_M -\nabla\varphi\cdot\nabla\rho$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-1)\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\rho\cdot\nabla\varphi.$$

最后一步是因为 $|\nabla\rho|=1$ 几乎处处成立，以及 $\nabla\varphi$ 是有界的．由 Green 公式

$$-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\rho\cdot\nabla\varphi = \int_{\Omega_\varepsilon}\Delta\rho\cdot\varphi - \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi\frac{\partial\rho}{\partial\nu}, \tag{1.1.11}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的外法线方向．因为 $\varphi\geqslant 0$ 以及 Ω_ε 是由 Ω 沿 ρ 方向内缩而成的，所以在边界 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上 $\dfrac{\partial\rho}{\partial\nu}>0$, 于是有

$$-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\rho\cdot\nabla\varphi \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon}\Delta\rho\cdot\varphi$$
$$\leqslant \int_{\Omega_\varepsilon}\frac{n-1}{\rho}\varphi. \tag{1.1.12}$$

最后得到

$$\int_M \rho\cdot\Delta\varphi \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{n-1}{\rho}\varphi$$
$$= \int_\Omega \frac{n-1}{\rho}\varphi$$
$$= \int_M \frac{n-1}{\rho}\varphi.$$

命题证毕.

替代到一点的距离函数，我们可以考虑到一子流形的距离函数，通过同样的讨论不难得到这一函数的若干类似性质，只不过涉及子流形的平均曲率及第二基本形式.

本节余下部分要证明体积比较定理．一个 Riemann 流形的体积，或一给定半径的测地球体积，是一个重要的几何量．它在流形上的分析中起着重要作用，例如，流形的谱的估计、热方程积分核 的估计，以及 Sobolev 嵌入 常数和等周常数 等，都与体积有关．首先我们回顾一些关于 Jacobi 场及测地球体积的若干基本事实（见 [8]).

设 $x \in M$ 是流形 M 上任一固定点， $\gamma(t)$ 是从 x 出发的一测地射线， $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = v \in T_xM$. 如果 $Y(t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，满足 $Y(0) = 0, Y'(0) = w \in T_xM$, 则基点为 x 的指数映射 exp 在 $tv \in T_xM$ 的微分在向量 v, w 上的取值分别为

$$\begin{aligned} d\exp_{tv}(v) &= \dot{\gamma}(t), \\ d\exp_{tv}(w) &= t^{-1}Y(t). \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

根据 Gauss 引理（见 [10]），如果 $w \in T_xM, \langle v, w\rangle_x = 0$, 则

$$\langle d\exp_{tv}(v), d\exp_{tv}(w)\rangle = 0,$$

令 $v = \dot{\gamma}(0), w_2, \cdots, w_n$ 组成 T_xM 的一组正交基，则 $\dot{\gamma}(t), d\exp_{tv}(w_i) = t^{-1}Y_i(t)(i = 2, \cdots, n)$ 组成 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基，只要 $\gamma(t)$ 不是沿 γ 关于 x 的共轭点. 所以映射 exp 在 tv 处的 Jacobi 行列式 $A(t,\theta)$ 为

$$\begin{aligned} A(t,\theta) &= |\dot{\gamma}(t) \wedge t^{-1}Y_2 \wedge \cdots \wedge t^{-1}Y_n| \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \det(Y_2(t), \cdots, Y_n(t)), \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

其中 $\theta = \dfrac{v}{|v|}$ 为在 x 处的正规极坐标 (t,θ) 的球面坐标分量. 根据上式及经典的 Rauch 比较定理，Bishop 证明了以下重要结果（见 Bishop-Crittenden, Geometry of Manifolds, Academic Press, 1964）.

定理 1.2 (Bishop)　对于 n 维完备 Riemann 流形 M, 如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant (n-1)K$, 则

$$t^{n-1}A(t,\theta)S_K^{1-n}(t)$$

是 t 的非增函数，其中 $S_K(t)$ 和 t 满足:

当 $K > 0$ 时，$S_K(t) = \dfrac{\sin\sqrt{K}t}{\sqrt{K}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{K}}$,

当 $K = 0$ 时，$S_0(t) = t, \quad 0 \leqslant t < +\infty$,

当 $K < 0$ 时，$S_K(t) = \dfrac{\sinh\sqrt{-K}t}{\sqrt{-K}}, \quad 0 \leqslant t < +\infty$.

如果我们把以 x 为中心、t 为半径的测地球记为 $B_x(t)$, 则上述的 $t^{n-1}A(t,\theta)\,d\theta$ 实为用 x 处的正规极坐标 $(t,\theta), \theta \in S^{n-1}(1)$ 表述的 $\partial B_x(t)$ 的体积元素.

现在考虑曲率为常数 K 的单连通常曲率流形（称为空间形式）M_K, 则上述 $S_K^{n-1}(t)$ 实为 M_K 中半径为 t 的测地球面的体积密度. 将 $S_K^{n-1}(t)$ 改记为 $\mathfrak{A}_K(t)$,

则 Bishop 定理可表示为

$$\frac{t^{n-1}A(t,\theta)}{\mathfrak{A}_K(t)} \text{ 关于 } t \text{ 非增.} \tag{1.1.15}$$

当然，当 $K>0$ 时，上述事实只对于 $t \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ 才成立.

以 $U \subset T_xM$ 表示 x 的切空间中相对于 x 的割迹 的内部. 以 $S_t(0)$ 表示 T_xM 中半径为 t 的球面，则 (1.1.15) 蕴含

$$\frac{\int_{S_t(0)\cap U} t^{n-1}A(t,\theta)}{\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t)} \text{ 关于 } t \text{ 非增,} \tag{1.1.16}$$

可能存在割点并不影响 (1.1.16) 的成立 (注意到 $\mathfrak{A}_K(t)$ 与 θ 无关，从积分的定义出发即可验证这一事实). 记

$$f(t)=\int_{S_t(0)\cap U} t^{n-1}A(t,\theta),\ g(t)=\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t),$$

则

$$\operatorname{Vol}(B_x(t)) = \int_0^t f(s)\,ds,$$
$$\operatorname{Vol}(B_K(t)) = \int_0^t g(s)\,ds,$$

其中 $B_K(t)$ 表示空间形式 M_K 中半径为 t 的测地球. 根据下面将证明的引理，即可得体积的比较定理.

引理 如果 $f(s), g(s)>0, f(s)/g(s)$ 非增，令

$$F(t)=\int_0^t f(s)\,ds,\ G(t)=\int_0^t g(s)\,ds,$$

则 $F(t)/G(t)$ 也非增.

证明 任取 $r_1 \leqslant t_i < t_{i+1}$, 由于

$$\frac{F'(r_1)}{G'(r_1)} \geqslant \frac{F'(t_i)}{G'(t_i)} = \frac{F'(t_i)\Delta t_i}{G'(t_i)\Delta t_i},$$

所以

$$\frac{F'(r_1)}{G'(r_1)} \geqslant \frac{\sum F'(t_i)\Delta t_i}{\sum G'(t_i)\Delta t_i} \to \frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} F'(t)\,dt}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} G'(t)\,dt}$$
$$= \frac{F(r_2)-F(r_1)}{G(r_2)-G(r_1)},$$

只要 $r_1 \leqslant r_2$.

同理，只要 $r_0 \leqslant r_1$, 又有

$$\frac{F(r_1)-F(r_0)}{G(r_1)-G(r_0)} \geqslant \frac{F'(r_1)}{G'(r_1)}.$$

所以，只要 $r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2$, 即有

$$\frac{F(r_1)-F(r_0)}{G(r_1)-G(r_0)} \geqslant \frac{F(r_2)-F(r_1)}{G(r_2)-G(r_1)}.$$

令 $r_0=0, F(0)=G(0)=0$, 即得

$$\frac{F(r_1)}{G(r_1)} \geqslant \frac{F(r_2)}{G(r_2)}.$$

引理证毕.

最后，在 Bishop 定理 (1.1.16) 中，由 $\forall t>0$,

$$\frac{\int_{S_t(0)\cap U} t^{n-1}A(t,\theta)}{\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t)} \leqslant \left[\frac{\int_{S_t(0)} t^{n-1}A(t,\theta)}{\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t)}\right]_{t\to 0} = 1.$$

再对 t 积分，即得

定理 1.3 (Bishop 体积比较定理) 对于 n 维完备的 Riemann 流形 M, 如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant (n-1)K, x \in M$, 则 $\forall R>0$, $\dfrac{\mathrm{Vol}\,(B_x(R))}{V(K,R)}$ 关于 R 是非增的. 因此,

$$\mathrm{Vol}\,(B_x(R)) \leqslant V(K,R), \tag{1.1.17}$$

其中 $V(K,R)$ 是空间形式 M^K 中的半径为 R 的测地球体积.

至于 $\mathrm{Vol}\,(B_x(R))$ 的下界，根据比较定理有以下熟知的事实:

如果 Riemann 流形 M 的截曲率满足 $K_M \leqslant b^2$. 任取 $x \in M$, 而 $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}(1)$ 表示在 x 处的正规测地坐标系，将 M 的度量按此坐标系表示为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 g_{ij}(\theta)\,d\theta^i\,d\theta^j, \tag{1.1.18}$$

则当 $r<\dfrac{\pi}{b}$ 时，有

$$\sqrt{\det(g_{ij})} \geqslant \left(\frac{\sin br}{br}\right)^{n-1}. \tag{1.1.19}$$

由此可知，只要 $K_M \leqslant b^2$, 则

$$\mathrm{Vol}(B_x(R)) \geqslant C(n,b,R). \tag{1.1.20}$$

常数 $C(n,b,R)$ 不依赖于 x.

注 当 M 是完备非紧流形时， $\mathrm{Vol}(B_x(R))$ 的渐近性质 $(R\to+\infty)$ 是很有意义的问题，它反映了 M 在无穷远处的拓扑性质，最简单例子之一是平坦流形 情形 $M=\mathbb{R}^k\times T^{n-k}, \mathrm{Vol}(B_x(R))=O(R^k)(R\to+\infty)$, 其中 $n-k$ 是 M 中环面的维数. 我们期望建立一些 $\mathrm{Vol}(B_x(R))$ 的渐近估计，且估计仅依赖于流形的曲率及拓扑.

1.2 分裂定理

通常我们研究一般 Riemann 流形性质，或者进行分类时，总希望找到某种约化方法，使得问题化为研究某些不能再约化的流形 —— 不可约流形的情形. 微分几何中的分裂定理给出了实现这种约化的一条途径. 本节中要证明 Cheeger-Gromoll 的定理，即 Riemann 流形在某些条件下等距于 $\mathbb{R}^k$ 与不具测地直线的流形的积. 应指出的是，如果 M 是非负 Ricci 曲率 的完备流形，则 Toponogov 证明： M 是 $\mathbb{R}^k$ 与一不具测地直线的流形的积，即 Toponogov 分裂定理 （见 Cheeger, Gromoll 的文章 [12] ）.

Cheeger-Gromoll 分裂定理 的证明基于 Busemann 函数 的研究. 首先我们来介绍这一概念.

完备 Riemann 流形 M 上一条测地直线（相应地，一射线）指的是一正规测地线 $\gamma:(-\infty,+\infty)\to M$ （或 $\gamma:(0,+\infty)\to M$ ），使得 γ 上任何两点的距离（指在 M 上的距离）恰好等于 γ 上这两点间线段的长度，即 $d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))=|t_1-t_2|$. 众所周知，如果 M 完备且非紧，则从 M 上任何一点出发都存在这样的测地射线 γ.

设 γ 是从某固定点出发的一测地射线，则与 γ 相联系的 Busemann 函数 定义为

$$B^+(x)=\lim_{t\to+\infty}(d(x,\gamma(t))-t). \tag{1.2.1}$$

如果记 $B_t^+(x)=d(x,\gamma(t))-t$, 则由三角不等式，显然有

$$|B_t^+(x)|\leqslant d(\gamma(0),x).$$

因此，函数族 $\{B_t^+(x)\}$ 在任何紧子集上是一致有界的．并且如果 $s<t$, 则有

$$B_t^+(x)-B_s^+(x)=d(x,\gamma(t))-d(x,\gamma(s))-d(\gamma(s),\gamma(t))\leqslant 0.$$

所以函数族 $\{B_t^+(x)\}$ 是单调递减的．因此，$\lim\limits_{t\to\infty}B_t^+(x)=B^+(x)$ 在任何紧子集上一致收敛．

同时，因为对任何固定的 t, 取 $|B_t^+(x)-B_t^+(y)|\leqslant d(x,y)$ 的极限，自然也有 $|B^+(x)-B^+(y)|\leqslant d(x,y)$, 即 $B^+(x)$ 也是 Lipschitz 连续的，因而几乎处处可微．

根据定义，当 t 固定时，集合 $\{x|B_t^+(x)<\text{常数}\}$ 正是以 $\gamma(t)$ 为中心的测地球．因此我们可以直观地把集合 $\{x|B^+(x)<\text{常数}\}$ 理解成以 $\gamma(\infty)$ 为中心的测地球．

如果 γ 是一测地直线，那么我们还可以类似地定义另一 Busemann 函数 $B^-(x)$：

$$B^-(x)=\lim_{t\to-\infty}(d(x,\gamma(t))+t). \tag{1.2.2}$$

由定义及三角不等式，易见

$$B^++B^-=0,\quad \text{在}\gamma\text{上}, \tag{1.2.3}$$

$$B^++B^-\geqslant 0,\quad x\in M. \tag{1.2.4}$$

现在我们可以着手叙述和证明分裂定理．

分裂定理 (Cheeger-Gromoll, 1971) 设 M 是一 n 维完备的 Riemann 流形，具有一测地直线．如果 M 的 Ricci 曲率非负，那么 M 等距于 $\mathbb{R}\times N$, 其中 N 是 $(n-1)$ 维 Riemann 流形，$\mathbb{R}\times N$ 具有乘积度量．

证明 我们将给出证明的概述，而其中涉及的技术步骤则作为命题放在本节的末尾．

记 γ 为 M 中的测地直线．固定 $p=\gamma(0)\in\gamma$. 根据命题 1.1，对任何 $\varphi\in C_0^\infty(M),\varphi\geqslant 0$ 以及任何固定的 t, 有

$$\begin{aligned}\int_M B_t^+\Delta\varphi&=\int_M\varphi\Delta B_t^+=\int_M\varphi\Delta d(x,\gamma(t))\\&\leqslant\int_M\frac{n-1}{d(x,\gamma(t))}\varphi.\end{aligned}$$

令 $t \to +\infty$, 得

$$\int_M \varphi \Delta B^+ = \int_M \Delta\varphi \cdot B^+ \leqslant 0.$$

这意味着：在分布意义下，$\Delta B^+ \leqslant 0$. 同理，在分布意义下，$\Delta B^- \leqslant 0$. 因此，有

$$\begin{aligned} B^+ + B^- &\geqslant 0, \\ B^+ + B^- &= 0, \quad 在\gamma上, \\ \Delta(B^+ + B^-) &\leqslant 0, \quad 在分布意义下. \end{aligned}$$

根据下面要证的命题 2.1，我们有

$$(B^+ + B^-)(q) \geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}R^n}\int_{B_R(x)}(B^+ + B^-),$$

其中 $B_R(x)$ 是 M 上中心为 x、半径为 R 的测地球. 但 $B^+ + B^-$ 在 γ 上为零，在其他部分上非负，取 $q \in \gamma$ 即看出

$$B^+ + B^- \equiv 0.$$

因此，$\Delta B^+ + \Delta B^- = \Delta(B^+ + B^-) \equiv 0$, 故在分布意义下

$$\Delta B^+ = 0, \quad \Delta B^- = 0.$$

根据二阶椭圆型方程理论中的 Weyl 引理，B^+ 和 B^- 实际上是光滑的.

因为 $|\nabla\rho| = 1$ 几乎处处成立，因而 $|\nabla B^+| = 1$, 再根据下面将证明的命题 2.2 及其系，∇B^+ 实际上是 M 上的平行向量场，即 $\nabla(\nabla B^+) = 0$. 然后根据 de Rham 分解定理，M 等距微分同胚于 ∇B^+ 的积分曲线与等值曲面的拓扑积 $\mathbb{R} \times N$, 其中 $N = \{x \in M : B^+(x) = 0\}$. 定理证毕.

命题 2.1 设完备 Riemann 流形 M 的 Ricci 曲率 $\geqslant 0$, Lipschitz 函数 $f \geqslant 0, \Delta f \leqslant 0$（在分布意义下），任取 $p \in M, B(R)$ 表示以 p 为中心、充分小的 R 为半径的测地球，则

$$f(p) \geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}R^n}\int_{B_R(p)} f, \tag{1.2.5}$$

其中 $\omega_{n-1} = \mathrm{Vol}\,(S^{n-1}(1))$.

证明 设 (r,θ) 为围绕 p 的正规测地坐标系，其中

$$\theta = \{\theta_i\}\ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \in S^{n-1}(1).$$

M 的度量 g 可表成

$$ds^2 = (d\tau)^2 + r^2 g_{ij}\, d\theta_i\, d\theta_j.$$

记 $G = \det(g_{ij})$, 则由 $\Delta f \leqslant 0$ 以及 Divergence 定理，对于任何 $0 < t \leqslant R$, 有

$$0 \geqslant \int_{B(t)} \Delta f = \int_{\partial B(t)} \frac{\partial f}{\partial r} t^{n-1} \sqrt{G}\, d\theta.$$

熟知

$$\Delta r = \frac{n-1}{r} + \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial r}.$$

因为 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 故 $\Delta r \leqslant \dfrac{n-1}{r}$, 因此

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \leqslant 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^{n-1}} \int_{B(t)} \Delta f &= \int_{\partial B(t)} \frac{\partial f}{\partial r} \sqrt{G}\, d\theta \\
&\geqslant \int_{\partial B(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sqrt{G} + f \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \right) d\theta \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial B(t)} f \sqrt{G}\, d\theta \right).
\end{aligned}$$

因此，

$$0 \geqslant \frac{d}{dt} \int_{\partial B(t)} f \sqrt{G}\, d\theta.$$

注意 $\sqrt{G}(0) = 1$, 由上式有

$$\begin{aligned}
\omega_{n-1} f(p) &\geqslant \int_{\partial B(t)} f \sqrt{G}\, d\theta \\
&= \frac{1}{t^{n-1}} \int_{\partial B(t)} f.
\end{aligned}$$

将上式由 0 到 R 积分，得 (1.2.5).

命题 2.2 设 M 是完备的 Riemann 流形, $f \in C^3(M)$, 任取 $p \in M, \{x_i\}$ 是 p 点处的法坐标系，则

$$\Delta|\nabla f|^2(p) = 2\sum_{ij} |f_{ij}|^2 + 2\sum R_{ij} f_i f_j + 2\sum f_i(\Delta f)_i, \tag{1.2.6}$$

其中 f_i 是 f 相应于 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的协变微分, R_{ij} 是 M 的 Ricci 张量.

证明 因为 $|\nabla f|^2 = \sum f_i^2$, 因此在 p 点上，有

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_j (|\nabla f|^2)_{jj} \\ &= \sum_j \left(\sum_i f_i^2\right)_{jj} \\ &= 2\sum_j (\sum f_i f_{ij})_j \\ &= 2\sum f_{ij}^2 + 2\sum f_i f_{ijj}.\end{aligned}$$

而熟知 $f_{ij} = f_{ji}$ 及 Ricci 公式: $f_{jij} = f_{jji} + R_{ij} f_j$, 因此

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla f|^2) &= 2\sum f_{ij}^2 + 2\sum f_i(f_{jji} + R_{ij} f_j) \\ &= 2\sum f_{ij}^2 + 2\sum_i f_i(\Delta f)_i + 2\sum R_{ij} f_i f_j.\end{aligned}$$

命题得证.

系 2.3 如果 $|\nabla f| = 1, \mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 且 $\Delta f = 0$ 则 ∇f 是平行向量场.

证明 由 (1.2.6), 有

$$\begin{aligned}0 = \Delta|\nabla f|^2 &= 2\sum f_{ij}^2 + 2\sum R_{ij} f_i f_j \\ &\geqslant 2\sum f_{ij}^2.\end{aligned}$$

故 $f_{ij} = 0$, 对于一切 i, j, 即 $\nabla(\nabla f) = 0$. 证毕.

利用归纳法，从分裂定理可得:

定理 2.4 如果 M 是具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形，则 M 等距于 $\overline{M} \times \mathbb{R}^k$, 其中 $\overline{M}$ 不含整条测地直线 .

利用这一定理还可以得到有关紧流形的基本群的结构定理:

定理 2.5 设 M 是具非负 Ricci 曲率 的紧 Riemann 流形，则 $\pi_1(M)$ 包含一个正规子群 ψ, 使 $\pi_1(M)/\psi$ 是有限型的. M 的通用覆盖流形 $\widetilde{M}$ 可等距地分裂为 $\mathbb{R}^k \times \overline{M}$, 其中 $\overline{M}$ 是紧的.

注 上述定理也是 Toponogov 相应定理的推广. 更进一步应用 Cheeger-Gromoll 定理， 可以给出非紧流形基本群增长率的估计，且在相当合理假设下，证明任一紧 Riemann 流形的和乐 (holonomy) 群是紧的.

1.3 梯度估计

本节将讨论正调和函数的梯度估计，确切地说，我们要给出 $\log u$ 的梯度估计，其中 u 是正调和函数，其证明属于 Yau (见 Yau, S. T.,[38]). 作为应用，在本节中我们给出非负 Ricci 曲率 流形上的 Liouville 定理， 及 Ricci 曲率具有下界的流形上的 Harnack 型不等式等等. 稍后，我们还将应用此方法于流形谱值的估计.

定理 3.1 设 M 是完备的 Riemann 流形， $\dim M = n \geqslant 2, \mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k(k \geqslant 0), u$ 是 M 上的正调和函数，则在 M 的任何测地球 $B_a(x)$ 中，成立

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n \left(\frac{1 + ak^{\frac{1}{2}}}{a} \right), \tag{1.3.1}$$

其中 C_n 为仅与 n 有关的常数.

证明 1° 根据命题 2.2，在一点 p 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) &= \sum_{i,j} u_{ij}^2 + \sum_i u_i(\Delta u)_i + Ric(\nabla u, \nabla u) \\ &\geqslant \sum_{i,j} u_{ij}^2 - (n-1)k|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

既然计算是局部的，那么我们可选取 p 点的法坐标系，使得 $u_i(p) = 0(i \geqslant 2), u_1(p) = |\nabla u|_{(p)}$, 所以

$$\begin{aligned} \nabla_j(|\nabla u|) &= \nabla_j\left(\sqrt{\sum u_i^2}\right) \\ &= \frac{\sum_i u_i \cdot u_{ij}}{|\nabla u|} = u_{1j}, \end{aligned}$$

故

$$|\nabla(|\nabla u|)|^2 = \sum_j u_{1j}^2. \tag{1.3.3}$$

但有

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2|\nabla u| \cdot \Delta(|\nabla u|) + 2|\nabla(|\nabla u|)|^2, \tag{1.3.4}$$

故由 (1.3.2) 和 (1.3.3), 有

$$\sum_{i,j} u_{ij}^2 - (n-1)k|\nabla u|^2 \leqslant |\nabla u|\Delta(|\nabla u|) + \sum_j u_{1j}^2.$$

所以

$$\begin{aligned}
|\nabla u|\Delta(|\nabla u|) + (n-1)k|\nabla u|^2 &\geqslant \sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_j u_{1j}^2 \\
&\geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \sum_{i\neq 1} u_{ii}^2 \\
&\geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i>1} u_{ii}\right)^2.
\end{aligned}$$

因为 $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0$, 所以 $u_{11}^2 = \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii}\right)^2$. 代入上式，得

$$\begin{aligned}
|\nabla u|\Delta(|\nabla u|) + (n-1)k|\nabla u|^2 &\geqslant \frac{1}{n-1}\sum_i u_{i1}^2 \\
&= \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2.
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

最后一步是由于 (1.3.3).

2° 令 $\phi = \frac{|\nabla u|}{u}$, 欲给出 $\Delta\phi$ 的估计

$$\nabla\phi = \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}. \tag{1.3.6}$$

由 $|\nabla u| = \phi \cdot u$, 在 $\nabla u \neq 0$ 的点上，有

$$\begin{aligned}
\Delta|\nabla u| &= u\Delta\phi + \phi\Delta u + 2\nabla\phi\cdot\nabla u \\
&= u\Delta\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla u, \\
\Delta\phi &= \frac{\Delta(|\nabla u|)}{u} - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \\
&= \frac{|\nabla u|\Delta(|\nabla u|)}{|\nabla u|u} - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \\
&\geqslant \frac{1}{|\nabla u|u}\left(\frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2 - (n-1)k|\nabla u|^2\right) - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \\
&= \frac{1}{(n-1)|\nabla u|u}|\nabla|\nabla u||^2 - (n-1)k\phi - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u}.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon = \frac{2}{n-1} > 0$, 则由 (1.3.6)，有

$$\begin{aligned}
-2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} &= -(2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} - \varepsilon\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \\
&= -(2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} - \varepsilon\frac{\nabla|\nabla u|\cdot\nabla u}{u^2} + \varepsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\
&\geqslant -(2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} - \varepsilon\frac{|\nabla|\nabla u||\cdot|\nabla u|}{u^2} + \varepsilon\phi^3.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

但

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\frac{|\nabla|\nabla u||\cdot|\nabla u|}{u^2} &= -\varepsilon\frac{|\nabla|\nabla u||}{(|\nabla u|u)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{|\nabla u|^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} \\
&\geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|u} + \frac{|\nabla u|^3}{u^3}\right) \\
&= -\frac{1}{n-1}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{u|\nabla u|} + \phi^3\right),
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

代入 (1.3.7)，得

$$-2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \geqslant -(2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} - \frac{|\nabla|\nabla u||^2}{(n-1)u|\nabla u|} + \frac{1}{n-1}\phi^3,$$

最后得

$$\Delta\phi \geqslant -(n-1)k\phi - \left(2 - \frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} + \frac{1}{n-1}\phi^3. \tag{1.3.9}$$

3° 在 $B_a(x)$ 中考虑函数

$$F(y) = (a^2-\rho^2)\phi(y) = (a^2-\rho^2)\frac{|\nabla u|}{u},$$

其中 $\rho = d(y,x)$. $F|_{\partial B_a} = 0$, 如果有 $\nabla u \neq 0$, 则 F 必在 $B_a(x)$ 内部达到极大值. 在极大值点上 $\nabla u \neq 0$, 至于 $\nabla u = 0$ 的情况，则定理的结论自动成立.

设 $x_1 \in B_a(x)$ 为 $F(y)$ 的极大值点，如果 x_1 不是 x 的割点 ，则由极大值原理，有

$$\nabla F(x_1) = 0, \tag{1.3.10}$$

$$\Delta F(x_1) \leqslant 0. \tag{1.3.11}$$

在 x_1 点上， (1.3.10) 为

$$\frac{\nabla \rho^2}{a^2 - \rho^2} = \frac{\nabla \phi}{\phi}; \tag{1.3.12}$$

而 (1.3.11) 为

$$-\frac{\Delta \rho^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{2\nabla \rho^2 \cdot \nabla \phi}{(a^2 - \rho^2)\phi} \leqslant 0.$$

将 (1.3.12) 代入上式，得

$$0 \geqslant \frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{\Delta \rho^2}{a^2 - \rho^2} - \frac{2|\nabla \rho^2|^2}{(a^2 - \rho^2)^2}, \tag{1.3.13}$$

其中 $|\nabla \rho^2| = 2\rho|\nabla \rho| = 2\rho$. 再由比较定理 (系 1.2)，有

$$\begin{aligned} \Delta \rho^2 &= 2\rho\Delta\rho + 2|\nabla \rho|^2 \\ &= 2 + 2\rho\Delta\rho \\ &\leqslant 2 + 2(n-1)(1 + \sqrt{k}\rho) \\ &\leqslant C(1 + \sqrt{k}\rho), \end{aligned}$$

其中 C 为仅与 n 有关的常数. 将上述估计代入 (1.3.13) 并注意 (1.3.9) ，有

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2} \\ &\geqslant -(n-1)k - \left(2 - \frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{\phi u} \\ &\quad + \frac{1}{n-1}\phi^2 - \frac{C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2}. \end{aligned}$$

但在点 x_1 上，(1.3.12) 成立，所以

$$-\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{\phi u}=-\frac{2\rho\nabla\rho\cdot\nabla u}{(a^2-\rho^2)u}\geqslant-\frac{2\rho}{a^2-\rho^2}\phi,$$

$$\begin{aligned}0\geqslant&-(n-1)k-\frac{4(n-2)}{n-1}\frac{\rho}{a^2-\rho^2}\phi+\frac{1}{n-1}\phi^2\\&-\frac{C(1+k^{\frac12}\rho)}{a^2-\rho^2}-\frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2}.\end{aligned}$$

把上式两端乘以 $(a^2-\rho^2)^2$, 由于 $F=(a^2-\rho^2)\phi$, 则在 x_1 点上，得

$$\begin{aligned}0\geqslant&\frac{1}{n-1}F^2-\frac{4(n-2)}{n-1}\rho F\\&-C(1+k^{\frac12}\rho)(a^2-\rho^2)-8\rho^2-k(a^2-\rho^2)^2\\\geqslant&\frac{1}{n-1}F^2-2C_1aF-C(1+k^{\frac12}\rho)a^2\\&-8a^2-ka^4\\\geqslant&\frac{1}{n-1}F^2-2C_1aF-C_2(1+k^{\frac12}a)^2a^2,\end{aligned}$$

其中 C_1,C_2 为仅与 n 有关的常数. 因此

$$\begin{aligned}F(x_1)&=\sup_{B_a}F\\&\leqslant(n-1)\left[C_1a+\sqrt{C_1^2a^2+\frac{C_2}{n-1}a^2(1+k^{\frac12}a)^2}\right]\\&\leqslant C_n'a(1+k^{\frac12}a).\end{aligned}$$

因此，当限制在 $B_{a/2}(x)$ 中时，有

$$\frac34a^2\sup_{B_{a/2}(x)}\frac{|\nabla u|}{u}\leqslant C_n'a(1+k^{\frac12}a),$$

即

$$\sup_{B_{a/2}(x)}\frac{|\nabla u|}{u}\leqslant C_n\left(\frac{1+k^{\frac12}a}{a}\right).$$

此即 (1.3.1) 式.

4° 剩下惟一需要讨论的是 $F(y)=(a^2-\rho^2)\dfrac{|\nabla u|}{u}$ 的极大值点 x_1 如果正好落在 x 的割迹之中的情况. 通常讨论这类问题的方法是采用所谓“支撑 (support) 函数 ”的方法.

现设 $x_1 \in \mathrm{Cut}(x)$, 记 σ 为连接 x 和 x_1 的一条极小测地线（不一定惟一，但固定其中之一）. 根据割点的定义，$\sigma|_{[x,x_1]}$ 中任意内点都不是 x_1 的共轭点. 在 σ 上固定距 x 充分近的另一点 q. 记 $\varepsilon = \mathrm{dist}(x,q) = L(\sigma|_{[x,q]})$.

取测地线段 $\sigma|_{[q,x_1]}$ 的正则邻域 N_q. 使任何 $y \in N_q$ 都不是 q 的割点. $\forall y \in N_q$, 我们以 $\rho(y)$ 表示 y 相对于 x 的距离，而以 $\rho_q(y)$ 表示相对于 q 的距离，则由三角不等式，有

$$\begin{aligned} &\rho_q(y) + \varepsilon \geqslant \rho(y), \\ &\rho_q(x_1) + \varepsilon = \rho(x_1). \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

当 $y \in N_q$ 时，考虑函数

$$\widetilde{F}(y) = (a^2 - (\rho_q(y) + \varepsilon)^2)\frac{|\nabla u|}{u},$$

则由 (1.3.14)，$\widetilde{F}(y)$ 是我们在 3° 中讨论的函数 $F(y)$ 在 x_1 上的“支撑函数 ”，即满足

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}(y) \leqslant F(y), \\ &\widetilde{F}(x_1) = F(x_1). \end{aligned}$$

因为 $\rho_q(y)$ 在 x_1 的一个邻域是光滑的，所以我们可以对 $\widetilde{F}(y)$ 在 x_1 上应用极大值原理. 通过同样的讨论，得到 $\widetilde{F}(x_1)$ 的估计. 最后再令 $\varepsilon \to 0$, 即可完成证明.

系 3.1　完备 Riemann 流形，如果 Ricci 曲率 非负，则不存在非常数的正调和函数.

证明　在 (1.3.1) 中 $k=0$, 令 $a \to \infty$, 即得 $|\nabla u| \equiv 0$.

系 3.2　设 M 为 n 维完备 Riemann 流形. B_a 为 M 中任一半径为 a 的测地球，u 为 B_a 中的调和函数，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k$, 则

$$\sup_{B_{a/2}} |\nabla u| \leqslant C_n \left(\frac{1+k^{\frac{1}{2}}a}{a}\right) \sup_{B_a} |u|, \tag{1.3.15}$$

其中 C_n 是仅与 n 有关的常数.

证明 记 $A=\sup\limits_{B_a}|u|$, 则 $v=u+A+\varepsilon>0, \Delta v=0$,

$$\begin{aligned}\sup_{B_{a/2}}|\nabla u| &= \sup_{B_{a/2}}|\nabla v| \\ &\leqslant C_n\left(\frac{1+k^{\frac{1}{2}}a}{a}\right)\sup_{B_{a/2}}|u+A+\varepsilon| \\ &\leqslant 2C_n\left(\frac{1+k^{\frac{1}{2}}a}{a}\right)\sup_{B_a}|u|.\end{aligned}$$

系 3.3 (Harnack 不等式) 设 M 为 n 维完备 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -(n-1)k$. 如果 u 是测地球 B_a 中的调和函数, 且 $u>0$, 则

$$\sup_{B_{a/2}} u \leqslant C(n,a,k)\inf_{B_{a/2}} u, \tag{1.3.16}$$

其中 $C(n,a,k)$ 为仅依赖于 n,a,k 的常数.

证明 根据定理 3.1 , 有

$$\sup_{B_a}\frac{|\nabla u|}{u}\leqslant C(n,a,k).$$

取 $x_1,x_2\in B_{a/2}$, 使 $u(x_1)=\sup\limits_{B_{a/2}}u(x), u(x_2)=\inf\limits_{B_{a/2}}u(x)$ 以极小测地线 γ 连接 x_1,x_2, 则由三角不等式易知, γ 整个落在 B_a 之中, 因此

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{|\nabla u|}{u}ds &\leqslant C(n,a,k)\int_\gamma ds \\ &\leqslant 2aC(n,a,k).\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{|\nabla u|}{u} &\geqslant \left|\int_\gamma\frac{d\log u}{ds}\right| = \log\frac{u(x_1)}{u(x_2)}, \\ u(x_1) &= \sup_{B_{a/2}}u(x)\leqslant e^{aC(n,a,k)}u(x_2) \\ &= e^{aC(n,a,k)}\inf_{B_{a/2}}u(x).\end{aligned}$$

系 3.4 设 M 是完备非紧的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k(k\geqslant 0), u>0$ 是 M 上的调和函数, 则有

$$\frac{|\nabla u|}{u}\leqslant C(n,\sqrt{k}).$$

证明 利用 (1.3.1)，使 $a \geqslant 1$, 即得证.

系 3.5 设 M 是 n 维完备 Riemann 流形， $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k(k \geqslant 0)$, 如果 $\Delta u = \lambda u, u > 0, \lambda$ 为常数，则有

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda), \tag{1.3.17}$$

其中 $C(n, \sqrt{k}, \lambda)$ 为仅依赖于 n, k, λ 的常数.

1.4 具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形

本节将研究具非负 Ricci 曲率 的完备 Riemann 流形的若干问题，首先从这类流形的体积增长 问题开始.

当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 对于任何 $p \in M, M$ 中以 p 为中心、 R 为半径的测地球 $B_p(R)$ 的体积，根据体积比较定理 （即定理 1.3 ），有

$$\mathrm{Vol}\, B_p(R) \leqslant C_n R^n, \tag{1.4.1}$$

其中 C_n 仅与 n 有关.

而对于 $\mathrm{Vol}\, B_p(R)$ 的下界，则可以证明以下结果：

定理 4.1 设 M 为非紧的 n 维完备 Riemann 流形,

$$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0,$$

记 $B_p(R)$ 为 M 中以任意固定点 p 为中心、 R 为半径的测地球，则

$$\mathrm{Vol}\, B_p(R) \geqslant C(n, \mathrm{Vol}\, B_p(1))R, \tag{1.4.2}$$

其中 $C(n, \mathrm{Vol}\, B_p(1))$ 为仅依赖于 n 及 $\mathrm{Vol}\, B_p(1)$ 的常数.

证明 任意固定 $x_0 \in \partial B_p(R)$, 即 $d(p, x_0) = R$, 记 M 上相对于 x_0 的距离函数为 $\rho(x) = d(x, x_0)$, 因为有 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 由第 1 节的 (1.1.12)，在分布意义下

$$\Delta \rho^2 = 2\rho\Delta\rho + 2 \leqslant 2n,$$

即 $\forall \varphi \in C_0^\infty(M), \varphi \geqslant 0$, 有

$$\int_M \varphi \Delta \rho^2 \leqslant 2n \int_M \varphi. \tag{1.4.3}$$

用 $C_0^\infty(M)$ 函数来逼近具紧支集的 Lipschitz 连续函数，上式对具紧支集的 Lipschitz 连续函数依然成立. 现在令 $\varphi(x)=\psi(\rho(x))$, 其中 $\psi(t)$ 为如下形式：

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant R-1,\\ \dfrac{1}{2}(R+1-t), & R-1\leqslant t\leqslant R+1,\\ 0, & t\geqslant R+1.\end{cases}$$

显然， φ 是 Lipschitz 连续函数且 $\operatorname{supp}\varphi\subset B_{x_0}(R+1)$.

因为 Stokes 公式对 Lipschitz 函数仍然成立，所以

$$\begin{aligned}\int_M \varphi(x)\Delta\rho^2 &= -\int_{B_{x_0}(R+1)}\nabla\varphi\cdot\nabla\rho^2\\ &= -2\int_{B_{x_0}(R+1)}\psi'(\rho(x))\rho|\nabla\rho|^2\\ &= \int_{B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)}\rho\\ &\geqslant (R-1)\mathrm{Vol}\,[B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)].\end{aligned}$$

由 (1.4.3)，

$$\begin{aligned}(R-1)\mathrm{Vol}\,[B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)] &\leqslant 2n\int_M\varphi=2n\int_{B_{x_0}(R+1)}\varphi\\ &\leqslant 2n\int_{B_{x_0}(R+1)}1=2n\mathrm{Vol}\,B_{x_0}(R+1).\end{aligned}$$

但显然 $B_p(1)\subset B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)$, 因而

$$\begin{aligned}2n\mathrm{Vol}\,B_{x_0}(R+1) &\geqslant (R-1)\mathrm{Vol}\,[B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)]\\ &\geqslant (R-1)\mathrm{Vol}\,B_p(1).\end{aligned}$$

又显然 $B_p(2(R+1))\supset B_{x_0}(R+1)$, 因此

$$\begin{aligned}2n\mathrm{Vol}\,B_p(2(R+1)) &\geqslant (R-1)\mathrm{Vol}\,B_p(1),\\ \mathrm{Vol}\,B_p(2(R+1)) &\geqslant \frac{R-1}{2n}\mathrm{Vol}\,B_p(1).\end{aligned}$$

定理证毕.

系 4.1 具非负 Ricci 曲率的非紧完备 Riemann 流形具有无限体积 ([37]).

注 1 (1.4.1) 和 (1.4.2) 写在一起为:

$$C_nR^n \geqslant \mathrm{Vol}\, B_p(R) \geqslant C(n, \mathrm{Vol}\, B_p(1))R.$$

当 M 很像 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 或者 $\mathbb{R}^n$ 的锥时, $\mathrm{Vol}\, B_p(R) \sim R^n$; 而 M 类似于圆柱面时, $\mathrm{Vol}\, B_p(R) \sim R$. 例如 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱面 $X^2 + Y^2 = 1$, 其测地球的体积界于 $4\pi R \geqslant \mathrm{Vol}\, B(R) \geqslant 2\pi R$ 之间.

注 2 容易想到, 能否将 (1.4.2) 改进为

$$\mathrm{Vol}\, B_p(R) \geqslant CR,$$

即其中的 C 是否为一仅与 n 有关的常数? 一般而言, 这是不对的, Croke 曾给出例子, 表明: 存在完备的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric} \geqslant 0$, 但 $\inf_{x\in M}\mathrm{Vol}\, B_x(1) = 0$.

对于具非负截曲率的完备 Riemann 流形,基本的结构定理是 Cheeger-Gromoll 的下述定理 (可见 [10] , 第八章).

定理 设 M 是具非负曲率的完备 Riemann 流形, 则 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 中包含一有限正规子群 ϕ, 使 $\pi_1(M)/\phi$ 是 $\mathbb{R}^k(k \leqslant \dim M)$ 上的晶体运动解.

对于 Ricci 曲率 非负的完备 Riemann 流形, 其基本群的结构尚待研究. 主要的问题在于: 这样的流形是否是有限型 的 (finite type) ? 即 $\pi_1(M)$ 是否有限生成的?

Cheeger-Gromoll 在曲率 $\geqslant 0$ 时证明这一定理的方法大致如下: 在 M 上取测地射线 γ, 作关于 γ 的 Busemann 函数 B_γ, 因为曲率 $\geqslant 0$, 可以证明 B_γ 是凹的, 因而 $B = \inf\limits_{\gamma} B_\gamma$ 也是凹的, 不仅如此, 更重要的是证明 B 还是逆紧的 (proper) (所谓 $f : M \to \mathbb{R}$ 是逆紧的, 指对 $\mathbb{R}$ 的任何紧集 A, 其逆像 $f^{-1}(A)$ 也是紧的).

在 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$ 的情况下, 困难在于难以证明上述的 B 是逆紧的. 因此, 对 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 基本的问题是, 进一步了解函数 B, 或者构造一个较好的穷竭且上调和的函数. 换句话说, 能否用一串紧的、具正的平均曲率的超曲面来穷竭整个 M ?

在这一方面, 下述定理对解决这一问题或许有所帮助.

定理 4.2 设 M 是完备的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k(k \geqslant 0)$, 则 M 上存在一个逆紧的 $C^\infty(M)$ 函数 f, 满足:

$$|\nabla f| < C,\ f \geqslant C\rho, |\Delta f| < C.$$

其中 C 为常数, $\rho = \rho(x)$ 是 M 上对某固定点而言的距离.

证明 分以下几步:

1° 取定 $p \in M$, 对 p 而言的距离记作 $\rho(x)$, 以 p 为中心、 R 为半径的测地球记作 B_R, 对 $R > 1$, 在 $B_R \setminus B_1$ 中解以下的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta h_R(x) = \lambda h_R(x), \lambda\text{为某待定的正常数}, \\ h_R(x)|_{\partial B_R} = 0, \\ h_R(x)|_{\partial B_1} = 1. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

根据二阶椭圆型方程的理论, (1.4.4) 的光滑解 $h_R(x)$ 存在, 且满足极大值原理, 因此 $1 \geqslant h_R(x) \geqslant 0$, 并且在内部不取等号, 否则 $h_R(x)$ 将为常数, 与边界条件不合, 即

$$1 > h_R(x) > 0, \ x \in B_R \setminus B_1.$$

如果 $R_2 > R_1 > 1$, 则 $h_{R_2} - h_{R_1}$ 在 $B_R \setminus B_1$ 上, 满足

$$\begin{cases} \Delta(h_{R_2} - h_{R_1}) = \lambda(h_{R_2} - h_{R_1}), \\ (h_{R_2} - h_{R_1})|_{\partial B_1} = 0, \\ (h_{R_2} - h_{R_1})|_{\partial B_{R_1}} = h_{R_2}(x)|_{\partial B_{R_1}} > 0. \end{cases}$$

同样由极大值原理, $h_{R_2}(x) - h_{R_1}(x) > 0$, 因此, 对任何固定的 $x \in M \setminus B_1, \{h_R(x)\}_{R\to\infty}$ 是一单调递增的有界序列, 因而

$$h(x) = \lim_{R\to\infty} h_R(x)$$

存在. 取一列 $R_i \to \infty$. 令 $\Omega_i = R_i \setminus B_1$. 由 h_R 的一致有界性 ($0 \leqslant h_R \leqslant 1$), 利用椭圆方程的 L^p- 估计和 Schauder 估计就可以推出: 存在 $C(k,i) > 0$, 使得只要 $R \geqslant R_i + 1$ 就有 $||h_R||_{C^k(\overline{\Omega}_i)} \leqslant C(k,i)$. 因此, 用抽取对角线子列的办法就可以证明: 存在子列 $\{h_{R_{ii}}\}$ 在 $M \setminus B_1$ 的每个有界子域上 C^k 收敛于 h. 这说明 h 是光滑的, 并在 $M \setminus \overline{B_1}$ 上满足 $\Delta h = \lambda h, 0 \leqslant h \leqslant 1$, 以及 $h|_{\partial B_1} = 1$. 由极大值原理, 易见在 $M \setminus \overline{B_1}$ 内有 $0 < h < 1$.

2° 下面证明, $h(x) = O(e^{-C\rho(x)})$, 当 $\rho(x) \to \infty$.

取一待定常数 $C > 0$, 在 $B_R \setminus B_1$ 中分部积分并应用 Stokes 公式, 注意

$h_R|_{\partial B_R}=0$, 有

$$\begin{aligned}\int_{B_R\setminus B_1} e^{-C\rho(x)}h_R\Delta h_R &= \int_{\partial B_1} e^{C\rho(x)}h_R\frac{\partial h_R}{\partial r}-\int_{B_R\setminus B_1}\nabla(e^{C\rho(x)}h_R)\cdot\nabla h_R\\ &= e^C\int_{\partial B_1}\frac{\partial h_R}{\partial r}-C\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R\nabla h_R\cdot\nabla\rho\\ &\quad -\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}|\nabla h_R|^2.\end{aligned}$$

当 $x\in\partial B_1$ 时, $\dfrac{\partial h_R}{\partial r}=\nabla h_R\cdot\nabla r$, 由梯度估计 (1.3.17) ,

$$|\nabla h_R|\leqslant C(n,\sqrt{k},\lambda)|h_R|=C(n,\sqrt{k},\lambda),$$

因此上式中右端第一项是一致有界量 (对于 $R\geqslant 2$). 由 $\Delta h_R=\lambda h_R$, 得

$$\begin{aligned}\lambda\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R^2 &= \int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R\Delta h_R\\ &\leqslant \widetilde{C}+C\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}|\nabla h_R||\nabla\rho|\cdot h_R\\ &\quad -\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}|\nabla h_R|^2.\end{aligned}$$

因为 $|\nabla\rho|=1$, 再利用不等式

$$Ce^{C\rho(x)}|\nabla h_R|h_R\leqslant e^{C\rho(x)}\left(|\nabla h_R|^2+\frac{C^2}{4}h_R^2\right),$$

则

$$\lambda\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R^2\leqslant\widetilde{C}+\frac{C^2}{4}\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R^2,$$

即

$$\left(\lambda-\frac{C^2}{4}\right)\int_{B_R\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h_R^2(x)\leqslant\widetilde{C}.$$

设 $\lambda\geqslant\frac{C^2}{4}+1$. 令 $R\to\infty$, 得

$$\int_{M\setminus B_1}e^{C\rho(x)}h^2(x)\leqslant\widetilde{C}. \tag{1.4.5}$$

当 $\rho(x)$ 充分大时, 如果 $y\in B_x(1)$, 则由三角不等式

$$\rho(y)\geqslant\rho(x)-1,$$

由 (1.4.5)，有

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &\geqslant \int_M e^{C\rho}h^2 > \int_{B_x(1)} e^{C\rho(y)}h^2(y)\\ &\geqslant e^{C(\rho(x)-1)}\int_{B_x(1)} h^2(y).\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{B_x(1)} h^2(y) \leqslant \widetilde{C}e^{-C\rho(x)}. \tag{1.4.6}$$

注 B_R 一般不是光滑区域. 为此，可用光滑区域 D_R 代替 B_R, 并使得 $D_R \subseteq B_{R+1} \setminus B_R$. 上面的证明就同样成立.

由定理 3.1，有

$$\left|\frac{\nabla h}{h}\right| = |\nabla \log h| \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda).$$

所以，只要 $d(x,y) \leqslant 1$, 就有

$$|\log h(x) - \log h(y)| \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda).$$

由此，得

$$h(y) \geqslant C_1 h(x),$$

其中 $C_1 = \exp[-C(n, \sqrt{k}, \lambda)]$. 将上式代入 (1.4.6)，得

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{C}}{\operatorname{Vol} B_x(1)}e^{-C\rho(x)} &\geqslant \frac{1}{\operatorname{Vol} B_x(1)}\int_{B_x(1)} h^2(y)\\ &\geqslant \frac{C_1 h^2(x)}{\operatorname{Vol} B_x(1)}\int 1\\ &= C_1 h^2(x).\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

根据下列命题 4.3，存在常数 $C_2 > 0$ 使得 $\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant e^{-C_2\rho(x)}$. 因此，可选取常数 $C > C_2$, 使得 (1.4.7) 意味着 $h(x) = O(e^{-C_3\rho(x)})$, 其中 $C_3 = \dfrac{1}{2}(C - C_2)$.

3° 令 $f(x) = (1-\eta(x))\log h(x) + \eta(x)$, 其中 $\eta \in C^\infty(M)$ 是一截断函数，使得在 $\overline{B}_1$ 上 $\eta(x) \equiv 1$, 在 $M \setminus B_2$ 上 $\eta(x) \equiv 0$, 并且 $0 < \eta(x) < 1, \forall x \in B_2 \setminus \overline{B}_1$. 则 f 即为满足定理条件之函数，这是因为:

(a) 由 $h \leqslant Ae^{-C_3\rho}$, 对于 $\rho > 2$, 得 $f = -\log h \geqslant C_3\rho - \log A$, 因而 f 是逆紧的;

(b) $|\nabla f| = |\nabla \log h| \leqslant$ 常数，当 $\rho > 2$ 时，这是梯度估计系 3.5；而当 $\rho \leqslant 2$ 时，$|\nabla f|$ 显然有界.

(c) 当 $\rho(x) > 2$ 时，$\Delta f = -\dfrac{\Delta h}{h} + |\nabla \log h|^2 = -\lambda + |\nabla \log h|^2 \leqslant$ 常数成立，另一方面，当 $\rho(x) \leqslant 2$ 时，Δf 总是有界的. 定理证毕.

现在我们给出定理证明中用到的一个命题:

命题 4.3 对于完备 Riemann 流形 M, 若 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k$, 则存在常数 C（与 $n, k, \mathrm{Vol}\, B_{x_0}(1)$ 有关），使

$$\mathrm{Vol}\, B_x(1) \geqslant e^{-C\rho(x)},$$

其中 $\rho(x)$ 为 M 上对某一固定点 p 而言的距离.

证明 任取 $x \in M$. 记从 x 计算的距离函数为 σ,

$$\sigma(y) = d(x, y),$$

把以 x 为中心、t 为半径的测地球记作 $B_x(t)$. 首先说明，当 $C \geqslant \dfrac{\sqrt{k}}{2}$ 时，函数

$$t^{-n}e^{-Ct}\mathrm{Vol}\, B_x(t)$$

是 $t \geqslant 0$ 的递降函数.

由 (1.1.8) 和 (1.1.12)，当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k$ 时，在分布意义下有

$$\Delta\sigma^2 \leqslant 2n + \sqrt{k}\sigma.$$

因此，对 $\forall t > 0$, 有

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 \leqslant \int_{B_x(t)} 2n + \sqrt{k}\int_{B_x(t)} \sigma, \tag{1.4.8}$$

而

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 = \int_{\partial B_x(t)} \frac{\partial \sigma^2}{\partial r} = 2t\mathrm{Vol}\,(\partial B_x(t)).$$

但由 Co-Area 公式

$$\mathrm{Vol}\,(\partial B_x(t)) = \left.\frac{\partial \mathrm{Vol}\, B_x(\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=t}.$$

(1.4.8) 的右端两项分别有

$$\int_{B_x(t)} 2n = 2n\operatorname{Vol} B_x(t),$$

$$\sqrt{k}\int_{B_x(t)} \sigma \leqslant t\sqrt{k}\operatorname{Vol} B_x(t).$$

如果令 $V(t)=\operatorname{Vol} B_x(t)$, 则 (1.4.8) 成为

$$t\frac{dV}{dt} \leqslant \left(n+\frac{\sqrt{k}}{2}t\right)V.$$

对于 $C \geqslant \dfrac{\sqrt{k}}{2}$,

$$t\frac{dV}{dt} \leqslant nV + CtV.$$

即有

$$\frac{d}{dt}(t^{-n}e^{-Ct}V(t)) \leqslant 0. \tag{1.4.9}$$

于是，当 $t \geqslant 1$ 时，有

$$e^{-C}\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant t^{-n}e^{-Ct}\operatorname{Vol} B_x(t).$$

取 $t=d(x,x_0)+1=\rho(x)+1$, 则

$$e^{-C}\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant (\rho(x)+1)^{-n}e^{-C(\rho(x)+1)}\operatorname{Vol} B_x(\rho(x)+1).$$

但明显有 $B_{x_0}(1) \subset B_x(\rho(x)+1)$. 因而,

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B_x(1) &\geqslant (\rho(x)+1)^{-n}e^{-C\rho(x)}\operatorname{Vol} B_x(1)\\ &\geqslant e^{-\hat{C}\rho(x)},\end{aligned}$$

其中 $\hat{C}$ 为与 $n,k,\operatorname{Vol} B_{x_0}(1)$ 有关的常数．证毕.

第 二 章　负曲率流形上的调和函数

关于完备 Riemann 流形上调和函数论的研究, 一方面对一些经典的情况(单位圆、 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称域) 已经有了众多的丰富的成果 (例如, 关于单位圆的 Herglotz 理论 , $\mathbb{R}^n$ 中有界域上调和函数的 Martin 表示, 有界 对称域调和函数的 Hua, Fürsteuberg 理论等). 另一方面, 对于一般的完备 Riemann 流形上的调和函数的研究只是 20 世纪 80 年代才有了较大的进展, 对于不加曲率条件的一般的完备 Riemann 流形, S. T. Yau 证明, 不存在属于 $L^p(1<p<\infty)$ 的调和函数. 对于 $p=+\infty$, 即有界调和函数的存在性, 则受流形曲率的很大制约. S. T. Yau 证明, 对具非负 Ricci 曲率 的完备 Riemann 流形, 不存在非常数的有界的调和函数(第一章第 3 节). 虽然人们早就猜测, 当完备流形的曲率 K_M 满足: $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0(a, b$为常数$)$ 时, 应该存在有界的调和函数, 但这一事实直到 20 世纪 80 年代中期才由 Anderson 及 Sullivan 加以证实. 他们证明, 如果完备 Riemann 流形具有负曲率 $K_M, -b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$, 那么 M 可通过赋加一“无限远边界” (sphere at infinity)$S(\infty)$ 而紧致化. 对于带边界的流形 $\overline{M} = M \cup S(\infty)$, 满足预先给定的连续边界值 (在 $S(\infty)$ 上给定) 的调和函数的 Dirichlet 问题可解. 本章第 1 节将对这一事实给出一个简单的证明.

以单位圆 (其 Poincaré 度量 的曲率 $\equiv -1$) 的调和函数论和 Martin 关于有

界域中调和函数的经典工作为背景，在负曲率流形上可以通过 Green 函数 的边界性状定义 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 和 Poisson 核 . 在 Anderson 和 R. Schoen 的工作中对此进行了详尽的研究 ([2])，证明了 M 的几何边界 $S(\infty)$ 和 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 之间可以建立一个自然的同胚以及通过用 Poisson 核表示调和函数的 Martin 表示公式. 这些构成本章的 2～4 节.

在第 5 节中，我们对满足曲率条件 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$ 的完备 Riemann 流形 M 上的有界调和函数的存在性，证明两个结果. 最后，在第 6 节中，我们讨论次调和函数的平均值不等式，由此得出有界调和函数的某些 Liouville 型定理 .

2.1 几何边界 $S(\infty)$ 及 Dirichlet 问题的可解性

本节始终假定 M 是单连通的、完备的 n 维 Riemann 流形，其截曲率满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$. 以 $-b^2$ 和 $-a^2$ 为常曲率的 (单连通) 空间形式记作 $H(-b^2)$ 和 $H(-a^2)$. 根据 Cartan-Hadamard 定理 ，对 M 的任何一点 p, 指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$ 都是微分同胚，即 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$. 并且任意两点 $A, B \in M$ 确定一条连接它们的惟一测地线，用 AB 表示. 若 A,B,C 是 M 上三点，则可作测地三角形 $\triangle ABC$ 以及角 $\angle A, \angle B, \angle C$. 例如， $\angle A$ 就是测地线段 AB 和 AC 之间的角. 我们将需要下列经典的 Rauch-Topologov 比较定理.

Rauch 比较定理 如果 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$, 任取一点 $O \in M, M$ 上相对 O 的距离记作 ρ, 则

$$\begin{aligned}(a\coth(a\rho))(g - d\rho\otimes d\rho) &\leqslant D^2\rho \\ &\leqslant b\coth(b\rho)(g - d\rho\otimes d\rho),\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

其中 g 表示 M 的 Riemann 度量张量.

Topologov 比较定理 设 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$, 在 $H(-b^2), M, H(-a^2)$ 中分别有测地三角形 $\triangle A'B'C' \subset H(-b^2), \triangle ABC \subset M, \triangle A''B''C'' \subset H(-a^2)$. 如果 $|A'B'| = |AB| = |A''B''|, |B'C'| = |BC| = |B''C''|, |C'A'| = |CA| = |C''A''|$, 则

$$\angle A' \leqslant \angle A \leqslant \angle A''. \tag{2.1.2}$$

类似地，如果 $|A'B'| = |AB| = |A''B''|, |A'C'| = |AC| = |A''C''|, \angle A' = \angle A =$

$\angle A''$, 则

$$|B'C'| \geqslant |BC| \geqslant |B''C''|. \tag{2.1.3}$$

简而言之，曲率越小，则夹角越小，而对边长则越大.

为了给出精确的估计，我们需要计算常负曲率空间形式中的边角关系.

考虑标准的曲率为常数 -1 的空间单位圆 $D : \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. 其度量为 Poincaré 度量

$$ds^2 = \frac{4|\,dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

按此度量计算的 $z_1, z_2 \in D$ 的双曲距离记作 $\rho(z_1, z_2)$. 于是，如果 $|z| = r < 1$, 则

$$\rho(0, z) = \int_0^r \frac{2\,dt}{1-t^2} = \log \frac{1+r}{1-r}. \tag{2.1.4}$$

双曲等距变换 $z \mapsto \dfrac{z-r}{1-rz}$ 使 $z = r$ 变为 0， $z = re^{i\theta}$ 变为 $\dfrac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}$. 所以

$$\begin{aligned} \rho(r, re^{i\theta}) &= \rho\left(0, \frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right) \\ &= \log \frac{1+\left|\frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right|}{1-\left|\frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right|}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

记 $\rho(r, re^{i\theta}) = s$, 则

$$\begin{aligned} \left|\frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right| &= \frac{e^s-1}{e^s+1} \\ &= \frac{\operatorname{sh}\dfrac{s}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{s}{2}} = \tanh\frac{s}{2}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

类似地，在 (2.1.4) 中如记 $\sigma = \rho(0, r)$, 则

$$r = \frac{e^\sigma-1}{e^\sigma+1} = \tanh\frac{\sigma}{2}.$$

将 (2.1.6) 变形为

$$\frac{2r^2-2r^2\cos\theta}{1+r^4-2r^2\cos\theta} = \left(\tanh\frac{s}{2}\right)^2,$$

$$\frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2-4r^2\cos\theta}=\frac{1-\tanh^2\dfrac{s}{2}}{1+\tanh^2\dfrac{s}{2}}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{ch}s}.$$

由 $r=\tanh\dfrac{\sigma}{2}$ 得 $1+r^2=\dfrac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}^2\frac{\sigma}{2}}$, $1-r^2=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\sigma}{2}}$ 代入上式，得

$$\cos\theta\operatorname{sh}^2\sigma=\operatorname{ch}^2\sigma-\operatorname{ch}s. \tag{2.1.7}$$

(2.1.7) 就是 $D=H(-1)$ 中等腰三角形的腰长 σ 、底边长 s 及顶角 θ 之间的关系式.

通过类似但稍复杂一点的计算，在空间形式 $H(-a^2)$ 中的三角形边角关系为：对于 $H(-a^2)$ 中的测地三角形 $\triangle ABC$, 如果记 $d(A,B)=r, d(A,C)=\sigma, d(B,C)=s$, 而 $\theta=\angle A$, 则有

$$\cos\theta\operatorname{sh}ar\operatorname{sh}a\sigma=\operatorname{ch}ar\operatorname{ch}a\sigma-\operatorname{ch}as. \tag{2.1.8}$$

于是，根据 Rauch-Topologov 比较定理，我们可有以下命题：

命题 1.1 设 M 为单连通、完备的 Riemann 流形，其曲率 K_M 满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$. 对于 M 中的测地三角形 $\triangle ABC$, 如果记 $\rho(A,B)=r,\rho(A,C)=\sigma,\rho(B,C)=s,\angle A=\theta$, 则

$$\cos\theta\geqslant\coth ar\coth a\sigma-\frac{\operatorname{ch}as}{\operatorname{sh}ar\operatorname{sh}a\sigma}, \tag{2.1.9}$$
$$\cos\theta\leqslant\coth br\coth b\sigma-\frac{\operatorname{ch}bs}{\operatorname{sh}br\operatorname{sh}b\sigma}. \tag{2.1.10}$$

命题 1.2 设 M 是单连通、完备曲率 K_M 满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$ 的流形. O,x_1,x_2 为 M 中三点，设 $r=\rho(O,x_1)=\rho(O,x_2)$. 记由 O 至 x_1 的测地射线为 γ_1, 由 O 至 x_2 的测地射线为 γ_2, γ_1 和 γ_2 在点 O 的夹角为 θ, 则当 r 充分大， θ 适当小时，有

$$2r+\frac{2}{a}(\ln\theta-1)\leqslant\rho(x_1,x_2)$$
$$\leqslant 2r+\frac{2}{b}(\ln\theta+1). \tag{2.1.11}$$

证明 在 (2.1.9) 中令 $\sigma = r, s = \rho(x_1, x_2)$, 则有

$$
\begin{aligned}
\cos\theta\,\mathrm{sh}^2 ar &\geqslant \mathrm{ch}^2 ar - \mathrm{ch} as,\\
\mathrm{ch}\, as - 1 &\geqslant \mathrm{sh}^2 ar(1-\cos\theta),\\
4\mathrm{sh}^2\frac{as}{2} &\geqslant \mathrm{sh}^2 ar\cdot 2(1-\cos\theta).
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

任取 c, 满足 $1 < c < \dfrac{e}{2}$, 则易知

$$
\begin{aligned}
2c^2(1-\cos\theta) &\geqslant \theta^2, \qquad \text{当}\,\theta\,\text{充分小时},\\
e^{ar} - e^{-ar} &\geqslant \frac{2c}{e}e^{ar}, \ \text{当}\,r\,\text{充分大时}.
\end{aligned}
$$

后一式即 $\mathrm{sh}\, ar \geqslant ce^{ar-1}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sh}^2 ar\cdot 2(1-\cos\theta) &= \frac{1}{c^2}\mathrm{sh}^2 ar\cdot 2c^2(1-\cos\theta)\\
&\geqslant e^{2(ar-1)}\theta^2.
\end{aligned}
$$

此时 (2.1.12) 成为

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{sh}^2\frac{as}{2} &\geqslant e^{2(ar-1)}\theta^2,\\
2\ln(e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}}) &\geqslant 2(ar-1) + 2\ln\theta.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
as &\geqslant 2ar + 2(\ln\theta - 1),\\
s &\geqslant 2r + \frac{2}{a}(\ln\theta - 1).
\end{aligned}
$$

(2.1.11) 的左端得证，同理应用 (2.1.10) 可得右端的估计.

现在就可以来定义负曲率流形的几何边界 —— “无限远球面 ” $S(\infty)$.

设 M 是单连通、完备的负曲率流形，由 Cartan-Hadamard 定理 ，从流形上任一点出发的切向量都惟一地定义了一条测地射线 γ. 两测地射线 γ_1 和 γ_2 称为等价的， $\gamma_1 \sim \gamma_2$, 如果

$$
\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant \text{常数}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.1.13}
$$

定义 M 的“无限远球面” $S(\infty)$ 为

$$
S(\infty) = \text{测地射线的集合}/\sim.
$$

如果取同一点作为测地射线的始点， $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, 则 $\gamma_1 \sim \gamma_2$ 当且仅当 $\gamma_1 = \gamma_2$, 这是因为由 (2.1.11) ,

$$2t + \frac{2}{a}(\ln\theta - 1) \leqslant \text{常数}. \tag{2.1.14}$$

当 $t \to \infty$ 时， $\theta = 0$. 因此，从几何上说， $S(\infty) =$ 由一点出发的全体测地射线 $= T_O M$ 中的单位球面 S_O.

任取 $O \in M, v \in T_O M$, 定义以 v 为中心、角度为 δ 的锥 $C_O(v,\delta)$ 如下:

$$C_O(v,\delta) = \{x \in M | \angle(v, T_{\overline{Ox}}) < \delta\}, \tag{2.1.15}$$

其中 $\angle(v, T_{\overline{Ox}})$ 是 v 和连接 O 与 x 的射线之间的夹角. 又以 $B_O(R)$ 记以 O 为中心、 R 为半径的测地球，我们称

$$T_O(v,\delta,R) = C_O(v,\delta) \setminus B_O(R) \tag{2.1.16}$$

为截锥，则全体

$$\{T_O(v,\delta,R); B_q(r), q \in M\}$$

给出了 $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ 的锥拓扑 的一个拓扑基. 这种拓扑给出了 M 的一个紧化.

命题 1.3 以上定义的 $S(\infty)$ 的拓扑结构是 C^α 的，这里 $\alpha = a/b$.

证明 设 $x_1, x_2 \in M$ 是定义 $S(\infty)$ 的不同的基点，在同胚的意义下， $S_{x_1} \simeq S(\infty) \simeq S_{x_2}$, 其中 $S_{x_i}(i = 1,2)$ 是 $T_{x_i}M$ 中的单位球面，设 $w, v \in S_{x_1}, \theta = \angle(v,w)$. 如果 $\gamma_v(t), \gamma_w(t)$ 是以 v, w 为始点方向的射线，则由 (2.1.11) ，当 t 充分大时，有

$$\rho(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) \leqslant 2t + \frac{2}{b}(\ln\theta + 1).$$

如果令 $\widetilde{\theta}_t$ 记 $\gamma_v(t), \gamma_w(t)$ 对 x_2 所张的视角，则仍由 (2.1.11) ，当 t 充分大时，有

$$\frac{2}{a}(\ln\widetilde{\theta}_t - 1) \leqslant \rho(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) - 2t + \text{常数},$$

上式中常数仅依赖于 x_1, x_2. 因此

$$\widetilde{\theta}_t \leqslant C_1\theta^{a/b}. \tag{2.1.17}$$

令 $t \to \infty$, 就给出了映射 $S_{x_1} \to S(\infty) \to S_{x_2}$ 是 C^α 的,

$$\alpha = a/b.$$

现在我们转向 M 上调和函数 Dirichlet 问题的讨论.

下面是本节的主要结果，它给出了调和方程 Dirichlet 问题的可解性.

定理 1.1 设 M 是单连通、 n 维、完备的 Riemann 流形，曲率 K_M 满足： $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$, 任给 $\varphi \in C^0(S(\infty))$, 则存在惟一的调和函数 $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$, 使 $u|_{S(\infty)} = \varphi$.

证明 固定基点 $O \in M$, 并将 $S(\infty)$ 和 T_OM 中的单位球面 $S_O(1) = S^{n-1}$ 等同起来. 因为 $S_O(1)$ 上任何连续函数可用光滑函数一致逼近，而极大值原理又保证：如果调和函数列 $\{u_k \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})\}$ 在 $S(\infty)$ 上一致收敛的话，则 u_k 也在 $\overline{M}$ 上一致收敛到调和函数，因此无妨假定 $\varphi \in C^\infty(S_O(1))$.

因为 $K_M \leqslant -a^2$, 指数映射 $\exp_O : T_OM \to M$ 是微分同胚. 记 $\{(r,\theta)|\theta \in S_O(1) = S^{n-1}\}$ 为 O 点的正规极坐标 ，则 φ 可写作 $\varphi = \varphi(\theta), \theta \in S_O(1)$. 将 φ 沿径向扩充至 $M \setminus \{0\}$, 即令

$$\varphi(r,\theta) = \varphi(0), \quad \forall r > 0.$$

扩充后的函数仍记为 φ, 则 φ 是 $M \setminus \{0\}$ 上的有界光滑函数.

引进记号 $\operatorname{osc}_{B_x(1)} \varphi = \sup\limits_{y \in B_x(1)} |\varphi(y) - \varphi(x)|$ 表示 φ 在测地球 $B_x(1)$ 上的振幅.

定理的证明分以下几步:

1° $\operatorname{osc}_{B_x(1)} \varphi = O(e^{-a\rho(x)})$, 其中 $\rho(x)$ 表示对基点 O 的距离函数.

根据 φ 的定义，当 $y \in B_x(1)$ 时,

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = |\varphi(\theta') - \varphi(\theta)| \leqslant C|\theta' - \theta|,$$

其中 θ', θ 分别是 y 和 x 测地球面坐标. 由命题 1.2 可得

$$2\rho(x) + \frac{2}{a}(\ln(\theta' - \theta) - 1) \leqslant \rho_x(y) \leqslant 1,$$

即有

$$|\theta' - \theta| \leqslant C_1 e^{-a\rho(x)},$$

其中 C_1 仅依赖于 a, 因此

$$\operatorname{osc}_{B_x(1)} \varphi \leqslant C e^{-a\rho(x)}, \tag{2.1.18}$$

其中 C 是仅依赖于 a, φ 的常数.

2° 对 φ 进行平均化, $\varphi \to \widetilde{\varphi}$, 使 $\Delta\widetilde{\varphi} = O(e^{-a\rho(x)})$. 取

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 1 \geqslant \chi \geqslant 0,$$

其中

$$\begin{aligned}&\chi(t) = 0, \ \text{当}\ |t| \geqslant 1,\\ &\chi(t) = 1, \ \text{当}\ |t| \leqslant 1/2.\end{aligned}$$

令

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\int_M \chi(\rho_x^2(y))\varphi(y)\,dy}{\int_M \chi(\rho_x^2(y))\,dy},$$

则有

$$\begin{aligned}|\widetilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| &= \frac{\left|\int_{B_x(1)} \chi(\rho_x^2(y))(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy\right|}{\int_{B_x(1)} \chi(\rho_x^2(y))\,dy}\\ &\leqslant \sup_{B_x(1)} |\varphi(y) - \varphi(x)|\\ &= \operatorname{osc}_{B_x(1)} \varphi - O(e^{-a\rho(x)}).\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

同时

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{\varphi}(x_0) &= \Delta(\widetilde{\varphi}(x) - \varphi(x_0))|_{x=x_0}\\ &= \int_M \Delta\left(\frac{\chi(\rho_y^2(x))}{\int_M \chi(\rho_y^2(x))\,dy}\right)(\varphi(y) - \varphi(x_0))\,dy|_{x=x_0}.\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

直接计算

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\Delta u \cdot v - 2Du \cdot Dv - u\Delta v}{v^2} + \frac{2u}{v^3}|Dv|^2,$$

此处 $u = \chi(\rho_y^2(x)), v = \int_M \chi(\rho_y^2(x))\,dy$. 下面以 ρ 表示 $\rho_y(x)$, 得

$$\nabla u = \chi'(\rho^2) \cdot 2\rho\nabla\rho,$$

$$\Delta u = 4\rho^2\chi''(\rho^2)|\nabla\rho|^2 + 2\chi'(\rho^2)|\nabla\rho|^2 + 2\rho\chi'(\rho^2)\Delta\rho.$$

如果 $K_M \geqslant -b^2$, 则由第一章的系 1.2 ，当 $\rho = \rho_y(x) \leqslant 1$ 时， $\rho\Delta\rho \leqslant$ 常数. 至于 $\nabla u, \Delta u$ 中的其他各项，当 $\rho \leqslant 1$ 时， $|\nabla u|$ 和 $|\Delta u|$ 是有限的. 同理对 $\nabla v, \Delta v$ 也如此. 另一方面，由体积比较定理（见第一章 (1.1.20) 式），当 $K_M \leqslant 0$ 时，$\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant$ 常数. 因此

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_M \chi(\rho_x^2(y))\,dy = \int_{B_x(1)} \chi(\rho_x^2(y))\,dy \\ &\geqslant \operatorname{Vol} B_x\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \text{常数}. \end{aligned}$$

总结以上所述， $\left|\Delta\left(\frac{u}{v}\right)\right|$ 有界，代入 (2.1.20) ，即得

$$|\Delta\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant \text{常数} \cdot \operatorname{osc}_{B_x(1)} \varphi = O(e^{-a\rho(x)}). \tag{2.1.21}$$

3°　考虑 $C^\infty(M)$ 函数 $g = e^{-\delta\rho(x)}$. 易知,

$$\Delta g = -\delta e^{-\delta\rho(x)}\Delta\rho + \delta^2 e^{-\delta\rho(x)}|\nabla\rho|^2. \tag{2.1.22}$$

而当 $K_M \leqslant -a^2$ 时，由比较定理,

$$\begin{aligned} \Delta\rho &\geqslant (n-1)a\coth a\rho \\ &\geqslant (n-1)a = C_1 > 0. \end{aligned}$$

C_1 是仅与 n, a 有关的正常数. 因此，由 (2.1.22) ,

$$\Delta g \leqslant e^{-\delta\rho(x)}(\delta^2|\nabla\rho|^2 - \delta C_1) < 0, \tag{2.1.23}$$

只要 δ 充分小.

因为 $\Delta\widetilde{\varphi} = O(e^{-\delta\rho(x)})$, 只要 δ 充分小，由 (2.1.23) ，我们可以找到常数 C, 使

$$\Delta(Cg) \leqslant -|\Delta\widetilde{\varphi}|,$$

即 $\Delta(\widetilde{\varphi} + Cg) \leqslant 0, \Delta(\widetilde{\varphi} - Cg) \geqslant 0$.

根据经典调和函数论的 Perron 方法 ，$\widetilde{\varphi}+Cg$ 和 $\widetilde{\varphi}-Cg$ 可以作为保证调和函数存在的闸 (barrier) 函数 . 即存在函数 u, 使 $\Delta u = 0$, 而 $\widetilde{\varphi}-Cg \leqslant u \leqslant \widetilde{\varphi}+Cg$.

此 u 满足边界条件，这是因为,

$$\begin{aligned}|u-\varphi|(x) &\leqslant |u-\widetilde{\varphi}+\widetilde{\varphi}-\varphi|(x)\\ &\leqslant Cg(x)+|\widetilde{\varphi}-\varphi|(x)\\ &\leqslant Ce^{-\delta\rho(x)}+O(e^{a\rho(x)})\\ &\to 0\ (\text{当}\rho(x)\to\infty\text{时}).\end{aligned}$$

这里用到 (2.1.19). 定理证毕.

2.2 Harnack 不等式与 Poisson 核

设 M 是单连通、完备的 n 维 Riemann 流形， $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$. 固定基点 $O\in M$, 相对 O 的距离函数记作 $\rho(x)$. 因为 M 是负曲率流形， $\rho(x)$ 是 M 上的光滑函数. 在上节中，我们已经见到

$$\Delta e^{-K\rho(x)}=e^{-K\rho(x)}K(K|\nabla\rho|^2-\Delta\rho).$$

由 (2.1.23) 知，当 K 充分小时， $\Delta e^{-K\rho(x)}<0$. 当 K 充分大时，由第一章系 1.2, 对于 $\rho\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\Delta\rho &\leqslant \frac{n-1}{\rho}(1+b\rho)\\ &\leqslant (b+1)(n-1).\end{aligned}$$

因此，当 $\rho\geqslant 1$ 时， $\Delta e^{-K\rho(x)}>0$. 总之，只要 δ 充分小， $e^{-\delta\rho(x)}$ 与 $e^{-\frac{1}{\delta}\rho(x)}$ 分别为 M 上的整体上调和 (super harmonic) 函数与次调和 (subharmonic) 函数，因而， M 是双曲流形 ，即它具有整体 Green 函数 $G(x,y)$ (见本章附录定理 A.1)，满足

1° $G(x,y)=G(y,x)$. 当 y 固定时,
$\Delta_x G(x,y)=0,\forall\, x\neq y.$

2° $G(x,y)\geqslant 0.$

3°

$$G(x,y)\sim\begin{cases}\rho_y^{2-n}(x), n>2\\ \log\frac{1}{\rho_y(x)}, n=2,\end{cases}\quad \text{当}\,x\to y\,\text{时}.$$

任意固定 y, 令

$$\sup_{x\in B_y(1)} G(x,y)e^{\delta\rho_y(x)} = C_1,$$
$$\sup_{x\in B_y(1)} G(x,y)e^{\frac{1}{\delta}\rho_y(x)} = C_2,$$

因为

$$C_1\Delta e^{-\delta\rho_y} < \Delta G = 0 < C_2\Delta e^{-\frac{1}{\delta}\rho_y},$$
$$C_1 e^{-\delta\rho_y} \geqslant G \geqslant C_2 e^{-\frac{1}{\delta}\rho_y}, \text{ 在}\,\partial B_y(1),$$

则由上（次）调和函数的极大值原理 ，得

$$\begin{aligned} C_2 e^{-\frac{1}{\delta}\rho_y(x)} &\leqslant G(x,y) \\ &\leqslant C_1 e^{-\delta\rho_y(x)}, \quad \forall x\in M\setminus B_y(1). \end{aligned}$$

因而，当 y 固定时， $G(x,y)\to 0$(当$\rho_y(y)\to\infty$ 时). 这样， $G(x,y)$ 就可以连续拓展到 $\overline{M}\setminus\{y\}, G(x,y)|_{S(\infty)} = 0$.

固定基点 $O\in M$. 固定 $y\in M, y\neq O$. 考虑

$$h_y(x) = \frac{G(x,y)}{G(O,y)}, \tag{2.2.1}$$

它是一个正调和函数， $h_y(O)=1$, 具有惟一的极点 y. 我们可以称之为在基点 O 正规化的正调和函数. 如果我们有一族在点 O 正规化的正调和函数 $\{h_{y_i}(x)\}$, 其极点 $y_i\to\xi\in\partial\overline{M} = S(\infty)$. 我们希望能证明这一族调和函数列 $\{h_{y_i}(x)\}$ 收敛到 M 上一个正调和函数，它在 $S(\infty)\setminus\xi$ 上连续地为零，由此可以得出 Poisson 核的存在与 Martin 边界 的概念. 而要证明这一点，关键是要证明 $\{h_{y_i}(x)\}$ 在 $S(\infty)\{\xi\}$ 中的任一点的一个邻域（按 (2.1.16)， $S(\infty)$ 中点的邻域即为截锥）是一致有界的. 保证这一点的是下面两个具有 Harnack 型的定理. 它们的证明将放在本章的第 4 节.

固定基点 $O\in M$. 以单位切向量 $V\in S_O(1)\subset T_OM$ 为中心向量、角宽为 δ 的锥 $C_O(V,\delta)$（定义见 (2.1.15)）简记为 $C(\delta)$, 截锥 $T_O(V,\delta,R)$（定义见 (2.1.16)）简记为 $T(\delta,R)$, 按定义， $T(\delta,R)$ 是 $V\in S_O(1)\simeq S(\infty)$ 的一个邻域，又记

$$O' = \exp_O(v),$$

它是截锥 $T(\delta,1)$ 的“顶点”.

定理 2.1 如果 h 是定义在 $C(\pi/4)$ 上的正调和函数，它在 $\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)$ 上连续地变到零，则有估计

$$\sup_{x\in T(\frac{\pi}{8},1)} h(x)\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}h(O'), \tag{2.2.2}$$

其中 $O'=\exp_O(v)$ 是 $T(\dfrac{\pi}{8},1)$ 的顶点，而 C_1,C_2 为仅依赖于 n,a,b 的常数.

定理 2.2 设 u,v 是定义在锥 $C(\pi/4)$ 上的正调和函数，连续到 $\partial C(\pi/4)$，并在 $\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)$ 上连续地变为零，则我们有

$$C_1^{-1}\frac{u(O')}{v(O')}\leqslant\frac{u(x)}{v(x)}\leqslant C_1\frac{u(O')}{v(O')}, \tag{2.2.3}$$

$\forall x\in T(\pi/8,1),O'=\exp_O(V)$, 其中 C_1 为仅依赖于 n,a,b 的常数.

我们将首先应用这两个定理证明 Poisson 核的存在性、惟一性及研究它的性质. 而它们的证明则放在本章的第四节.

定义 M 上的调和函数 $P_\xi(x)$ 称为 $\xi\in S(\infty)$ 的在 O 点正规化的 Poisson 核函数，如果它满足:

1° $P_\xi(x)>0,\forall x\in M$,

2° $P_\xi(0)=1$,

3° $P_\xi(x)\in C^0(\overline{M}\setminus\{\xi\})$,并且$P_\xi(x)|_{S(\infty)\setminus\{\xi\}}=0$.

命题 2.3 对任何 $\xi\in S(\infty)$, Poisson 核函数存在.

证明 设 $h_y(x)$ 是在基点 O 正规化的以 y 为极点的正调和函数，如 (2.2.1) 所定义. 令 $\{y_k\}$ 为一序列，使得 $y_k\to\xi\in S(\infty)$. 我们要证明，沿一子序列 h_{y_k} 收敛于一 Poisson 核 P_ξ.

(1) 首先注意, 若 $C(\pi/4)=C_O(v,\pi/4)$ 是 $v\neq\xi$ 的锥, 即 $\xi\in\overline{C}(\pi/4)\cap S(\infty)$, 则当 k 充分大时，h_{y_k} 是 $C(\pi/4)$ 上的正调和函数，满足定理 2.1 的假设条件. 根据 Harnack 不等式 ，因为 $h_{y_k}(O)=1,O'=\exp_O(v)$, 故 $h_{y_k}(O')\leqslant C$（常数）. 从 (2.2.2) 得

$$h_{y_k}(x)\leqslant C_3e^{-C_2\rho(x)},\ 当x\in T(\pi/8,1). \tag{2.2.4}$$

(2) 其次, 根据 $h_{y_k}(O)=1$ 和 Harnack 不等式, 对于每个正整数 $m,\rho(x)<m$ 和满足 $\rho(y_k)>m$ 的一切充分大的 k（例如，$k\geqslant k(m)$），我们有 $0<h_{y_k}(x)\leqslant$

$C(m)$. 于是，由标准的椭圆估计，

$$||h_{y_k}||_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_O(m))} \leqslant C_1(m), \quad \forall k \geqslant k(m).$$

所以，利用取对角线子序列的方法，可得某子序列 h_{y_k}, 沿着它按 $C^2(M)$ (更确切地是对每个 m 按 $C^2(\overline{B}_O(m))$) 收敛于一非负调和函数 P_ξ, 它满足 $P_\xi(O)=1$. 由极大值原理， P_ξ 在 M 上是正的. 最后， (2.2.4) 表明 P_ξ 在 $\overline{M}\setminus\{\xi\}$ 上连续，并在 $S(\infty)\setminus\xi$ 上为零. 这样， P_ξ 是一 Poisson 核. 证毕.

注 命题 2.3 的证明也可用本章第 1 节的 Dirichlet 问题的可解性，它自然导致调和测度 的存在. 所谓在 $x\in\overline{M}$ 的调和测度 ω^x, 是指 $S(\infty)$ 上的惟一正 Borel 测度 ，满足

$$(Hf)(x)=\int_{S(\infty)} f(Q)\,d\omega^x(Q), \quad \forall f\in C^0(S(\infty)), \tag{2.2.5}$$

其中 Hf 是边值为 f 的惟一的调和函数.

由此推出，由于任何确定的 Borel 子集 E, 如果 χ_E 表示 E 的特征函数，则

$$\omega_E(x)=\int_{S(\infty)} \chi_E(Q)\,d\omega^x(Q) \tag{2.2.6}$$

即为以 χ_E 为边值的惟一的正调和函数.

任取 $\xi\in S(\infty)$, 设它在 $S_O(1)\subset T_OM$ 中的对应向量为 V. 取角宽 $\delta_i\to 0$. 令 $\Delta_i=C_O(V,\delta_i)\cap S(\infty)$, 则 Δ_i 是 $S(\infty)$ 上以 ξ 为中心的渐缩的邻域，即 $\Delta_{i+1}\subset\Delta_i, \cap\Delta_i=\{\xi\}$, 不难看出，

$$u_i(x)=\frac{\omega_{\Delta_i}(x)}{\omega_{\Delta_i}(0)} \tag{2.2.7}$$

给出了满足条件 (2) 的一个例子.

为了证明 Poisson 核的惟一性及它对 ξ 的 Lipschitz 连续性，我们需要下面的引理.

引理 2.4 设 M 的曲率 K_M 满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2, \gamma$ 是由 $O\in M$ 出发的一条测地射线 . 则存在常数 $T>0$, 仅依赖于 n,a,b, 使 $\forall t\geqslant 0$,

$$C_{\gamma(t+T)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\subseteq C_{\gamma(t)}\left(\frac{\pi}{8}\right), \tag{2.2.8}$$

其中 $C_{\gamma(t)}(\theta)=C_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\theta)$.

证明 为了叙述简便，如果 $A,B,C\in M$. 我们以 $\overline{AB},\overline{AC}$ 分别表示 A 出发通过 B 和 C 的测地射线 ，而 $\theta(\overline{AB},\overline{AC})$ 则表示射线 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 在 A 的夹角.

令 $x_0=\gamma(t),x_1=\gamma(t+T)$. 任取 $p\in\partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则

$$\theta(\overline{x_1x_0},\overline{x_1p})=\frac{3}{4}\pi.$$

引理归结为要证当 T 充分大时,

$$\theta(\overline{x_0p},\overline{x_0x_1})\leqslant\frac{\pi}{8},\ \forall p\in\partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right).\tag{2.2.9}$$

记 $\rho(x_0,x_1)=r,\rho(x_0,p)=s,\rho(x_1,p)=\sigma,\theta(\overline{x_0p},\overline{x_0x_1})=\theta$, 则由命题 1.1 ，有

$$\cos\theta\geqslant\coth ar\ \coth as-\frac{\operatorname{ch}a\sigma}{\operatorname{sh}ar\operatorname{sh}as},\tag{2.2.10}$$

在 $\triangle x_0x_1p$ 中，因为 $\theta(\overline{x_1x_0},\overline{x_1p})=\frac{3}{4}\pi$ 是最大的角. 根据 Toponogov 比较定理，我们有 $s>r,s>\sigma$, 因此,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{ch}a\sigma}{\operatorname{sh}ar\operatorname{sh}as}&=\frac{\operatorname{ch}a\sigma}{\operatorname{ch}as}\cdot\frac{\operatorname{ch}as}{\operatorname{sh}as}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}ar}\\&\leqslant\coth as\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}ar}.\end{aligned}$$

当 $r\to\infty$ 时， $\operatorname{sh}ar\to\infty,\coth as\to1,\coth ar\to1$, (2.2.10) 右边前项 $\to1$, 后项 $\to0$, 因而 $\exists T$, 使得只要 $r\geqslant T$, 即有

$$\cos\theta>\cos\frac{\pi}{8}\Rightarrow\theta\leqslant\frac{\pi}{8}.$$

引理 2.5 记号同引理 2.4. $x_0=\gamma(t),x_1=\gamma(t+T),p\in\partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则当 T 充分大时，存在常数 $C>0$, 使

$$\max_{p\in\partial C_{x_1}(\pi/4)}\theta(\overline{x_0x_1},\overline{x_0p})\geqslant e^{-CbT}.\tag{2.2.11}$$

证明 在 $\triangle x_0x_1p$ 中，记 $\theta=\theta(\overline{x_0x_1},\overline{x_0p}),\alpha=\theta(\overline{px_1},\overline{px_0})$, 而 $\theta(\overline{x_1x_0},\overline{x_1p})=\frac{3}{4}\pi,\rho(x_0,p)=s,\rho(x_0,x_1)=T,\rho(x_1,p)=\sigma$, 则由命题 1.1，(2.1.10)

$$\cos\theta\leqslant\frac{\operatorname{ch}bT\operatorname{ch}bs-\operatorname{ch}b\sigma}{\operatorname{sh}bT\operatorname{sh}bs}.\tag{2.2.12}$$

因为是负曲率流形, $\theta(\overline{x_1x_0},\overline{x_1p})=\frac{3}{4}\pi$, 所以 $\alpha<\frac{\pi}{4}$, 仍由 (2.2.10),

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}&=\cos\frac{\pi}{4}\leqslant\cos\alpha\\&\leqslant\frac{\operatorname{ch}b\sigma\operatorname{ch}bs-\operatorname{ch}bT}{\operatorname{sh}bs\operatorname{sh}b\sigma},\\\cos\frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{sh}bs\operatorname{sh}b\sigma}{\operatorname{ch}bs}&\leqslant\operatorname{ch}b\sigma-\frac{\operatorname{ch}bT}{\operatorname{ch}bs}.\end{aligned}$$

将上式代入 (2.2.12), 得

$$\begin{aligned}\cos\theta\operatorname{sh}bT\operatorname{sh}bs&\leqslant\operatorname{ch}bT\operatorname{ch}bs-\operatorname{ch}b\sigma\\&\leqslant\operatorname{ch}bT\operatorname{ch}bs-\frac{\operatorname{ch}bT}{\operatorname{ch}bs}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh}bs\operatorname{sh}b\sigma}{\operatorname{ch}bs}\\&=\operatorname{ch}bT\frac{\operatorname{sh}^2bs}{\operatorname{ch}bs}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh}bs\operatorname{sh}b\sigma}{\operatorname{ch}bs},\\\cos\theta&\leqslant\frac{\operatorname{ch}bT}{\operatorname{sh}bT}\cdot\tanh bs-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh}b\sigma}{\operatorname{ch}bs}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}bT}.\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

因为 $s>\sigma>s-T$, 当 T 固定, $s\to\infty$ 时,

$$\frac{\operatorname{sh}b\sigma}{\operatorname{sh}bs}\to1.$$

令 $\theta_\infty=\lim\limits_{s\to\infty}\theta$, (2.2.13) 为

$$\begin{aligned}1-\frac{\theta_\infty^2}{2}&\leqslant\cos\theta_\infty\\&\leqslant\coth bT-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}bT}\\&=\frac{1+e^{-2bT}}{1-e^{-2bT}}-\sqrt{2}\frac{e^{-bT}}{(1-e^{-2bT})}.\end{aligned}$$

因此, 当 T 充分大时, 即得 $\theta_\infty\geqslant e^{-CbT}$. 证毕.

命题 2.6 设 C 是以 O 为顶点的一个锥, u,v 是两个在 C 中定义的正调和函数, 并且 $u|_{\overline{C}\cap S(\infty)}=v|_{\overline{C}\cap S(\infty)}=0$, 则 $\dfrac{u}{v}$ 可以 C^α 连续地拓展到 $\overline{C}\cap S(\infty)$ 的内部, 其中 α 仅依赖于 n,a,b.

证明 任取 $Q\in(\overline{C}\cap S(\infty))^0$ (即 $\overline{C}\cap S(\infty)$ 的内部), 以 $\sigma=\sigma(t)$ 记测地射线 $\overline{OQ}$, 因为 Q 的取法, $\exists\delta>0$, 使 $C_0(\delta)\subset C$. 根据引理 2.4, $\exists T>0$, 使

$$C_{\sigma((k+1)T)}(2\delta)\subset C_{\sigma(kT)}(\delta),\quad\forall k=0,1,\cdots\tag{2.2.14}$$

记 $C_k = C_{\sigma(kT)}(\delta)$, 则 $\{C_k\}$ 显然组成一族渐缩的 Q 的开邻域, 并且 $\bigcap_k C_k = \{Q\}$. 令

$$\underline{\varphi}_i = \inf_{C_i} \frac{u}{v},$$
$$\overline{\varphi}_i = \sup_{C_i} \frac{u}{v},$$

则在 C_i 中, $\overline{\varphi}_i \geqslant \frac{u}{v} \geqslant \underline{\varphi}_i$.

根据定理 2.2,(2.2.3) , 存在常数 $C_1 > 0$, 使 (只要 T 取得足够大即可做到)

$$\overline{\varphi}_{i+1} \leqslant C_1 \underline{\varphi}_{i+1}, \ \forall i = 0, 1, \cdots \tag{2.2.15}$$

令

$$u_i = u - \underline{\varphi}_i v,$$

由 (2.2.15) , $\exists K > 0, K$ 仅依赖于 n, a, b, 使

$$\sup_{C_{i+1}} \frac{u_i}{v} \leqslant K \inf_{C_{i+1}} \frac{u_i}{v}.$$

此即

$$(\overline{\varphi}_{i+1} - \underline{\varphi}_i) \leqslant K(\underline{\varphi}_{i+1} - \underline{\varphi}_i)$$

若 $u_i = \overline{\varphi}_i v - u$, 同样可得

$$(\overline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_{i+1}) \leqslant K(\overline{\varphi}_i - \overline{\varphi}_{i+1})$$

令

$$\begin{aligned} \omega_i &= \overline{\varphi}_i - \overline{\varphi}_i = \sup_{C_i} \frac{u}{v} - \inf_{C_i} \frac{u}{v} \\ &= \operatorname*{osc}_{C_i} \left(\frac{u}{v} \right). \end{aligned}$$

将上列两不等式相加, 得

$$\begin{aligned} \omega_i + \omega_{i+1} &\leqslant K(\omega_i - \omega_{i+1})\omega_{i+1} \\ &\leqslant \frac{K-1}{K+1}\omega_i = \varepsilon\omega_i, \\ \varepsilon &= \frac{K-1}{K+1} < 1. \end{aligned}$$

因此， $\omega_i \leqslant \varepsilon^i \omega_0$, 此即

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{C_i}\left(\frac{u}{v}\right) &\leqslant \varepsilon^i \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)\\ &= e^{i\log\varepsilon}\sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)\\ &= e^{-iC_3}\sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right),\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

其中 $C_3 = -\log\varepsilon > 0$, 以 θ_i 记 ∂C_i 对 O 所张的最大角度，则由引理 2.5 ，当 i 充分大时，

$$\theta_i \geqslant e^{-\xi biT},$$

即 $-i \leqslant \frac{1}{\xi bT}\ln\theta_i$, 其中 ξ 为正常数，由 (2.2.16) ，

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{C_i}\left(\frac{u}{v}\right) &\leqslant e^{\frac{C_3}{\xi bT}\ln\theta_i}\sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)\\ &\leqslant \theta_i^{\alpha}\sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right),\end{aligned}$$

其中 $\alpha = \frac{C_3}{\xi bT}$ 为正常数，由定理 2.2 ， $\sup\limits_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)$ 为有界量，因此即得

$$\left|\frac{u}{v}(y) - \frac{u}{v}(y')\right| \leqslant \text{常数}\cdot\theta_i^{\alpha}, \quad \forall y, y' \in C_i.\tag{2.2.17}$$

u/v 的有界性再加上上式就保证了极限

$$\lim_{y\to Q}\frac{u}{v}(y)$$

存在，即 u/v 可以延拓到 $\overline{C}\cap S(\infty)$ 的内部．而且， (2.2.17) 就给出： $\forall\xi,\xi' \in (\overline{C}\cap S(\infty))$,

$$\left|\frac{u}{v}(\xi) - \frac{u}{v}(\xi')\right| \leqslant \text{常数}\cdot\theta(\xi,\xi')^{\alpha}.\tag{2.2.18}$$

命题证毕.

系 2.7 以 $P(x,\xi)$ 记在 $\xi\in S(\infty)$ 上的 Poisson 核函数，则当 x 固定时，有

$$|P(x,\xi) - P(x,\xi')| \leqslant C\theta(\xi,\xi')^{\alpha}.\tag{2.2.19}$$

证明 由下面的命题 2.8 ， Poisson 核是惟一的．由命题 2.3 ，取

$$P(x,\xi) = \lim_{y\to\xi}\frac{G(x,y)}{G(O,y)},$$

当 x 和 O 固定，看作 y 的函数，令 $u=G(x,y), v=G(O,y)$, 引用上述命题 2.6 即可.

命题 2.8 对任何 $\xi\in S(\infty)$, 只存在惟一的在基点 O 正规化的 Poisson 核函数.

证明 设 f,g 为两个在 $\xi\in S(\infty)$ 的 Poisson 核函数，按定义，它们满足：在 M 上为正调和函数， $f(0)=g(0)=1$,

$$f|_{S(\infty)\backslash\{\xi\}}=g|_{S(\infty)\backslash\{\xi\}}=0.$$

记 $\sigma(t)$ 为由 O 到 $\xi\in S(\infty)$ 的测地射线．任意固定正整数 k. 令 $x_0=\sigma(0)=0, x_1=\sigma(T),\cdots,x_k=\sigma(kT)$. 以 x_i 为顶点、 $-\sigma(iT)$ 为中心线、角宽为 δ 的锥记作 $C_{x_i}(\delta)$, 则由引理 2.4 ，只要 T 充分大，可使

$$C_{x_{i-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\subset C_{x_i}\left(\frac{\pi}{8}\right),\ i=1,\cdots,k. \tag{2.2.20}$$

因为 f,g 在 $S(\infty)$ 上只有惟一的非零点 ξ, 而 ξ 显然不在

$$\overline{C_{x_k}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)$$

上，因而 f,g 在 $\overline{C_{x_i}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)$ 上恒为零 $(i=1,\cdots,k)$, 在 $C_{x_k}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中引用定理 2.2 ，则至少在 $C_{x_{k-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中有

$$\sup_{C_{x_{k-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant C\frac{f(O)}{g(O)}=C, \tag{2.2.21}$$

其中 C 为不依赖于 k 的常数.

同时，根据命题 2.6 证明中的 (2.2.16) ，得

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{C_{x_0}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{f}{g}\right)&\leqslant\varepsilon^{k-1}\cdot\sup_{C_{x_{k-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{f}{g}\right),\ \varepsilon<1\\&\leqslant C\varepsilon^{k-1}.\end{aligned}$$

任取小邻域 $U\subset C_{x_0}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则由上式，有

$$\operatorname*{osc}_{U}\left(\frac{f}{g}\right)\leqslant C\varepsilon^{k-1}.$$

令 $k\to\infty$, 得 $\operatorname*{osc}_{U}\left(\frac{f}{g}\right)=0$. 在 U 上， $f\equiv g$, 由调和函数的惟一性定理，在整个 M 上 $f\equiv g$. 证毕.

2.3 Martin 边界与 Martin 积分表示

本节我们将引进 Martin 边界的概念, 并证明 M 的 Martin 边界和前面讨论的几何边界 $S(\infty)$ 可以建立一个自然的同胚 (homeomorphism) 以及通过 Poisson 核 表示调和函数的 Martin 积分公式 .

设 M 仍是单连通、完备、 n 维的 Riemann 流形, 截曲率 K_M 满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$. 固定原点 $O \in M$. 以 $G(x,y)$ 表示 M 的 Green 函数 , 则

$$h_y(x) = \frac{G(x,y)}{G(O,y)} \tag{2.3.1}$$

为在 O 点正规化的、以 y 为惟一极点的正调和函数. 由上节, 对于任何 M 上的点列 $Y = \{y_i\}$ (即使它没有极限点), 相应的函数序列 $\{h_{y_i}\}$ 包含收敛于一正调和函数的子序列.

点列 $\{y_i\}$ 称为 M 中的基本序列, 如果相应的函数序列 $\{h_{y_i}\}$ 在 M 上收敛到一正调和函数. 设 $Y = \{y_i\}$ 是一基本序列, 其相应的极限正调和函数记作 h_Y. 两个基本序列

$$Y = \{y_i\},\ \widetilde{Y} = \{\widetilde{y}_i\}$$

称为等价, 当且仅当 $h_Y = h_{\widetilde{Y}}$.

定义 M 的 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 由 M 上基本序列 的等价类组成. 因为每一 $Y \in \mathscr{M}$ 都对应着惟一的 h_Y, 我们也可以将 $\mathscr{M}$ 看成全体 h_Y 组成.

令 $\widetilde{M} = M \cup \mathscr{M}$. 在 $\widetilde{M}$ 上我们可以定义度量如下: 如果 $Y, Y' \in \widetilde{M}$, 则

$$\rho(Y,Y') = \sup_{x \in B_0(1)} |Hh_Y(x) - Hh_{Y'}(x)|. \tag{2.3.2}$$

不难证明, 在此度量下 $\widetilde{M}$ 是紧的. 在度量拓扑 ρ 下 $\mathscr{M}$ 组成 $\widetilde{M}$ 的边界, 并且拓扑 ρ 与 M 自身作为 Riemann 流形的拓扑等同. 注意, $\widetilde{M}$ 之结构与原点 O 的选择无关.

定理 3.1 M 的 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 与其几何边界 $S(\infty)$ 之间存在一自然同胚 $\varPhi : \mathscr{M} \to S(\infty)$. 而且, $\varPhi^{-1}$ 是 Hölder 连续的.

证明 设 $Y = \{y_i\} \in \mathscr{M}$ 是一基本序列, 则 $h_{y_i}(x) \to h_Y(x)$ 是 M 上的正调和函数. $\{y_i\}$ 在 M 内无极限点, 其极限点只能在 $S(\infty)$ 上. 根据命题 2.8 ,

不同的极限点对应不同的调和函数（实为不同点的 Poisson 核函数），因此 $\{y_i\}$ 仅有惟一的极限点 $y_\infty \in S(\infty)$. 定义映射 $\Phi: \mathscr{M} \to S(\infty)$ 为

$$\Phi(h_Y) = y_\infty. \tag{2.3.3}$$

Φ 显然是在上 (surjective) 的，因为任何序列 $\{z_j\} \to z_0 \in S(\infty)$ 都含有基本的子序列.

Φ 是连续的：设在 $\mathscr{M}$ 中 $h_i \to h$,

$$\Phi(h) = \mathcal{Q} \in S(\infty), \quad \Phi(h_i) = \mathcal{Q}_i \in S(\infty).$$

依前所述，h_i 实为在 $\mathcal{Q}_i$ 中的核函数，h 为在 $\mathcal{Q}$ 中的核函数. 如果两子序列 $\{\mathcal{Q}_{i'}\}$ 和 $\{\mathcal{Q}_{i''}\}$ 具有不同的极限 $\lim \mathcal{Q}_{i'} \neq \lim \mathcal{Q}_{i''}$, 那么 $\{h_{i'}\}$ 和 $\{h_{i''}\}$ 将给出不同的核函数. 这和 $h_i \to h$ 相矛盾.

Φ 是一一的：设 $Y = \{y_i\} \in \mathscr{M}, \Phi(h_Y) = \mathcal{Q}$. 如果 $\{z_i\}$ 是任何基本序列，$z_i \to \mathcal{Q}$, 那么 $\lim\limits_{i\to\infty} G(x, z_i)/G(O, z_i)$ 存在并且是点 $\mathcal{Q}$ 的核函数，根据惟一性命题 2.8，

$$h_Y = \lim_{i\to\infty} G(x, z_i)/G(O, z_i),$$

因而 $Y = \{z_i\}$.

现在我们已经可以把 $\mathscr{M}$ 中的元素合理地记作 $h_\xi, \xi \in S(\infty)$. 根据系 2.7，有

$$|h_\xi(x) - h_{\xi'}(x)| \leqslant C\theta(\xi, \xi')^\alpha, \ \forall x \in B_0(1), \tag{2.3.4}$$

其中 C, α 为仅依赖于 n, a, b 的正常数. 上式即为

$$\begin{aligned} \rho(h_\xi, h_{\xi'}) &= \rho(\Phi^{-1}(\xi), \Phi^{-1}(\xi')) \\ &\leqslant C\theta(\xi, \xi')^\alpha, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

它表明 $\Phi^{-1}: S(\infty) \to \mathscr{M}$ 是 C^α 映射，自然 Φ 是一同胚，定理证毕.

在上节（见 (2.2.5) 和 (2.2.6)）我们知道，根据调和函数 Dirichlet 问题的可解性，存在调和测度 ω^x. 它是 $S(\infty)$ 上的正 Borel 测度，满足：$\forall f \in C^0(S(\infty))$,

$$(Hf)(x) = \int_{S(\infty)} f(\mathcal{Q})\, d\omega^x(\mathcal{Q}).$$

ω^x 在 $S(\infty)$ 上的总测度为 1. 由此推出，对于 $S(\infty)$ 上的 Borel 子集 E, 有界调和函数

$$\omega_E(x) = \omega^x(E) = \int_{S(\infty)} \chi_E(Q)\, d\omega^x(Q).$$

是 E 的调和测度 ，其中 $\chi_E(Q)$ 是 E 的特征函数. 根据测度论的标准结果，对应这一调和测度的 Radon-Nikodym 导数

$$K(x,Q) = \frac{d\omega^x}{d\omega^O}(Q) = \lim_{i\to\infty} \frac{\omega^x(\Delta i)}{\omega^O(\Delta_i)} \tag{2.3.6}$$

对几乎处处的 $Q \in S(\infty)$ 存在. (2.3.6) 中 O 是固定的原点， Δ_i 是 $S(\infty)$ 中以 Q 为中心的渐缩的邻域集，使 $\Delta_{i+1}\tau\Delta_i, \cap\Delta_i = Q$. 由 (2.2.7) 及惟一性定理，$K(x,Q) = p(x,Q)$ 为在 Q 点的 Poisson 核函数.

在经典的调和函数论中，首先是 Herglotz 对单位圆

$$D = \{|z| < 1\}$$

建立了正调和函数的表示公式：对于任何 D 上的正调和函数，皆可找到 ∂D 上的正 Borel 测度 μ, 使

$$u(x) = \int_{\partial D} p(x,Q)\, d\mu(Q). \tag{2.3.7}$$

上述公式对 $\mathbb{R}^n$ 中有界域情况的推广是 Martin 完成的， Martin 建立了类似的公式，其中的积分是在理想边界 ——Martin 边界上进行的. 遵从这种经典的想法，在建立了 Martin 边界以后，也就可以证明类似的 Martin 表示 公式.

定理 3.2 设 u 是 M 上的正调和函数，则在 $S(\infty)$ 上存在惟一的、有限的、正 Borel 测度 μ, 使

$$u(x) = \int_{S(\infty)} p(x,Q)\, d\mu(Q), \tag{2.3.8}$$

其中 $p(x,Q)$ 是 Poisson 核函数.

证明 固定原点 $O \in M$ 对 M 中的有界域 $B_O(R)$ (以 O 为中心、 R 为半径的测地球) 应用经典的 Martin 表示 公式，则对 $x \in B_O(R)$, 有

$$u(x) = \int_{S_O(R)} u(Q) P_R(x,Q)\, d\omega_R(Q), \tag{2.3.9}$$

其中 $P_R(x,Q)$ 是 $B_O(R)$ 的 Poisson 核函数， ω_R 是 $S_O(R)$ 的调和测度．因为 $P_R(0,Q)=1$, 所以

$$u(0)=\int_{S_O(R)} u(Q)\,d\omega_R(Q). \tag{2.3.10}$$

将 $S_O(R)$ 等同于 $S_O(1)\simeq S(\infty)$, 其中 $R\in[1,\infty]$. 上式表明 $S(\infty)$ 上的序列测度 $\{\mu_R=\mu|_{S_O(R)}\cdot\omega_R\}$ 中的每一个都具有总质量 $u(0)$. 根据测度论，存在一个子测度序列为 $\{\mu_{R_j}\}$ $R_j\to\infty$, 使 μ_{R_j} 弱收敛于某有限、正 Borel 测度 μ.

另外，再说明：对于固定的 $Q\in S(\infty)$, 函数族 $\{P_{R_j}(x,Q)\}$ 中有一子序列收敛于 Q 的核函数．根据惟一性（命题 2.8 ），其极限即 $P(x,Q)$. 为了看到这一点，取任意锥 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 使之不包含测地射线 $\overline{OQ}$（即不是 Q 的邻域）. 将 $P_{R_j}(x,Q)$ 零扩充到整个 $C_0\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 即令

$$\zeta_j=\begin{cases} P_{R_j}(x,Q), & x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\cap B_O(R_j),\\ 0, & x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\setminus B_O(R_j).\end{cases}$$

于是在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上 $\Delta\zeta_j\geqslant 0$. 在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上解 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} \Delta h_j=0, \text{在} C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\phi,\\ h_j=\zeta_j, \quad \text{在} \partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{上}, \end{cases}$$

根据极大值原理以及定理 2.1 ，在 $T_O\left(\frac{\pi}{8},1\right)$ 上，

$$\zeta_j\leqslant h_j\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}h_j(O'). \tag{2.3.11}$$

不失一般性可以假定调和函数列 $\{h_j\}$ 在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中内闭一致收敛（必要的话选一子序列）, (2.3.11) 即导致 ζ_j（因而 P_{R_j}）在 $C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)\cap S(\infty)$ 上连续地收敛到 0 ，因而 $\lim\limits_{j\to\infty}P_{R_j}(x,Q)=\rho(x,Q)$. 这样，根据 $\mu_{R_j}\xrightarrow{\text{弱}}\mu$, 即得

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S_O(R_j)} u(Q)P_{R_j}(x,Q)\,d\mu_{R_j}(Q)\\ &\to \int_{S(\infty)} P(x,Q)\,d\mu(Q). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

下面再证惟一性，设

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{S(\infty)} P(x,Q)\,d\mu(Q) \\
&= \int_{S(\infty)} P(x,Q)d\nu(Q),
\end{aligned}
$$

其中 μ,ν 皆是正的 Borel 测度，总测度为 1 ，而 μ 由 (2.3.12) 给出.

同前面一样，将 $S_O(R_j)$ 和 $S(\infty)$ 等同，任取闭集 $E\subset S(\infty)$, 则

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= \lim_{j\to\infty}\int_E u(Q)\,d\mu_{R_j}(Q) \\
&= \lim_{j\to\infty}\int_E\int_{S(\infty)} P(Q,Q')\,d\nu(Q')\,d\mu_{R_j}(Q) \\
&= \lim_{j\to\infty}\int_{S(\infty)}\left[\int_E P(Q,Q')\,d\mu_{R_j}(Q)\right]d\nu(Q').
\end{aligned}
$$

在 $S(\infty)$ 中任取开集 $V\supset E$. 因为 P 是 Poisson 核函数，当 $j\to\infty$ 时, $F_j(Q')\equiv\int_E P(Q,Q')\,d\mu_{R_j}(Q)$ 对 $Q'\in S(\infty)\setminus V=S_O(R_j)\setminus V$ 一致收敛于零. 因为 $F_j\leqslant 1$, V 是任意包含 E 的开集，因此 $\mu(E)\leqslant\nu(E)$. 再注意到 μ,ν 的总测度同为 $u(0)$, 因而只能是 $\mu(E)=\nu(E)$.$\forall$ 闭集 $E\subset S(\infty)$. 定理证毕.

2.4 Harnack 不等式的证明

本节的任务是给出定理 2.1 与定理 2.2 的详细证明. 这是两个关于调和函数的 Harnack 型定理. 在前节我们看到，它们是关于 Poisson 核函数和 Martin 表示公式的技术基础.

设 M 仍为单连通、 完备、n 维 Riemann 流形，满足

$$
-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2.
$$

任意固定基点 $O\in M$. T_OM 中单位球面记以 $S_O(1)$. 取 $v\in S_O(1)$. 以 O 为顶点， v 为中心线,. 角宽为 δ 的锥记为 $C_O(v,\delta)$ (在 v 不起重要作用时，记作 $C_O(\delta)$). $C_O(v,\delta)$ 与 $B_O(R)$ 的余集 $T_O(v,\delta,R)=C_O(v,\delta)\setminus B_O(R)$ 组成 $v\in S_O(1)\simeq S(\infty)$ 的一个邻域. 截锥 $T_O(v,\delta,R)$ 的顶点记作 $O'=\exp_O v$.

定理 4.1 如果 u 是定义在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上的正调和函数，在 $\overline{C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ 上连续，它在 $\overline{C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)$ 上连续地变为零，则下列估计成立

$$\sup_{x\in T\left(\frac{\pi}{8},1\right)} u(x)\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}u(O'), \tag{2.4.1}$$

其中 C_1, C_2 为仅依赖于 a, b, n 的常数.

证明分为以下几步：

引理 4.1 对于任何正实数 $\beta, 1>\beta\geqslant 0$, 存在 $\varphi(x)\in C^\infty(M)$ 及常数 R_0, 满足

(i) $|D\varphi|+|D^2\varphi|\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)},\ \forall x\in T\left(\dfrac{\pi}{4},R_0\right)$,

(ii) $\varphi|_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\setminus B_O(R_0)}\equiv 1$,

(iii) $\varphi|_{T\left(\frac{\pi}{8},R_0\right)}\equiv\beta$.

证明 取逐段线性函数 $\psi(\theta):[0,\pi]\to\mathbb{R}$.

$$\psi(\theta)=\begin{cases}1, & \pi\geqslant\theta\geqslant\dfrac{\pi}{4}-\varepsilon,\\ \beta, & \dfrac{\pi}{8}+\varepsilon_1\geqslant\theta\geqslant 0,\\ \text{连接 1 和}\beta\text{的斜线}, & \dfrac{\pi}{4}-\varepsilon_1\geqslant\theta\geqslant\dfrac{\pi}{8}+\varepsilon,\end{cases}$$

将 $\psi(\theta)$ 看成 $\xi\in S_O(1)$ 上的函数，其中 θ 为 ξ 与 v 的夹角，而 v 为锥 $C_O\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的中心线. 再将 $\psi(\theta)$ 沿从 O 点出发的射线加以延拓，得到定义于整个 $M\setminus\{0\}$ 上的 Lipschitz 函数 ψ, 即定义 $\psi(y)=\psi(\theta_y), \theta_y$ 是射线 $\overline{Oy}$ 与 v 的夹角.

如同本章定理 1.1 的证明那样，取 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}), \chi\geqslant 0, \operatorname{supp}\chi\subset[-1,1]$, $\chi(0)>0$, 令

$$\varphi(x)=\frac{\int_M\chi(\rho^2(x,y))\psi(y)\,dy}{\int_M\chi(\rho^2(x,y))\,dy}, \tag{2.4.2}$$

则 φ 为满足引理条件之函数.

(i) 的证明完全类似于定理 1.1 的证明，主要用到当 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2$ 时，

$$\begin{aligned}a\coth(a\rho)(g-d\rho\otimes d\rho)&\leqslant D^2\rho\\ &\leqslant b\coth(b\rho)(g-d\rho\otimes d\rho),\end{aligned}$$

在计算时，只要注意

$$D^2\chi(\rho^2)=\chi''\,d\rho\otimes d\rho+\chi' D^2\rho,$$

及

$$\begin{aligned}||(D^2\varphi)(x_0)|| &= ||D^2[\varphi-\psi(x_0)](x_0)|| \\ &\leqslant C_1 \operatorname*{osc}_{B_x(1)} \psi,\end{aligned}$$

而 $\operatorname*{osc}_{B_x(1)} \psi = O(e^{-a\rho(x)})$.

(ii) 如果 $y \in B_x(1), \theta = \theta(\overline{Ox}, \overline{Oy})$, 则由 (2.1.11) ,

$$\theta \leqslant C_1 e^{-a\rho(x)},$$

因此，存在 R_0, 当 $\rho(x) \geqslant R_0$ 时， $\theta(\overline{Ox}, \overline{Oy}) \leqslant C_1 e^{-aR_0} < \varepsilon_1$, 这样，当 $x \in \partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right), \rho(x) \geqslant R_0 + 1$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\int_M \chi(\rho^2(x,y))\,dy} \int_M \chi(\rho^2(x,y))\psi(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\int_M \chi(\rho^2(x,y))\,dy} \int_{B_x(1)} \chi(\rho^2(x,y))\,dy \\ &= 1.\end{aligned}$$

这是因为此时 $y \in B_x(1), \theta(\overline{Ox}, \overline{Oy}) < \varepsilon_1, \psi(y) = 1$.

(iii) 的证明与 (ii) 相同.

引理 4.2 设 $u(x) > 0, \Delta u = 0, u$ 在 $\overline{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cap S(\infty)$ 上为零，则 $\exists \delta > 0, R_0 > 0$, 使

$$u(x) \leqslant C_1 e^{-\delta\rho(x)} \sup_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} u, \quad \forall x \in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right). \tag{2.4.3}$$

证明 在引理 4.1 中取 $\beta = 0$, 则存在满足引理 4.1 中的 (i),(ii),(iii) 的函数 $\varphi(x)$, 由于 (i), $\forall x \in T\left(\frac{\pi}{4}, R_0\right), \Delta\varphi \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}$. 改变 C_1 和 C_2, 自然也可以使

$$\Delta\varphi \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}, \quad \forall x \in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

令 $f = \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)}$, 其中 C 和 δ 为待定的正常数，则由 (2.1.23) ,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta\varphi + C\Delta e^{-\delta\rho(x)} \\ &\leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)} - C\delta(C_3-\delta)e^{-\delta\rho(x)},\end{aligned}$$

其中 C_3 为仅与 n, a 有关的常数. 因此，只要 δ 适当小而 C 充分大，就可以使 $\Delta f \leqslant 0$.

另一方面，同时可使 $f|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \geqslant 1$. 这是因为当 $x \in \partial C_O\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，由 (ii)，只要 C 充分大，有

$$f(x) = \begin{cases} \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)} \geqslant 1, & \text{当 } \rho(x) \geqslant R_0, \\ \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)} \geqslant Ce^{-\delta R_0} \geqslant 1, & \text{当 } \rho(x) \leqslant R_0. \end{cases}$$

同时, 根据 φ 的性质 (iii)，当 $x \in T\left(\dfrac{\pi}{8}, R_0\right)$ 时，$\varphi \equiv 0$. 因此，$f = Ce^{-\delta\rho(x)}, \forall x \in T\left(\dfrac{\pi}{8}, R_0\right)$.

再令 $\widetilde{u} = u(x)/\sup\limits_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} u$, 则 $\Delta\widetilde{u} = 0, \overline{u}|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \leqslant 1$, 考虑 $\widetilde{u} - f$, 则由于 $f|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \geqslant 1$, 有

$$\Delta(\widetilde{u} - f) \geqslant 0,$$

$$(\widetilde{u} - f)|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \leqslant 0.$$

由极大值原理 ，在内部，特别是对 $x \in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right)$, 有

$$\widetilde{u} \leqslant f \leqslant Ce^{-\delta\rho(x)},$$

即

$$u \leqslant Ce^{-\delta\rho(x)} \sup_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} u.$$

证毕.

现在我们可以给出定理 4.2 的证明了.

定理 4.2 的证明:

1° 根据引理 4.1，存在函数 $\varphi \in C^\infty(M)$, 满足引理 4.1 之 (i), (ii), (iii), 但在 (iii) 中取 $\beta = \frac{1}{2}$. 由 (i)

$$|\nabla\varphi| + |\nabla^2\varphi| \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}, \quad x \in T\left(\frac{\pi}{4}, R_0\right).$$

适当改变 C_1 和 C_2, 可使 $\forall x \in C_O\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 都有

$$|\nabla\varphi| + |\nabla^2\varphi| \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}. \tag{2.4.4}$$

另外，由 φ 的构造方法可知 $1 \geqslant \varphi \geqslant \dfrac{1}{2}$.

考虑函数 $u(x)^{\varphi(x)} = e^{\varphi \log u}$, 则

$$\begin{aligned}
\nabla u^{\varphi} &= u^{\varphi}(\log u \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla \log u), \qquad (2.4.5)\\
\Delta u^{\varphi} &= u^{\varphi}(|\log u\nabla\varphi + \varphi\nabla\log u|^2 + \log u\Delta\varphi \\
&\quad +2\nabla\varphi\cdot\nabla\log u + \varphi\Delta\log u), \qquad (2.4.6)
\end{aligned}$$

注意

$$\Delta \log u = \frac{\Delta u}{u^2} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = -|\nabla \log u|^2 \quad (\text{因为}\Delta u = 0).$$

设 $u(O') = 1$, 则由内部 Harnack 不等式（第一章的系 3.4）

$$|\nabla \log u| \leqslant C,$$

$$\begin{aligned}
\log u(x) &= \log u(x) - \log u(O') \\
&\leqslant \int_{O'}^{x} |\nabla \log u| \leqslant C\rho(x). \qquad (2.4.7)
\end{aligned}$$

由 (2.4.4)， (2.4.6) 及 (2.4.7) 可得 Δu^{φ} 的估计为

$$\begin{aligned}
\Delta u^{\varphi} &= u^{\varphi}(|\nabla\varphi|^2\log^2 u + \varphi^2|\nabla\log u|^2 + 2\varphi\log u\nabla\varphi\cdot\Delta\log u \\
&\quad + \log u\Delta\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\log u + \varphi\Delta\log u) \\
&\leqslant u^{\varphi}(C_1 e^{-C_2\rho(x)} + (\varphi^2 - \varphi)|\nabla\log u|^2) \\
&\leqslant u^{\varphi}C_1 e^{-C_2\rho(x)} \quad (\text{因为}\varphi \leqslant 1, \varphi^2 \leqslant \varphi) \\
&= C_1 e^{-C_2\rho(x)} u^{\varepsilon} u^{\varphi-\varepsilon} \\
&\leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)} e^{\varepsilon C\rho(x)} \cdot u^{\varphi-\varepsilon} \\
&\leqslant C_1 e^{-C_3\rho(x)} u^{\varphi-\varepsilon},
\end{aligned}$$

其中 C_1 和 C_3 皆为正数， ε 为充分小的正数.

令 $\alpha = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1 > \alpha > 0$, 则

$$u^{\varphi-\varepsilon} \leqslant u^{\alpha} + 1. \qquad (2.4.8)$$

这是因为，如果 $u \leqslant 1$, 则上式自然正确，当 $u > 1$ 时，因为 $\varphi \leqslant 1$, 上式也对. 于是我们有

$$\Delta u^{\varphi} \leqslant C_1 e^{-C_3\rho(x)}(u^{\alpha} + 1),\ x \in C_o\left(\frac{\pi}{4}\right). \qquad (2.4.9)$$

2° 另一方面，计算

$$\begin{aligned}\Delta(e^{-\delta\rho(x)}\cdot u^\alpha) &= u^\alpha\Delta e^{-\delta\rho(x)} + 2\nabla e^{-\delta\rho(x)}\cdot\nabla u^\alpha + e^{-\delta\rho(x)}\Delta u^\alpha \\ &\leqslant -\delta(C_4-\delta)e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha + 2\delta e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha-1}|\nabla u| \\ &\quad -\alpha(1-\alpha)e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha-2}|\nabla u|^2 \\ &= -\delta(C_4-\delta)e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha + e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha(2\delta|\nabla\log u| \\ &\quad -\alpha(1-\alpha)|\nabla\log u|^2).\end{aligned}$$

对上式右端括号中的项应用不等式 $2Bt-At^2\leqslant B^2/A^2$, 即得

$$\begin{aligned}\Delta(e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha) &\leqslant -\delta(C_4-\delta)e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha \\ &\quad +\frac{\delta^2}{\alpha(1-\alpha)}e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha \\ &\leqslant -\delta C_5 e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha.\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

只要 δ 充分小，自然也可以使

$$\Delta e^{-\delta\rho(x)}\leqslant -\delta C_5 e^{-\delta\rho(x)}.\tag{2.4.11}$$

因此，对充分大的 C_6, 由 (2.4.9), (2.4.10) 及 (2.4.11)，

$$\begin{aligned}\Delta(u^\varphi + C_6e^{-\delta\rho(x)}(u^\alpha+1)) &\leqslant C_1e^{-C_3\rho(x)}(u^\alpha+1) \\ &\quad -\delta C_6C_5(u^\alpha+1)e^{-\delta\rho(x)} \\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

3° 至此，我们已经构造了一个次调和函数

$$f = u^\varphi + C_Oe^{-\delta\rho(x)}(u^\alpha+1).$$

$\Delta f\leqslant 0$, 将 u 和 f 比较. 在 $\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上因 $\varphi\equiv 1$, 因而

$$u|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})}\leqslant (u^\varphi + C_6e^{-\delta\rho(x)}(u^\alpha+1))|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})},$$

所以

$$u\leqslant u^\varphi + C_6e^{-\delta\rho(x)}(u^\alpha+1),\quad x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

特别地，在 $\partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 上， $\varphi \equiv \frac{1}{2}$, 所以 $\forall x \in \partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)$,

$$
\begin{aligned}
u &\leqslant u^{\frac{1}{2}} + C_6 e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1) \\
&\leqslant u^{\frac{1}{2}} + C_6(u^{\alpha}+1) \\
&\leqslant \frac{1}{4}u + 1 + C_6(u^{\alpha}+1),
\end{aligned}
$$

因 $\alpha<1$, 由上式只能有 $u|_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)} \leqslant$ 常数. 在 $C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 中应用引理 4.2 ，即得

$$
\begin{aligned}
u(x) &\leqslant Ce^{-\delta\rho(x)} \sup_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)} u \\
&\leqslant \widetilde{C}e^{-\delta\rho(x)}, \quad \forall x \in T\left(\frac{\pi}{16}, R_0\right).
\end{aligned}
$$

注意上式是在假定 $u(O')=1$ 下证明的, 如果 $u(O')\neq 1$, 那么用 $u(x)/u(O')$ 代替 $u(x)$, 即得

$$
u(x) \leqslant \widetilde{C}e^{-\delta\rho(x)}u(O'),\ \forall x \in T\left(\frac{\pi}{16}, R_0\right).
$$

将 $T\left(\frac{\pi}{16}, R_0\right)$ 扩大到 $T\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ 只要用第一章的内部 Harnack 不等式 $u(x) \leqslant Cu(O'), x \in B_O(R_0)$, 其中 C 仅与 R_0 及曲率上、下界有关，而 R_0 本身也可选择得仅与曲率上下界有关. 因此最后总有

$$
u(x) \leqslant Ce^{-\delta\rho(x)}u(O'),\ \forall x \in T\left(\frac{\pi}{\delta}, 1\right).
$$

定理至此证毕.

定理 4.2 设 u, v 是定义在锥 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上的正调和函数，在 $\overline{C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ 上连续，并且 $u|_{\overline{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)} = v|_{\overline{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)} = 0$, 则 $\forall x \in T\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$, 下列估计成立：

$$
\frac{1}{C_1}\frac{u(O')}{v(O')} \leqslant \frac{u(x)}{v(x)} \leqslant C_1\frac{u(O')}{v(O')}, \tag{2.4.12}
$$

其中 O' 是截锥 $T\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ 的顶点， C_1 为仅依赖于 n, a, b 的常数.

证明 任取定 $\frac{\pi}{4} > \theta_1 > \theta_2 > 0$. 显然只要对 $T(\theta_2, 1)$ 证明不等式 (2.4.12) 即可.

不失一般性，可设 $u(O')=v(O')=1$，总的证明线索是设法构造一个次调和函数 F，使当 R_0 充分大时，有

$$\begin{cases}\Delta F\leqslant 0, & \forall x\in T(\theta_1,R_0),\\ F\geqslant v, & 在\,\partial T(\theta_1,R_0)\,中,\\ F\leqslant Cu, & 在\,\partial T(\theta_2,R_0)\,中.\end{cases}\tag{2.4.13}$$

根据极大值原理，在 $T(\theta_2,R_0)$ 中就有

$$v\leqslant F\leqslant Cu.$$

再由第一章的 Harnack 不等式，上式在 $T(\theta_2,1)$ 中仍然成立（常数可能改变），而这就是

$$\frac{u(x)}{v(x)}\leqslant C=C\frac{u(O')}{v(O')}.$$

交换 u,v 的位置得到 (2.4.12) 的另一端，从而完成定理的证明.

在下面的证明中以 $C_1,C_2,\cdots,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 等表示仅依赖于 n,a,b 的正常数.

1° 根据定理 4.1，$\exists C_1,\alpha_1>0$，使 $\forall x\in T(\theta_1,1)$ 有

$$u(x),v(x)\leqslant C_1e^{-\alpha_1\rho(x)}.$$

同时，由梯度估计 $|\nabla\log u|<C$，易见也有

$$u(x),v(x)\geqslant C_2e^{-\alpha_2\rho(x)},\ \forall x\in T(\theta_1,1).$$

因此，当 $x\in T(\theta_1,1)$ 时，

$$\begin{aligned}v(x)&\leqslant C_1e^{-\alpha_1\rho(x)}\\&=C_1(C_2e^{-\alpha_2\rho(x)})^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\cdot C_2^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\\&\leqslant C_3u^{\lambda_0},\end{aligned}\tag{2.4.14}$$

其中 $\lambda_0=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}<1$.

由引理 4.1，存在函数 $\varphi\in C^\infty(M)$. 满足对充分大的 R_0，$1\geqslant\varphi\geqslant\varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 为待定的小正数，有

$$\begin{cases}|\nabla\varphi|+|\nabla^2\varphi|<C_4e^{-C_5\rho(x)},\ \ \forall x\in T\left(\dfrac{\pi}{4},1\right),\\ \varphi|_{T(\theta_2,R_0)}=1,\\ \varphi|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)}=\varepsilon_0.\end{cases}\tag{2.4.15}$$

令

$$\lambda = 1 - (1-\varphi)^{2s} - (1-\varphi)^s e^{-\delta_0 \rho(x)}, \tag{2.4.16}$$

其中 s, δ_0 为待定的正常数. 由 (2.4.15)，易得

$$|\nabla\lambda| + |\nabla^2\lambda| \leqslant C_6 e^{-C_7\rho}(1-\varphi)^{s-1}, \tag{2.4.17}$$

同时有

$$\lambda|_{T(\theta_2,R_0)} = 1,$$

$$\lambda|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)} = 1 - (1-\varepsilon_0)^{2s} - (1-\varepsilon_0)^s e^{-\delta_0\rho(x)},$$

因此，当 $\varepsilon_0, s, \delta_0$ 取定后，只要 R_0 充分大，在 $\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)$ 上就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-(1-\varepsilon_0)^{2s}) &\leqslant \lambda|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)}\\ &\leqslant 1-(1-\varepsilon_0)^{2s},\end{aligned}$$

在 s 确定后，只要 ε_0 充分小，将有

$$\lambda|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)} \leqslant \lambda_0 < 1.$$

因为 $u \leqslant C_1 e^{-\alpha_1\rho(x)}$, 所以只要 R_0 充分大，由 (2.4.14) 就有

$$\begin{aligned}u^\lambda|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)} &\geqslant u^{\lambda_0}|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)}\\ &\geqslant \frac{1}{C_3}v.\end{aligned}$$

这样，函数 u^λ 已可满足

$$\begin{cases} u^\lambda|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_O(R_0)} \geqslant \dfrac{1}{C_3}v, \\ u^\lambda|_{T(\theta_2,R_0)} = u. \end{cases} \tag{2.4.18}$$

由第一章 Harnack 不等式， (2.4.18) 的第一式也就意味着

$$u^\lambda|_{\partial T(\theta_1,R_0)} \geqslant C_9 v|_{\partial T(\theta_1,R_0)}. \tag{2.4.19}$$

(2.4.18) 和 (2.4.19) 已经组成我们所要求的 (2.4.13) 中的后两式，但无法证明 $\Delta u^\lambda \leqslant 0$, 因此必须对 u^λ 再加以改造.

2° 令 $\xi = -\log u$, 因为当 ρ 充分大时，

$$C_2 e^{-\alpha_2 \rho} \leqslant u \leqslant C_1 e^{-\alpha_1 \rho},$$

因此， $C_{10}\rho \geqslant \xi \geqslant C_{11}\rho$. 并且由 $\Delta u = 0$ 及 $|\nabla \log u| < C$, 得

$$|\nabla \xi| \leqslant C_{12}, \quad \Delta \xi = |\nabla \xi|^2 \leqslant C_{13}. \tag{2.4.20}$$

令

$$F(x) = \psi(\xi(x) - e^{-\beta\rho(x)}) u(x)^{\lambda(x)}, \tag{2.4.21}$$

其中 β 为待定的常数， $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足：

$$\begin{aligned} C_{13} &\geqslant \psi \geqslant 1, \psi'' \leqslant 0, \\ 2 &\geqslant \psi'(t)t^2 \geqslant 1, \quad \text{当}\, t\, \text{充分大时}. \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

注意因 $\xi \sim C\rho$, (2.4.22) 的最后一式相当于（当 ρ 充分大时）

$$C_{14} \geqslant \rho^2 \psi'(\xi - e^{-\beta\rho}) \geqslant C_{15}. \tag{2.4.23}$$

因为 ψ 是正有界量，因此 $F = \psi \cdot u^\lambda$ 和 u^λ 一样满足 (2.4.18) 和 (2.4.19)，即满足 (2.4.13) 中的边界条件，因此整个定理的证明只有赖于验证：可选适当的 β, 使当 $\rho(x)$ 充分大时， $\Delta F \leqslant 0$.

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta(\psi \cdot u^\lambda) \\ &= \Delta\psi \cdot u^\lambda + 2\nabla\psi \cdot \nabla u^\lambda + \psi \nabla u^\lambda. \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

先看 $\Delta\psi$ 项，因为 $\psi'' < 0$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta\psi &\leqslant \psi'(\Delta\xi - e^{-\beta\rho}(\beta^2 - \beta\Delta\rho)) \\ &\leqslant \psi'\left(|\nabla \log u|^2 - \frac{1}{2}\beta^2 e^{-\beta\rho}\right), \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

只要 ρ 充分大. 此处用到 $\Delta\rho \leqslant C$ 及 β 足够大.

$$\begin{aligned} 2\nabla\psi \cdot \nabla u^\lambda &= 2\psi' u^\lambda(-\nabla \log u - \beta e^{-\beta\rho}\nabla\rho) \cdot (\log u \nabla\lambda + \lambda\nabla \log u) \\ &\leqslant 2\psi' u^\lambda[-\lambda|\nabla \log u|^2 + C_{16}(\rho|\nabla\lambda||\nabla \log u| \\ &\quad + \beta\rho e^{-\beta\rho}|\nabla\lambda| + \beta e^{-\beta\rho})]. \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

此处用到 $|\nabla\rho|=1, |\log u|\leqslant C\rho, |\nabla\log u|\leqslant C$. 于是 (2.4.24) 成为

$$
\begin{aligned}
\Delta F \leqslant\ & \psi\Delta u^\lambda+\psi' u^\lambda(1-2\lambda)|\nabla\log u|^2\\
&+C_{16}\psi' u^\lambda\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\\
&-\psi' u^\lambda e^{-\beta\rho}\left(\frac{1}{2}\beta^2-C_{16}\beta-C_{16}\beta\rho|\nabla\lambda|\right)\\
\leqslant\ & \psi'\Delta u^\lambda+(1-2\lambda)\psi' u^\lambda|\nabla\log u|^2\\
&-C_{17}\psi' u^\lambda e^{-\beta\rho}+C_{16}\psi' u^\lambda\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|,
\end{aligned}
\tag{2.4.27}
$$

此处用到 β 和 ρ 充分大，以及 $|\nabla\lambda|<C_6e^{-C_7\rho}$, 因而 $\rho|\nabla\lambda|\to 0$ （当 $\rho\to\infty$).

再计算 ∇u^λ 项

$$
\begin{aligned}
\Delta u^\lambda =\ & u^\lambda[|\nabla\lambda|^2(\log u)^2+2\lambda\log u(\nabla\lambda\cdot\nabla\log u)+\log u\cdot\nabla\lambda\\
&+2\nabla\lambda\cdot\nabla\log u-\lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2]\\
\leqslant\ & u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2+C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\\
&+\log u(\Delta\lambda)-\lambda(1-\lambda)|\nabla\log u\rho|^2].
\end{aligned}
\tag{2.4.28}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\Delta F \leqslant\ & \psi' u^\lambda[(1-2\lambda)|\nabla\log u|^2-C_{17}e^{-\beta\rho}]\\
&+\psi u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2+C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\\
&+(\Delta\lambda)\log u-\lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2].
\end{aligned}
\tag{2.4.29}
$$

分析上式中的 $C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\cdot\psi u^\lambda$ 项. 由通常的 Schwarz 不等式及 ψ 和 $\psi'\rho^2$ 是正有界量的事实，在点 $\{x|\lambda(x)\geqslant\frac{3}{4}\}$ 处,

$$
C_{19}\psi\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\leqslant(2\lambda-1)\psi'|\nabla\log u|^2+C_{20}\psi\rho^4|\nabla\lambda|^2.
$$

将其代入 (2.4.29)，得

$$
\begin{aligned}
\nabla F \leqslant\ & -C_{17}\psi' u^\lambda e^{-\beta\rho}+\psi u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2\\
&+C_{20}\rho^4|\nabla\lambda|^2+(\Delta\lambda)\log u],
\end{aligned}
\tag{2.4.30}
$$

在点 $\{x|\lambda(x) < \frac{3}{4}\}$ 处，当 ρ 充分大时，因为 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}(1-(1-\varepsilon_0)^{2s}) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0$, 因此 $\lambda(1-\lambda) \geqslant \frac{1}{8}\varepsilon_0$. 所以

$$C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u| \leqslant \lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2 + C_{21}\varepsilon_0^{-1}\rho^2|\nabla\lambda|^2,$$

代入 (2.4.29)，注意到 $\psi'\rho^2 \sim \psi$, 当 R_0 充分大时， $\forall x \in T(\theta_1, R_0)$ 也有

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant & -C_{17}\psi' u^{\lambda} e^{-\alpha\rho} + \psi u^{\lambda}[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2 \\ & + C_{21}\varepsilon_0^{-1}\rho^2|\nabla\lambda|^2 + (\Delta\lambda)\log u].\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

(2.4.30) 和 (2.4.31) 合在一起可以写成，只要 R_0 充分大， $\forall x \in T(\theta, R_0)$ 都有

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant & -C_{17}\psi' u^{\lambda} e^{-\beta\rho} \\ & + \psi u^{\lambda}[C_{22}\varepsilon^{-1}\rho^4|\nabla\lambda|^2 + (\Delta\lambda)\log u].\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

再计算 $(\Delta\lambda)\log u$ 项：

$$\begin{aligned}(\Delta\lambda)\log u =& [-\Delta(1-\varphi)^{2s} - \Delta(1-\psi)^s \cdot e^{-\delta_0\rho} \\ & -2\nabla(1-\varphi)^s \cdot \nabla e^{-\delta_0\rho} - (1-\varphi)^s \Delta e^{-\delta_0\rho}](\log u) \\ \leqslant & \big[|\Delta(1-\varphi)^{2s}| + |\Delta(1-\varphi)^s|e^{-\delta_0\rho} \\ & +2|\nabla(1-\varphi)^s||\nabla e^{-\delta_0\rho}|\big]|\log u| \\ & -(1-\varphi)^s\Delta e^{-\delta_0\rho}\log u \\ \leqslant & C_{23}e^{-C_{24}\rho}(1-\varphi)^{s-1} - C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}.\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

这里用到 $|\log u| \sim C\rho$. 另一方面，易证（当 ε_0 取定后），对充分大的 R_0（依赖于 ε_0）， $\rho \geqslant R_0$ 时有

$$\begin{aligned}C_{22}\varepsilon_0^{-1}\rho^4|\nabla\lambda|^2 \leqslant & C_{26}e^{-C_{27}\rho}(1-\varphi)^{s-1} + C_{28}\rho^4\varepsilon_0^{-1}e^{-2\delta_0\rho}(1-\varphi)^{2s} \\ \leqslant & C_{29}e^{-C_{30}\rho}(1-\varphi)^{s-1}.\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

将 (2.4.33) 和 (2.4.34) 代入 (2.4.32)，得

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant & -C_{17}\psi' u^{\lambda} e^{-\beta\rho} + \varphi u^{\lambda}(C_{31}e^{-C_{32}\rho}(1-\varphi)^{s-1} \\ & -C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}) \\ = & -C_{17}\psi' u^{\lambda} e^{-\beta\rho} + \psi u^{\lambda}(1-\varphi)^{s-1}(C_{31}e^{-C_{32}\rho} \\ & -C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)e^{-\delta_0\rho}).\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

如果 $C_{31}e^{-C_{32}\rho}(1-\varphi)^{s-1} \leqslant C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}$, 由上式自然有 $\Delta F \leqslant 0$. 否则, 有

$$0 < 1-\varphi < Ce^{-(C_{32}-\delta_0)\rho}.$$

因而

$$\Delta F \leqslant -C_{17}\psi' u^\lambda e^{-\beta\rho} + \psi u^\lambda C_{32} e^{-(C_{32}+(s-1)(C_{32}-\delta_0))\rho}.$$

只要取 $\delta_0 < C_{32}, \beta < C_{32} + (s-1)(C_{32}-\delta_0)$, 对充分大的 $R_0, \rho(x) \geqslant R_0$ 时, 就仍有

$$\Delta F \leqslant 0.$$

因此, 首先取定充分大的 S, 再顺次定下 $\delta_0, \beta, \varepsilon_0$, 最后定下 R_0, 使当 $x \in T(\theta_1, R_0)$ 时, $\Delta F \leqslant 0$. 定理至此证毕.

2.5　更一般流形上的调和函数

我们在本章第 1 节中证明了: 单连通的完备 Riemann 流形, 如果其截面曲率 K_M 满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$, 则调和函数的 Dirichlet 问题可解. 在第 2 节和第 3 节中又证明了 Poisson 核的存在性及几何边界 与 Martin 边界 的等价关系. 一个自然的问题是: 对于流形的曲率条件可以减弱到何种程度, 使上述结果全部或者部分仍然成立? 从有界对称域上调和分析的经典理论, 我们知道有界对称域上的 Bergman 度量 满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant 0$, 同时 Poisson 核函数是存在的. 因此, 我们希望知道: 在满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant 0$ 的一般的单连通完备 Riemann 流形上, 在何种条件下存在有界调和函数, 存在 Poisson 核 函数, 以及其 Martin 边界是什么样的, 本节将给出这个方向上的一些初步结果.

定义　设 M, N 为同维数的两完备 Riemann 流形. 微分同胚 $\phi: M \to N$, 称为拟等距 的 (quasi-isometry), 如果存在常数 $C > 0, \forall x \in M, X \in T_xM$, 满足

$$\frac{1}{C}|X|_M \leqslant |\phi_* X|_N \leqslant C|X|_M. \tag{2.5.1}$$

定义　完备 Riemann 流形 M 上两个度量 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 称为一致等价度量, 如果存在常数 $C > 0$, 使得

$$\frac{1}{C}\,ds^2 \leqslant\ d\tilde{s}^2 \leqslant C\,ds^2. \tag{2.5.2}$$

显然，若 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 是 M 上一致等价的度量，则恒同映射 $(M, ds^2) \to (M, d\tilde{s}^2)$ 就是拟等距同胚. 根据定理 1.1，如果对 (M, ds^2) 而言，$-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$, 则调和函数的 Dirichlet 问题可解. 今假设 $(M, d\tilde{s}^2)$ 和 (M, ds^2) 一致等价，是否对 $(M, d\tilde{s}^2)$ 而言，调和函数的 Dirichlet 问题仍然可解？一般而言不一定，但在一定情况下可以给出肯定的回答. 为此我们要引进一个关于完备 Riemann 流形的第一特征值的概念（见第三章）.

众所周知，对 M 中任何有界区域 Ω, 其第一特征值 $\lambda_1(\Omega)$（Dirichlet 条件）可以定义为

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{f \in H_{1,0}^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}. \tag{2.5.3}$$

这里 $H_{1,0}^2(\Omega) = \{f \in H_1^2(\Omega) | f|_{\partial\Omega} = 0\}, H_1^2(\Omega)$ 是 Sobolev 空间. 根据这一定义就可推知，如果 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subset\subset M$, 则

$$\lambda_1(\Omega_1) \geqslant \lambda_1(\Omega_2) \geqslant 0. \tag{2.5.4}$$

由特征值关于区域的递减性，我们可以合理地引进下列定义.

定义 完备 Riemann 流形 M 的第一特征值 $\lambda_1(M)$ 定义为

$$\lambda_1(M) = \lim_{R \to \infty} \lambda_1(B(R)), \tag{2.5.5}$$

其中 $B(R)$ 为以某定点为中心，半径为 R 的测地球.

第三章第 4 节的 Mckean 定理 指出，如果 M 的截曲率 $K_M \leqslant -C < 0$, 则 $\lambda_1(M) > 0$.

不难看出，$\lambda_1(M) > 0$ 对 M 上一致等价的度量而言是一个不变的性质. 因为如果 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 一致等价，则两者体积形式 dV 和 $d\tilde{V}$ 也是一致等价的，由 (2.5.1)，$|\nabla f|$ 和 $|\tilde{\nabla} f|$ 也是一致等价，再由第一特征值的极小性质 (2.5.3)，及特征值的递降性 (2.5.4)，自然导致这种不变性. 由此易见，$\lambda_1 > 0$ 在拟等距下也是不变的.

定理 5.1 设单连通的完备 Riemann 流形 $(M, d\tilde{s}^2)$, 其截面曲率满足 $-b^2 \leqslant \widetilde{K}_M \leqslant -a^2 < 0$, 再设 ds^2 是 M 的另一完备度量，它和 $d\tilde{s}^2$ 一致等价. 如果对 (M, ds^2) 而言，其截曲率满足 $|K_M| \leqslant 1$ 及其单射半径 (injectivity radius)> 0, 则对 (M, ds^2) 而言，其调和函数的 Dirichlet 问题可解.

证明 证明的基本路线仿同定理 1.1. 我们仅着重讨论证明中和定理 1.1 不同的地方. 根据 Mckean 定理 对 $(M,\, d\widetilde{s}^2)$ 而言 $\lambda_1(M)>0$, 由 $\lambda_1(M)>0$ 的不变性，不妨假设，对 $(M,\, ds^2)$ 而言， $\lambda_1(M)\geqslant\lambda_0>0$. 又根据题设，不妨假定单射半径（对 ds^2 而言） >1.

取定基点 $O\in M$, 如 $x\in M$, 记 x 与 O 的距离为 $\rho(x)$ 和 $\widetilde{\rho}(x)$（分别对 ds^2 和 $d\widetilde{s}^2$ 而言），由一致等价性,

$$\frac{1}{C}\rho(x)\leqslant\widetilde{\rho}(x)\leqslant C\rho(x),$$

同样的理由， $\exists\delta_2>\delta_1>0$ 使

$$\widetilde{B}_x(\delta_1)\subseteq B_x(1)\subseteq\widetilde{B}_x(\delta_2),$$

其中 B_x 和 $\widetilde{B}_x$ 分别表示 $(M,\, ds^2)$ 和 $(M,\, d\widetilde{s}^2)$ 中的测地球.

在 $(M,\, d\widetilde{s}^2)$ 上 $\partial M=S(\infty)\cong S_O(1)$, 在 $S(\infty)$ 上给定 Lipschitz 函数 $\varphi(\theta)$, 将 φ 沿径向扩充到整个 M 上，则由 (2.1.18)

$$\operatorname{osc}_{\widetilde{B}_x(\delta_2)}\varphi=O(e^{-\alpha\widetilde{\rho}(x)}),$$

因此,

$$\operatorname{osc}_{B_x(1)}\varphi\leqslant\operatorname{osc}_{\widetilde{B}_x(\delta_2)}\varphi=O(e^{-\alpha\widetilde{\rho}(x)})=O(e^{-C_1\rho(x)}).\tag{2.5.6}$$

下一步是将 φ 平均化成 $\widetilde{\varphi}$（见 (2.1.18)）

$$\widetilde{\varphi}=\frac{\int_M\chi(\rho^2(x,y))\varphi(y)\,dy}{\int_M\chi(\rho^2(x,y))\,dy},$$

其中 $\operatorname{supp}\chi\subseteq[-1,1]$, 则同样（见 (2.1.19)~(2.1.20)）可证,

$$\Delta\widetilde{\varphi}=O(e^{-C_1\rho(x)}).\tag{2.5.7}$$

这只要 $|K_M|\leqslant1$ 及当 $\rho(x,y)\leqslant1$ 时， $\rho(x,y)$（对 x）是可微的即可通过，而后者由单射半径 >1 保证.

为了证明 Dirichlet 问题解的存在性, 除了由 φ 构造出满足 (2.5.6) 和 (2.5.7) 的 $\widetilde{\varphi}$ 以外，还需要构造出满足以下条件的函数 $g\in C^\infty(M)$：

$$g(x)>0,\ \lim_{\rho(x)\to\infty}g(x)=0,\ \Delta g\leqslant-C_2e^{-\delta\rho(x)},\tag{2.5.8}$$

其中 δ 充分小，就足以保证定理的成立（见定理 1.1 证明中的 3°）.

为了给出满足 (2.5.8) 的 $g(x)$, 我们在 $B_O(R)\setminus B_O(1)$ 中解以下 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta h_R(x)=-\mu h_R(x),\ 0<\mu<\lambda_1(M),\\ h_R(x)=1,\ x\in\partial B_O(1),\\ h_R(x)=0,\ x\in\partial B_O(R).\end{cases}\tag{2.5.9}$$

和第一章定理 4.2 的证明的第一步完全一样，解 h_R 存在且有结论 $h(x)=\lim\limits_{R\to\infty}h_R(x)$ 存在，并且

$$\begin{cases}\Delta h=-\mu h,\ x\in M\setminus B_O(1),\\ 1>h(x)>0.\end{cases}\tag{2.5.10}$$

因为在 Ricci 曲率 有下界的情况下，对满足 (2.5.10) 方程的解的梯度估计仍然成立（见第一章系 3.4 ）， $|\nabla\log h|<C_2$, 因此

$$h(x)\geqslant e^{-C_2\rho(x)}.\tag{2.5.11}$$

取 $\delta<1$, 令 $g=h(x)^\delta$, 则

$$\begin{aligned}\Delta g&=h^{\delta-2}|\nabla h|^2\delta(\delta-1)+\delta h^{\delta-1}\Delta h\\&\leqslant\delta h^{\delta-1}\Delta h\\&=-\mu\delta h^\delta\\&\leqslant-\mu\delta e^{-\delta C_2\rho(x)}.\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

因此， (2.5.8) 的第 1, 3 式得证. 剩下只需验证 $g(x)\to 0$（当 $\rho(x)\to\infty$ 时），当然只要证 $\lim\limits_{\rho(x)\to\infty}h(x)=0$ 即可.

回到 (2.5.9) 在 $B_O(R)\setminus B_O(1)$ 中， $\Delta h_R=-\mu h_R$,

$$h_R\Delta h_R=-\mu h_R^2,$$

由 Stokes 公式（注意在 $\partial B_O(R)$ 上 $h_R=0$），得

$$\int_{\partial B_O(1)}h_R\frac{\partial h_R}{\partial r}+\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)}|\nabla h_R|^2=\mu\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)}h_R^2,$$

$$\frac{\partial h_R}{\partial r} = \nabla h_R \cdot \nabla r,$$

由梯度估计，$\left|\frac{\partial h_R}{\partial r}\right|$ 是有界量，$h_R|_{\partial B_O(1)} = 1$, 因此

$$\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} |\nabla h_R|^2 - \mu \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} h_R^2 \leqslant C_3,$$

其中 C_3 与 R 无关. 再由 $\lambda_1(B_R)$ 的极小性,

$$\begin{aligned}\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} |\nabla h_R|^2 &\geqslant \lambda_1(B_R) \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} h_R^2 \\ &\geqslant \lambda_1(M) \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} h_R^2 > \mu \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} h_R^2,\end{aligned}$$

所以

$$(\lambda_1(M) - \mu) \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} h_R^2 \leqslant C_3.$$

令 $R \to \infty$, 得

$$\int_M h^2 < +\infty.$$

因此，对充分大的 R, 有 $\int_{M\setminus B_O(R)} h^2 < \varepsilon, \varepsilon$ 可以任意小. 只要 $x \in M \setminus B_O(R)$, 并且 $B_x(1) \subseteq M \setminus B_O(R)$, 在 $B_x(1)$（因为单射半径 $> 1, B_x(1)$ 相当于 $\mathbb{R}^n$ 中的球）上对 $\Delta h = -\mu h$ 利用梯度估计（第一章的定理 3.2 ）就有

$$\begin{aligned}h^2(x) &\leqslant \frac{C}{\mathrm{Vol}\,(B_x(1))} \int_{B_x(1)} h^2 \\ &\leqslant \frac{C}{\mathrm{Vol}\,(B_x(1))} \int_{M\setminus B_O(R)} h^2 \\ &\leqslant \widetilde{C}\varepsilon.\end{aligned}$$

这是因为，$K_M \leqslant +1$, 则 $\mathrm{Vol}\,(B_x(1)) \geqslant$ 常数（见 (1.1.20)），定理至此证毕.

本定理有下列直接推论，其证明是明显的.

系 设 M 是紧致的负曲率流形，则对 M 的任何度量，其通用覆盖流形 $\overline{M}$ 上调和函数的 Dirichlet 问题是可解的.

定理 5.2 设单连通完备 Riemann 流形 M 的截曲率 K_M 满足 $|K_M| \leqslant 1$, 其单射半径 $> 0, \lambda_1(M) > 0$, 并存在一个双曲等距 (hyperbolic isometry)γ, 则 M 上存在非常数的正调和函数.

注 等距 γ 称为双曲的, 如果 M 上存在一测地直线 (geodesic line)σ, 使 $\gamma|_\sigma$ 是 σ 上的一个平移 (translation).

证明 任意固定基点 $O \in \sigma \subseteq M$, 以 O 为中心、 R 为半径的测地球记作 $B(R)$, 距离 $d(O,x)$ 记作 $\rho(x)$.

取 $R>1$, 在 $B(R)\setminus B(1)$ 中解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta f_R(x) = 0, \\ f_R|_{\partial B(1)} = 1,\ f_R|_{\partial B(R)} = 0,\end{cases} \tag{2.5.13}$$

则根据我们一再应用过的 Harnack 原则,

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} f_R(x)$$

存在, 并满足

$$\begin{cases}\Delta f(x) = 0, \\ f|_{\partial B(1)} = 1,\ 1 > f(x) > 0,\ x \in M\setminus B(1).\end{cases} \tag{2.5.14}$$

引理 5.3 在定理条件下, (2.5.14) 中的解 $f(x)$ 满足 ($C_i (i=1,2,\cdots)$ 为不依赖于 R 的常数):

(i) $\int_{M\setminus B(1)} f^2 < +\infty,$ (2.5.15)

(ii) $\int_{M\setminus B(R)} f^2 \leqslant C_1 e^{-C_2 R},$ (2.5.16)

(iii) 当 $\rho(x)$ 充分大时, $f(x) \leqslant C_3 e^{-C_4\rho(x)}$. (2.5.17)

命题的证明 由 (2.5.13)$\Delta f_R = 0$ 得到

$$\begin{aligned}0 &= \int_{B(R)\setminus B(1)} f_R \Delta f_R \\ &= \int_{B(R)\setminus B(1)} |\nabla f_R|^2 + \int_{\partial B(1)} f_R \frac{\partial f_R}{\partial r}.\end{aligned}$$

因为 $f_R|_{\partial B(1)} = 1, \left|\frac{\partial f_R}{\partial r}\right| \leqslant C$ (梯度估计), 因此

$$\int_{B(R)\setminus B(1)} |\nabla f_R|^2 \leqslant C,$$

再由 $\lambda_1(M) > 0$, 得

$$C \geqslant \int_{B(R)\backslash B(1)} |\nabla f_R|^2 \geqslant \lambda_1(M) \int_{B(R)} f_R^2.$$

令 $R \to \infty$, 即有

$$\int_{M\backslash B(1)} f^2 < +\infty,$$
$$\int_{M\backslash B(1)} |\nabla f|^2 < +\infty,$$

此即 (2.5.15) 所欲证.

下证 (2.5.16)，任取 $r > 1$, 作截断 (cut-off) 函数 φ, 满足

$$\varphi = \begin{cases} 0, & x \in B(r), \\ 1, & x \notin B(r+1), \\ 1 \geqslant \varphi \geqslant 0, & x \in B(r+1) \setminus B(r), \end{cases}$$
$$|\nabla\varphi| \leqslant 1.$$

设 $R > r+1$, 由

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(R)} \varphi^2 f_R \Delta f_R \\ &= -\int_{B(R)} \nabla f_R \cdot \nabla(\varphi^2 f_R) + \int_{\partial B(R)} \varphi^2 f_R \frac{\partial f_R}{\partial v} \\ &= -\int_{B(R)} \nabla f_R \cdot \nabla(\varphi^2 f_R) \\ &\quad (\text{因为} f_R|_{\partial B(R)} = 0) \\ &= -\int_{B(R)} \varphi^2 |\nabla f_R|^2 - 2\int_{B(r+1)\backslash B(r)} \varphi f_R \nabla\varphi \cdot \nabla f_R \\ &\quad (\text{因为} \nabla\varphi|_{B(R)\backslash B(r+1)} = 0). \end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\int_{B(R)\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2 &\leqslant 2\left(\int_{B(r+1)\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot\left(\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f_R^2|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant 2\left(\int_{B(r+1)\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot\left(\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f_R^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

故有

$$\int_{B(R)\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2 \leqslant 4\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f_R^2.$$

令 $R\to\infty$, 得

$$\int_{M\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f|^2 \leqslant 4\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2. \tag{2.5.18}$$

另一方面, 因为

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2 &= \int_{M\setminus B(r)}|f\nabla\varphi+\varphi\nabla f|^2\\&\leqslant 2\int_{M\setminus B(r)}(f^2|\nabla\varphi|^2+\varphi^2|\nabla f|^2)\\&\leqslant 2\left(\int_{M\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f|^2+\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2\right),\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

结合 (2.5.18), 也有

$$\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2 \leqslant C\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2, \tag{2.5.20}$$

其中 C 为常数.

题设 $\lambda_1(M)>0$, 因此存在 $C_1, 0<C_1<\lambda_1(M)$, 使

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2 &\geqslant C_1\int_{M\setminus B(r)}(\varphi f)^2\\&\geqslant \int_{M\setminus B(r+1)}f^2.\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

联合 (2.5.20) 与 (2.5.21)，得

$$
\begin{aligned}
\int_{M\backslash B(r+1)} f^2 &\leqslant C_2 \int_{B(r+1)\backslash B(r)} f^2 \\
&= C_2 \left[\int_{M\backslash B(r)} f^2 - \int_{M\backslash B(r+1)} f^2\right] \\
\int_{M\backslash B(r+1)} f^2 &\leqslant \frac{C_2}{1+C_2}\int_{M\backslash B(r)} f^2 \\
&\leqslant \left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^2 \int_{M\backslash B(r-1)} f^2 \leqslant \cdots
\end{aligned}
$$

如果一开始即取 $r=2k$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_{M\backslash B(2k)} f^2 &\leqslant \left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^k \int_{M\backslash B(k)} f^2 \\
&\leqslant \left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^k \int_{M\backslash B(1)} f^2 \\
&\leqslant C_3 e^{-k\log\left(\frac{1+C_2}{C_2}\right)} \\
&\leqslant C_3 e^{-\frac{r}{2}\log\left(\frac{1+C_2}{C_2}\right)},
\end{aligned}
$$

此即 $\int_{M\backslash B(r)} f^2 \leqslant C_3 e^{-C_4 R}$,(2.5.16) 证毕.

最后证明 (2.5.17). 题设 M 的单射半径 $a>0$, 当 $\rho(x)$ 充分大时，令 $R=\rho(x)-a$, 由 (2.5.16)

$$
\int_{M\backslash B(R)} f^2 \leqslant C_3 e^{-C_4 R} = C_3' e^{-C_4\rho(x)},
$$

在 $B_x(a)$ 中考虑 $\Delta f=0$, 因为 $K_M \geqslant -1$, Harnack 不等式 成立，因此

$$
\sup_{B_x(a)} f \leqslant C_5 \inf_{B_x(a)} f,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &\leqslant \frac{C_5}{\mathrm{Vol}\,(B_x(a))}\int_{B_x(a)} f^2 \\
&\leqslant \frac{C_5}{\mathrm{Vol}\,(B_x(a))}\int_{M\backslash B(R)} f^2 \\
&\leqslant C_6 e^{-C_4\rho(x)},
\end{aligned}
$$

最后式用到 $\mathrm{Vol}\,(B_x(a)) \geqslant$ 常数，这是因为 $K_M \leqslant 1$. 至此引理 5.3 证毕.

现在回到定理 5.2 的证明. 由于 $\lambda_1(M) > 0, M$ 具有整体 Green 函数 $G(x,y)$（见本章附录定理 A.3 ）. 将 (2.5.14) 中定义的调和函数 $f(y)$ 和 $G(O,y)$ 相比较，存在正常数 $C_1 > 0$, 使

$$1 = f|_{\partial B(1)} \geqslant CG(O,y)|_{\partial B(1)},$$

由极大值原理,

$$f(y) \geqslant CG(O,y),$$

因此由 (2.5.17)，有

$$G(O,x) \leqslant C_3 e^{-C_4\rho(x)}. \tag{2.5.22}$$

命

$$u(x) = \lim_{\substack{y\in\sigma \\ y\to\infty}} \frac{G(x,y)}{G(O,y)}, \tag{2.5.23}$$

易见 $\Delta u(x) = 0, u > 0, u(O) = 1$, 如果我们能证明 $u(x) \not\equiv 1$, 则 $u(x)$ 即为定理所要求的正调和函数. 证明这一点的方法是反证.

设 γ 是题设中的双曲等距 同胚，现假定

$$u(\gamma(O)) = \lim_{\substack{y\in\sigma \\ y\to\infty}} \frac{G(\gamma(O),y)}{G(O,y)} \leqslant 1. \tag{2.5.24}$$

任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $y_0 \in \sigma$, 使 $\forall y \in \sigma$, 当 $\rho(y_0) < \rho(y)$ 时，有

$$\frac{G(\gamma(O),y)}{G(O,y)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

取 $i_0 \in \mathbb{Z}$, 使 $\rho(\gamma^{i_0}(O)) \geqslant \rho(y_0)$, 因 γ 是等距同胚， $G(\gamma(x),\gamma(y)) = G(x,y)$, 因此 $\forall i > i_0$,

$$\begin{aligned} 1+\varepsilon &\geqslant \frac{G(\gamma(O),\gamma^i(O))}{G(O,\gamma^i(O))} \\ &= \frac{G(O,\gamma^{i-1}(O))}{G(O,\gamma^i(O))}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)^{i-i_0} &\geqslant \frac{G(O,\gamma^{i_0-1}(O))}{G(O,\gamma_0^i(O))} \cdot \frac{G(O,\gamma^{i_0}(O))}{G(O,\gamma^{i_0+1}(O))} \cdot \cdots \cdot \frac{G(O,\gamma^{i-1}(O))}{G(O,\gamma^i(O))} \\ &= \frac{G(O,\gamma^{i_0-1}(O))}{G(O,\gamma^i(O))}, \end{aligned}$$

$$G(O,\gamma^i(O)) \geqslant G(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{-(i-i_0)\log(1+\varepsilon)}. \tag{2.5.25}$$

因为 γ 是等距同胚，$d(\gamma^{i+1}(O),\gamma^i(O)) = d(O,\gamma(O)) = C_0$, 由此，$d(O,\gamma^i(O)) = iC_0, i = \frac{1}{C_0}d(O,\gamma^i(O))$,(2.5.25) 成为

$$\begin{aligned} G(O,\gamma^i(O)) &\geqslant G(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{i_0\log(1+\varepsilon)}e^{-\frac{1}{C}d(O,\gamma^i(O))\log(1+\varepsilon)} \\ &= G(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{i_0\log(1+\varepsilon)}e^{-\frac{1}{C_0}\log(1+\varepsilon)\rho(\gamma^i(O))}. \end{aligned}$$

如果取 ε 使 $\frac{\log(1+\varepsilon)}{C_0} < C_4$ (C_4 为 (2.5.22) 中之指数常数)，则上式就与 (2.5.22) 相矛盾. 因此只能 $u(\gamma(O)) > 1$, 因为 $u(O) = 1$, 所以 $u \neq$ 常数. 定理证毕.

根据定理 5.1 与定理 5.2，我们提出下列猜测以结束本节：

猜测 设 M 是单连通的完备 Riemann 流形，$|K_M| \leqslant 1$, 单射半径 $> 0, \lambda_1(M) > 0$, 则 M 上存在非常数的有界调和函数.

2.6 次调和函数与次中值公式

熟知，在 $\mathbb{R}^n$ 的经典调和函数论中有所谓中值公式（对调和函数）和次中值公式（对次调和函数）. 这些公式对研究调和函数和次调和函数的性质，特别是证明 Liouville 型定理 都起重要的作用，这些公式是：

中值公式（次中值公式）：设 $u(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\Delta u = 0(\Delta u \geqslant 0)$, 则 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0$, 都有

$$u(x_0) \underset{(\leqslant)}{=} \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_{x_0}(R))}\int_{B_{x_0}(R)} u, \tag{2.6.1}$$

其中 $B_{x_0}(R)$ 是以 x_0 为中心、 R 为半径的球.

推广次中值公式至一般的完备 Riemann 流形自然是流形上分析的课题之一，一般这种推广可以有两条途径，一是根据 Riemann 几何中的比较定理 ，将流形与某类空间形式加以比较，通过 Stokes 公式而得到. 这种类型的结果可以举以下定理为例.

定理 设 M 是完备的 Riemann 流形，$x_0 \in M, M$ 在 $B_{x_0}(R)$ 的截曲率 $\leqslant k$, 而 R 小于 x_0 的单射半径，又记 M_k 为常曲率 k 的空间形式. 设 $u \in C^\infty(M), \Delta u \geqslant 0, u \geqslant 0$, 则

$$u(x_0) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B^k(R))}\int_{B_{x_0}(R)} u, \tag{2.6.2}$$

其中 $B^k(R)$ 表示 M_k 中以 R 为半径的测地球.

本节将给出讨论次中值公式的另一种方法，把次调和函数与调和函数作比较，利用第一章中调和函数的梯度估计. 我们首先从估计 Poincaré 型不等式的常数出发.

引理 6.1 设 M 是可带边界的完备 Riemann 流形， Ric $(M) \geqslant -(n-1)K$, 任意固定 $O \in M$, 以 O 为中心、 R 为半径的测地球记作 $B(R)$, 设

$$B(5R) \subset\subset M,$$

则存在仅依赖于 $n = \dim M$ 的正常数 C_1 和 C_2, 使

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(B(R)),$$

有

$$\int_{B(R)} |\varphi|^p \leqslant C_1 R^p e^{C_2\sqrt{K}R} \int_{B(R)} |\nabla\varphi|^p, \tag{2.6.3}$$

此处 $p \geqslant 1$.

证明 在 $\partial B(3R)$ 上任意固定一点 x_1, 记相对于 x_1 的距离为 ρ_1, 即 $\rho_1(x) =$ dist (x_1, x), 因为 Ric $(M) \geqslant -(n-1)K$, 由比较定理 (1.1.8) ,

$$\Delta\rho_1 \leqslant \frac{n-1}{\rho_1} + (n-1)\sqrt{K}. \tag{2.6.4}$$

当 $x \in B(R)$ 时， $2R \leqslant \rho_1(x) \leqslant 4R$,

$$\Delta\rho_1 \leqslant \frac{n-1}{2R} + (n-1)\sqrt{K} = \alpha_0,$$

取 $\alpha = \frac{n-1}{R} + 2(n-1)\sqrt{K} = 2\alpha_0$, 则

$$\begin{aligned} \Delta e^{-\alpha\rho_1} &= e^{-\alpha\rho_1}(-\alpha\Delta\rho_1 + \alpha^2) \\ &= \alpha e^{-\alpha\rho_1}(\alpha - \Delta\rho_1) \\ &\geqslant 2\alpha_0^2 e^{-\alpha\rho_1}. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

任取 $\varphi \in C_0^\infty(B(R)), \varphi \geqslant 0$, 则 $\varphi\Delta e^{-\alpha\rho_1} \geqslant \alpha_0\alpha e^{-\alpha\rho_1}\varphi$, 注意 (2.6.5) 是在分布意义下的不等式，因此

$$\alpha\int_{B(R)} e^{-\alpha\rho_1}(\nabla\varphi\cdot\nabla\rho_1) \geqslant \alpha_0\cdot\alpha\int_{B(R)} \varphi e^{-\alpha\rho_1},$$

$$\int_{B(R)} e^{-\alpha\rho_1}|\nabla\varphi| \geqslant \alpha_0 \int_{B(R)} \varphi e^{-\alpha\rho_1},$$

$$\alpha_0 \int_{B(R)} \varphi \leqslant \left(\frac{\inf\limits_{B(R)} e^{-\alpha\rho_1}}{\sup\limits_{B(R)} e^{-\alpha\rho_1}}\right)^{-1} \int_{B(R)} |\nabla\varphi|.$$

当 $x \in B(R)$ 时，由 $2R \leqslant \rho_1(x) \leqslant 4R, e^{-2\alpha R} \geqslant e^{-\alpha\rho_1} \geqslant e^{-4\alpha R}$ 将 $\alpha = 2\alpha_0 = \frac{n-1}{R} + 2(n-1)\sqrt{K}$ 代入上式，即得

$$\int_{B(R)} \varphi \leqslant C_1 R e^{C_2\sqrt{K}R} \int_{B(R)} |\nabla\varphi|, \tag{2.6.6}$$

其中 C_1, C_2 仅依赖于 n. 以 $\varphi^p (p > 1)$ 代入 (2.6.6)

$$\int_{B(R)} \varphi^p \leqslant C_1 R e^{C_2\sqrt{K}R} \int_{B(R)} p\varphi^{p-1}|\nabla\varphi|,$$

再用 Hölder 不等式得出 (2.6.3).

定理 6.1 设 M 是完备的 Riemann 流形， Ric $(M) \geqslant -K, u \geqslant 0, \Delta u \geqslant 0, \tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则

$$\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 \leqslant C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)} \hat{\int}_{B(R)} u^2, \tag{2.6.7}$$

其中 C_1, C_2 为常数，$\hat{\int}_{B(R)} = \frac{1}{\operatorname{Vol} B(R)} \int_{B(R)}$.

证明定理需要以下两个引理. 第一个是正同调函数的 Harnack 不等式 .

引理 6.2 在定理条件下，如果在 $B(R)$ 中成立 $\Delta h = 0, h > 0$ 则

$$\sup_{B((1-\tau)R)} h^2 \leqslant \tau^{-C(1+\sqrt{K}R)} \inf_{B((1-\tau)R)} h^2, \tag{2.6.8}$$

其中 C 为常数.

证明 根据调和函数的梯度估计 (第一章的系 3.4).

$$(R^2 - \rho^2(x))\frac{|\nabla h|}{h} \leqslant C_1 R(1 + \sqrt{K}R),$$

这里 $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, O)$, O 是 $B(R)$ 的中心. 因此

$$|\nabla \log h| \leqslant C_1(1 + \sqrt{k}R)\frac{1}{R - \rho}.$$

如 $h(x_1) = \sup_{B((1-\tau)R)} h(x), x_1 \in B((1-\tau)R)$, 则

$$\log \frac{h(x_1)}{h(O)} \leqslant C_1(1+\sqrt{K}R) \int_0^{(1-\tau)R} \frac{ds}{R-s} = \log \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)}.$$

因此,

$$\sup_{B((1-\tau)R)} h(x) \leqslant h(O) \cdot \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)},$$

同理,

$$h(O) \leqslant \inf_{B((1-\tau)R)} h \cdot \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)},$$

两者合在一起, 即得引理 6.2.

引理 6.3 如果在 $B((1+a)R)$ 中 $u \geqslant 0, \Delta u \geqslant 0$, 则

$$\int_{B(R)} |\nabla u|^2 \leqslant \frac{C}{a^2R^2} \int_{B((1+a)R)} u^2. \tag{2.6.9}$$

证明 取函数 $\varphi \in C_0^\infty(B((1+a)R))$, 使 $|\nabla\varphi| \leqslant \frac{C}{aR}$ 及

$$\varphi = \begin{cases} 1, & x \in B(R), \\ 0, & x \in \partial B((1+a)R), \end{cases}$$

则由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{B((1+a)R)} \varphi^2 u \Delta u \\ &= -\int_{B((1+a)R)} \varphi^2 |\nabla u|^2 - 2\int_{B((1+a)R)} \varphi u \nabla\varphi \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{B((1+a)R)} \varphi^2 |\nabla u|^2 &\leqslant -2\int_{B((1+a)R)} \varphi u \nabla\varphi \cdot \nabla u \\ &\leqslant 2\left(\int_{B((1+a)R)} \varphi^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B((1+a)R)} u^2|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} |\nabla u|^2 &\leqslant \int_{B((1+a)R)} \varphi^2|\nabla u|^2 \\ &\leqslant 4\int_{B((1+a)R)} u^2|\nabla\varphi|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{a^2R^2} \int_{B((1+a)R)} u^2. \end{aligned}$$

引理 6.3 证毕.

现在回到定理 6.1 的证明. 在 $B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)$ 中解 Dirichlet 问题如下:

$$\begin{cases} \Delta h=0, & \text{在}\, B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)\text{中}, \\ h=u, & \text{在}\, \partial B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)\text{上}, \end{cases} \tag{2.6.10}$$

则在 $B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)$ 上 $\Delta(u-h)\geqslant 0$. 由极大值原理,

$$0\leqslant u\leqslant h, \text{在}\, B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)\text{中}.$$

由刚刚证明过的引理 6.2,

$$\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 \leqslant \sup_{B((1-\tau)R)} h^2 \leqslant C_1\tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)} \hat{\int}_{B((1-\tau)R)} h^2, \tag{2.6.11}$$

下面估计 $\int h^2$.

$$\begin{aligned} \int_{B((1-\tau)R)} h^2 &= \int_{B((1-\tau)R)} (h-u+u)^2 \\ &\leqslant 2\int_{B((1-\tau)R)} u^2 + 2\int_{B((1-\tau)R)} (h-u)^2, \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

但 $h-u\in C^2\left(B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)\right)$, $h-u|_{\partial B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}=0$, 通过引用引理 6.1,

$$\begin{aligned} \int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} (h-u)^2 &\leqslant R^2 e^{C_3\sqrt{K}R} \int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} |\nabla(h-u)|^2 \\ &\leqslant 2R^2 e^{C_3\sqrt{K}R} \int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} [|\nabla h|^2+|\nabla u|^2] \\ &\leqslant 4R^2 e^{C_3\sqrt{K}R} \int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

式中用到 $\int|\nabla h|^2\leqslant\int|\nabla u|^2$ 是由于 Dirichlet 极小原则. 再由引理 6.3,

$$\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} |\nabla u|^2 \leqslant \frac{C}{(\tau R)^2}\int_{B(R)} u^2,$$

因此

$$\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)} (h-u)^2 \leqslant \frac{4}{\tau^2} e^{C_3\sqrt{K}R}\int_{B(R)} u^2,$$

代入 (2.6.12)，

$$\int_{B((1-\tau)R)} h^2 \leqslant \left(\frac{4}{\tau^2} e^{C_3\sqrt{K}R} + 2\right) \int_{B(R)} u^2.$$

$$\begin{aligned}\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 &\leqslant \frac{C_1\tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)}}{\operatorname{Vol} B((1-\tau)R)} \left(2 + \frac{4}{\tau^2} e^{C_3\sqrt{K}R}\right) \int_{B(R)} u^2 \\ &\leqslant C_1\tau^{-C_4(1+\sqrt{K}R)} e^{C_5\sqrt{K}R} \hat{\int}_{B(R)} u^2 \cdot \frac{\operatorname{Vol} B(R)}{\operatorname{Vol} B((1-\tau)R)}.\end{aligned}$$

因为 $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tau^{-1} \geqslant 2, \tau^{-2} \geqslant e$, 所以

$$\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 \leqslant C_1\tau^{-C_6(1+\sqrt{K}R)} \hat{\int}_{B(R)} u^2 \cdot \frac{\operatorname{Vol} B(R)}{\operatorname{Vol} B((1-\tau)R)}. \tag{2.6.13}$$

根据第一章的命题 4.3，当 Ric $(M) \geqslant -K$ 时，即有 $R^{-n}e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}R}\operatorname{Vol} B(R)$ 是 R 的递降函数，因而

$$R^{-n}e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}R}\operatorname{Vol} B(R) \leqslant (1-\tau)^{-n} R^{-n} e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}(1-\tau)R}\operatorname{Vol} B((1-\tau)R),$$

$$\frac{\operatorname{Vol} B(R)}{\operatorname{Vol} B((1-\tau)R)} \leqslant (1-\tau)^{-n} e^{\frac{\sqrt{K}}{2}\tau R},$$

代入 (2.6.13) 并忆及 $e \leqslant \tau^{-2}$, 即得

$$\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 \leqslant C_1\tau^{-\widetilde{C}_7(1+\sqrt{K}R)} \hat{\int}_{B(R)} u^2.$$

定理证毕.

系 如果 Ric $(M) \geqslant -K, u \geqslant 0, \Delta u \geqslant 0$, 则

$$u^2(x_0) \leqslant C_1 e^{C_2\sqrt{R}} \hat{\int}_{B(R)} u^2(x). \tag{2.6.14}$$

证明 在 (2.6.7) 中取 $\tau = e^{-1}$ 即可.

由此可得：设 M 为完备的 Riemann 流形， Ric$(M) \geqslant 0$, 则 M 上任何有界调和函数皆为常数.

这一结论在第一章中已用梯度估计证过，下面用次中值公式重证如下：因为 $\Delta u = 0$, 所以 $\Delta|\nabla u| \geqslant 0$, 因此根据 (2.6.14)，有

$$|\nabla u|^2(x_0) \leqslant C_1 \hat{\int}_{B(R)} |\nabla u|^2(x),$$

但由引理 6.3 ,

$$
\begin{aligned}
|\nabla u|^2(x_0) &\leqslant \frac{C_1}{R^2}\hat{\int}_{B(2R)} u^2(x) \\
&\leqslant \frac{\text{常数}}{R^2}.
\end{aligned}
$$

令 $R\to\infty, |\nabla u(x_0)|=0$, 证毕.

定理 6.3 设 M 为完备 Riemann 流形, u 为正的次调和函数, 即 $\Delta u\geqslant 0$, 同时 $u\in L^p(M), p>1$, 则 u 必为常数.

证明 设 $p=1+\lambda, \lambda>0$. 任取 $\varphi\in C_0^\infty(B(2R)), \varphi|_{B(R)}\equiv 1$, 使 $|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C}{R}$, 则

$$
0\leqslant\int_M \varphi^2 u^\lambda \Delta u = -\int_M \nabla u\cdot\nabla(\varphi^2 u^\lambda).
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_{B(2R)} u^{\lambda-1}\varphi^2|\nabla u|^2 &\leqslant 2\int_{B(2R)} u^\lambda\varphi|\nabla u\cdot\nabla\varphi| \\
&\leqslant 2\left(\int_{B(2R)}|\nabla u|^2 u^{2a}\varphi^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(2R)}|\nabla\varphi|^2 u^{2b}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

其中 a,b 满足 $a+b=\lambda, 2b=1+\lambda$. 因此,

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_{B(2R)} u^{\lambda-1}\varphi^2|\nabla u|^2 &\leqslant 4\int_{B(2R)}|\nabla\varphi|^2 u^{1+\lambda} \\
&\leqslant \frac{C_1}{R^2}\int_M u^p.
\end{aligned}
$$

令 $R\to\infty$, 只能 $|\nabla u|\equiv 0$. 定理证毕.

注 定理 6.3 当 $p=1$ 时不正确. 存在完备的 Riemann 流形及 $u>0, \Delta u=0, u\in L^1(M)$, 但 u 不是常数. 关于这方面的进一步的工作请参考 P. Li 和 R. Schoen 的文章: Acta Math., 153(1984), 279-301.

附录 整体 Green 函数的存在性

设 M 是非紧、完备的 n 维 Riemann 流形. 我们讨论 M 上整体 Green 函数的存在性. 所谓整体 Green 函数是 $M\times M\setminus\operatorname{diag}(M\times M)$ 上的光滑函数 (这里 $\operatorname{diag}(M\times M)=\{(x,x)\in M\times M : x\in M\}$), 满足

1° $G(x,y)=G(y,x)$, 且在 y 固定时，有 $\Delta_x G(x,y)=0, \forall x\neq y$；

2° $G(x,y)\geqslant 0$；

3° 固定 y, 则当 $x\to y$ 时有

$$G(x,y)=\begin{cases}\rho_y(x)^{2-n}(1+o(1)), & \text{如} n>2,\\ -\log\rho_y(x)\cdot(1+o(1)), & \text{如} n=2.\end{cases}$$

其中 $\rho_y(x)$ 表示 x 到 y 点的距离. 令 O 为 M 上的一定点， $R>0$, 记 $B(R)$ 为以 O 为中心， R 为半径的测地开球. 我们知道存在 $B(R)$ 上的 Green 函数 $G_R(x,y)$, 它在 $\overline{B(R)}\times\overline{B(R)}\setminus\mathrm{diag}\,(\overline{B(R)}\times\overline{B(R)})$ 上定义，满足上述 1°～3°, 并且还满足 Dirichlet 条件：

4° $G_R(x,y)=0, \forall y\in B(R), x\in\partial B(R)$. 利用极大值原理可以得出：设 y 固定，

如 $R_2\geqslant R_1$, 则

$$G_{R_2}(x,y)\geqslant G_{R_1}(x,y),\ \forall x\in B(R)\setminus\{y\}. \tag{A.1}$$

事实上，由 2°, 4° 可知，任取 $\varepsilon>0$ 在 $\partial B(R_1)$ 上总有

$$(1+\varepsilon)G_{R_2}(x,y)\geqslant G_{R_1}(x,y). \tag{A.2}$$

又由 3° 可知，存在充分小的 $r>0$ 使得以上不等式对 $x\in\partial B(r)$ 也成立. 因此，由极大值原理， (A.2) 在 $B(R_1)\setminus B(r)$ 上成立. 但 r 可以任意小，故 (A.2) 在 $B(R)\setminus\{y\}$ 上成立. 令 $\varepsilon\to 0$, 即得 (A.1).

(A.1) 说明如果对于 $x\neq y, G_R(x,y)$ 上方有界，则可以定义 $G(x,y)=\lim\limits_{R\to\infty}G_R(x,y)$, 并验证 $G(x,y)$ 即是整体 Green 函数 . 以下定理指出在相当一般的条件下(即只要存在在无穷远处趋于 0 的正值上调和函数), 这确实是可行的.

定理 A.1 设 M 为非紧、完备 Riemann 流形. 如果存在 $\varphi\in C^2(M)$ 满足： $\varphi>0, \Delta\varphi\leqslant 0$ 以及 $\varphi(x)\to 0$ 当 $\rho(x)\to\infty$, 则 M 上存在整体 Green 函数.

证明 令 $G_R(x,y)$ 如上所述, 固定 $y\in M$, 将证: 对每个 $r>0$, 存在 $C(r)>0$, 使得

$$\lim_{R\to\infty}G_R(x,y)\leqslant C(\rho_y(x)),\quad \forall x\in M. \tag{A.3}$$

设不然，则存在某个 $r_0 > 0$, 使得

$$m_R = \max\{G_R(x,y) : x \in \partial B_y(r_0)\} \to +\infty,$$

当 $R \to \infty$. 令 $v_R = \delta m_R^{-1} G_R(x,y)$ 则 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)} v_R = \delta$, 且由极大值原理

$$0 \leqslant v_R(x) \leqslant \delta, \quad \forall x \in B(R) \setminus B_y(r_0).$$

取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $v_R(x) \leqslant \varphi(x), \forall x \in \partial B_y(r_0)$. 注意在 $\partial B(R)$ 上 $v_R = 0 < \varphi$. 因此由极大值原理

$$v_R(x) \leqslant \varphi(x),\ \forall x \in B(R) \setminus B_y(r_0). \tag{A.4}$$

另一方面，取定 $\overline{R} > 0$, 使 $B_y(r_0) \subset B(\overline{R})$, 以及任取 $\varepsilon > 0$. 用证明 (A.1) 的同样方法可证：当 $\delta m_R^{-1} < \varepsilon$ 时，有

$$v_R(x) \leqslant \delta + \varepsilon G_{\overline{R}}(x,y),\ \forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}. \tag{A.5}$$

(A.2) 和 (A.5) 一起给出了 v_R 的一个不依赖于 R 的上界估计. 因此, 由于 $\Delta v_R = 0$, 利用椭圆方程的内估计 以及抽取对角线子列的办法（参见第一章定理 4.2 的证明）可知存在 $R_i \to \infty$, 使得 v_{R_i} 在 $M \setminus \{y\}$ 的每个紧致区域上 C^2 收敛于某个函数 $\overline{v} \in C^2(M \setminus \{y\})$, 满足 $\Delta \overline{v} = 0$. 由 (A.4) 推出 $\overline{v}(x) \leqslant \varphi(x), \forall x \in M \setminus B_y(r_0)$, 因此

$$\overline{v}(x) \to 0, \quad \text{当}\ \rho(x) \to \infty. \tag{A.6}$$

又由 (A.5) 推出 $\overline{v}(x) \leqslant \delta + \varepsilon G_R(x,y), \forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}$. 但 ε 可任意小，所以

$$\overline{v}(x) \leqslant \delta, \quad \forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}. \tag{A.7}$$

又注意 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)} v_R = \delta$, 因此 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)} \overline{v} = \delta$. 由 (A.6) 和 (A.7) 可知 $\overline{v}$ 在 $M \setminus \{y\}$ 的内部某点 $x_0 \in \partial B_y(r_0)$ 达到极大值 δ. 但 $\overline{v}$ 是调和函数，由极大值原理推出 $\overline{v} \equiv \delta > 0$, 这显然与 (A.6) 矛盾. 这个矛盾证明了 (A.3).

任取 $0 < r_i < R_i$, 满足 $r_i \to 0$ 和 $R_i \to \infty$. 利用极大值原理和 (A.3) 即可得到估计：

$$G_R(x,y) \leqslant 1 + \max(C(r_i), C(R_i)),$$
$$\forall x \in B(R_i) \setminus B(r_i),\ \text{当}\ R\ \text{充分大时}.$$

从这个估计出发，仍利用椭圆方程的内估计和抽对角线子列的办法，可以推出 $G(x,y)=\lim\limits_{R\to\infty}G_R(x,y)$ 存在并满足 $\Delta_x G(x,y)=0, x\in M\setminus\{y\}$. 最后，不难利用 $G_R(x,y)$ 的性质，验证 $G(x,y)$ 满足 $1^\circ\sim 3^\circ$, 因而是所求的整体 Green 函数. 详细证明请读者自己补出.

在以上定理中，如果把上调和函数 $\varphi(x)$ 在无穷远处为零的条件改成可积性条件，则可以得出：

定理 A.2　设 M 为非紧、完备 Riemann 流形，其体积

$$\mathrm{Vol}\,(M)=\infty.$$

如果存在 $\varphi\in C^2(M)$ 满足：　$\varphi>0,\ \Delta\varphi\leqslant 0$ 以及 $\int_M\varphi^p\,dV<\infty$, 其中 $p>1$, 则 M 具有整体 Green 函数 .

证明　和定理 A.1 的证明完全一样，只是 (A.6) 这时为：

$$\int_M \overline{v}^p<\infty.$$

又注意 (A.7) 保证 $\overline{v}$ 是 M 上的整体调和函数 (即奇点 y 可去), 因而由定理 6.3 可知 $\overline{v}\equiv\delta>0$. 于是 $\int_M\overline{v}^p\,dV=\delta^p\mathrm{Vol}(M)=\infty$, 与 $\int_M\overline{v}^p\,dV<\infty$ 矛盾.

定理 A.3　设 M 为非紧、完备 Riemann 流形. 如果 $\lambda_1(M)>0$, 则 M 具有整体 Green 函数.

证明　证明方法仍仿照定理 A.1. 注意我们有

$$0\leqslant v_R(x)\leqslant\delta,\quad\forall\,x\in B(R)\setminus B_y(r_0).\tag{A.8}$$

我们的目的是利用 $\lambda_1(M)>0$ 证明：如果 $B_y(r_0)\subset B(R_0)$, 这里 $0<R_0<\dfrac{1}{2}R$, 则

$$\int_{B(R)\setminus B(R_0)}v_R^2\,dV\leqslant C,\quad\forall\,R>2R_0,\tag{A.9}$$

其中 C 是不依赖于 R 的常数. 假定 (A.9) 成立，则由于 v_{R_i} 在 $M\setminus\{y\}$ 的每一紧区域上一致收敛于 $\overline{v}$, 利用 Fatou 引理可推出

$$\int_{M\setminus B(R_0)}\overline{v}^2\,dV\leqslant C.$$

结合 (A.7) 即有 $\int_M\overline{v}^2\,dV<\infty$. 再由定理 6.3 知 $\overline{v}\equiv\delta>0$. 于是 $\mathrm{Vol}\,(M)=\delta^{-2}\int_M\overline{v}^2\,dV<\infty$. 定义 Lipschitz 函数 u_R 使在 $B(R)$ 上 $u_R\equiv 1$, 在 $M\setminus B(R+1)$

上 $u_R \equiv 0$, 在其余处 $0 \leqslant u_R \leqslant 1$, 并且 $|\nabla u_R| \leqslant C$ 几乎处处成立. 由 $\lambda_1(M)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\lambda_1(M) &\leqslant \int_M |\nabla u_R|^2\,dV \Big/ \int_M u_R^2\,dV \\ &\leqslant C^2\frac{\mathrm{Vol}\,(B(R+1)\setminus B(R))}{\mathrm{Vol}\,(B(R))}.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Vol}(M) < \infty$, 上式右端 $\to 0$ 当 $R \to \infty$, 因此 $\lambda_1(M) = 0$, 这与原设矛盾. 这个矛盾证明了 (A.3). 以下的证明与定理 A.1 相同.

为了完成定理 A.3 的证明，我们只需证明 (A.9). 令 η 为一 Lipschitz 截断函数，满足: $\eta \equiv 0$ 在 $B(R_0)$ 中, $\eta \equiv 1$ 在 $M \setminus B(2R_0)$ 中, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ 以及 $|\nabla\eta| \leqslant \frac{C}{R_0}$, 则有（注意 $v_R|\partial B(R) = 0$）

$$\begin{aligned}0 &= \int_{B(R)\setminus B(R_0)} \eta^2 v_R \Delta v_R\,dV \\ &= -\int_{B(R)\setminus B(R_0)} \nabla v_R \cdot \nabla(\eta^2 v_R)\,dV \\ &= \int_{B(2R_0)\setminus B(R_0)} |\nabla\eta|^2 v_R^2\,dV - \int_{B(R)\setminus B(R_0)} |\nabla(\eta v_R)|^2\,dV.\end{aligned}$$

又由 $\lambda_1(M)$ 之定义，有

$$\begin{aligned}\lambda_1(M)\int_{B(R)\setminus B(2R_0)} v_R^2\,dV &\leqslant \lambda_1(M)\int_{B(R)\setminus B(R_0)} (\eta v_R)^2\,dV \\ &\leqslant \int_{B(R)\setminus B(R_0)} |\nabla(\eta v_R)|^2\,dV \\ &= \int_{B(2R_0)\setminus B(R_0)} |\nabla\eta|^2 v_R^2\,dV \\ &\leqslant \frac{C^2}{R_0^2}\int_{B(2R_0)\setminus B(R_0)} v_R^2\,dV \\ &\leqslant \frac{C^2\delta^2}{R_0^2}\mathrm{Vol}\,(B(2R_0)\setminus B(R_0)) \\ &= C'.\end{aligned}$$

由于 $\lambda_1(M) > 0$,(A.9) 因而得证. 定理 A.3 至此证毕.

第 三 章　特征值问题

3.1　特征值的基本性质

设 M 是 n 维紧 Riemann 流形具有边界 ∂M（可能 $\partial M=\varnothing$），其度量在局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 下的表示为 $ds^2=\sum g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, 其 Laplace 算子

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其中 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}, g=\det(g_{ij})$.

为了研究 Laplace 算子 的谱问题，我们首先引述若干熟知事实. 设 $\varphi\in C^\infty(M)$, 令

$$||\varphi||_1^2=\int_M\varphi^2+\int_M|\nabla\varphi|^2,$$

对 $||\cdot||_1$ 而言的完备化 Hilbert 空间是熟知的 Sobolev 空间， 记作 $H_1^2(M)$, 如果 $\varphi\in C_0^\infty(M)$, 其完备化的 Hilbert 空间记为$\overset{\circ}{H}{}_1^2(M)$. Sobolev 空间的基本理论指出，当 M 是完备 Riemann 流形时， $H_1^2(M)=\overset{\circ}{H}{}_1^2(M)$.

另一熟知的事实是:

$H_1^2(M)\ni\varphi\Leftrightarrow\varphi$ 具有一阶 L^2 广义导数.

当 $\partial M=\varnothing$ 时， Δ 是作用在 $H_1^2(M)$ 上的二阶椭圆型自共轭算子 . 根据自共轭算子的谱理论，它具有离散的特征值： $\{0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\}$, 及相应

的特征函数 $\{\phi_i\}$,

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i,\ \phi_i \not\equiv 0,\ \phi_i \in C^\infty(M),$$

并且 $\{\phi_i\}$ 组成 Hilbert 空间 $H_1^2(M)$ 的一组正交基.

当 $\partial M \neq \varnothing$ 时，为了保证 Δ 是自共轭的，我们必须加上一定的边界条件，通常是两类条件:

(A) **Dirichlet 边界条件** ：此时

$$\mathrm{Dom}\,\Delta = \mathring{H}_1^2(M),$$

其相应的特征值和特征函数为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$ (注意 λ_1 的重数为 1)，及 $\{\phi_i\}$ ：

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i,\ \phi_i|_{\partial M} = 0,\ \phi_i \in C^\infty(M).$$

$\{\phi_i\}$ 组成 $\mathring{H}_1^2(M)$ 的一组正交基.

(B) **Neumann 边界条件**：此时

$$\mathrm{Dom}\,\Delta = H_1^2(M),$$

相应的特征值和特征函数为 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 及 $\{\phi_i\}$ ：

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i, \quad \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}|_{\partial M} = 0, \quad \phi_i \in C^\infty(M).$$

$\{\phi_i\}$ 组成 $H_1^2(M)$ 的一组正交基，其中 ν 表示 ∂M 的外法线方向.

在 Δ 的特征值理论中，以下的极小极大原理 有基本的作用.

极小极大原理:

为了简便起见，我们记空间 H 为

(1) $\partial M = \varnothing$,

$$H = \{f \in H_1^2(M) | \int_M f = 0\},$$

(2) $\partial M \neq \varnothing, D$- 条件

$$H = \mathring{H}_1^2(M),$$

(3) $\partial M \neq \varnothing, N$- 条件

$$H = \{f \in H_1^2(M) | \int_M f = 0\},$$

则我们可以找到一组可数正交基 $\{f_i\}, \Delta f_i = -\lambda_i f_i, f_i \in C^\infty(M), 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 使

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \inf\left\{\frac{\int|\nabla f|^2}{\int|f|^2}\middle| f\in H\right\},\\ \lambda_i &= \inf\left\{\frac{\int|\nabla f|^2}{\int|f|^2}\middle| f\in H, \int f f_j = 0,\ j=1,\cdots,i-1\right\}.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

特别地，如 λ_1 是第一非零特征值，则当且仅当 $C \leqslant \lambda_1$ 时，

$$\int_M |\nabla f|^2 \geqslant C\int_M |f|^2,\ \forall f\in H,\tag{3.1.2}$$

即最小特征值等于满足以上类型不等式中最大正数 C. 这种不等式称为 **Poincaré 不等式**. Poincaré 不等式为微分方程理论中基本不等式之一，另一个基本不等式是 Sobolev 不等式.

Sobolev 不等式 ： 如 M 是紧致具有边界的 Riemann 流形，则存在常数 C, 使

$$C\left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_M |\nabla f|,\tag{3.1.3}$$

对一切 $f\in H$, 并且满足 $f|_{\partial M}=0$ (D- 条件)，或者 $\int_M f = 0$. (后一条件称为 Neumann 条件；当然在不同条件下常数 C 也不同.)

当 M 不是紧致的，而是一般的 Riemnan 流形时， Sobolev 不等式不一定成立. 它的成立与等周不等式的成立相等价.

等周不等式 设 Ω 是 M 中的区域， $\Omega \ll M$, 则存在常数 C （不依赖于 Ω)，使

$$C(\mathrm{Vol}(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \mathrm{Vol}(\partial\Omega).\tag{3.1.4}$$

由 (3.1.3)⇒ (3.1.4) ，只要取函数

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x\in\Omega, d(x,\partial\Omega)\geqslant\varepsilon,\\ \dfrac{d(x,\partial\Omega)}{\varepsilon}, & x\in\Omega, d(x,\partial\Omega)\leqslant\varepsilon,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

对 f_ε 利用 Sobolev 不等式，再令 $\varepsilon\to 0$ 便可得出等周不等式. 现在我们证明 (3.1.4)⇒ (3.1.3). 首先我们需要下面的

Co-Area 公式 设 M 是紧致带边界的 Riemann 流形, $f \in H^1(M)$, 那么对 M 上的任何非负函数 g 有

$$\int_M g = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{f=\sigma\}} \frac{g}{|\nabla f|} \right) d\sigma.$$

(证明请见 H. Federer: Geometric Measure Theory, Springer, 1969.) 为简便起见不妨设 $f \geqslant 0$. 由 Co-Area 公式

$$\int_M |\nabla f| = \int_0^{\infty} \mathrm{Area}\,(f = \sigma)\, d\sigma.$$

同时我们有

$$\begin{aligned}\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} &= \int_0^{\infty} \mathrm{Vol}\,(f^{\frac{n}{n-1}} > \lambda)\, d\lambda \\ &= \frac{n}{n-1} \int_0^{\infty} \mathrm{Vol}\,(f > \sigma)\sigma^{\frac{n}{n-1}}\, d\sigma.\end{aligned}$$

利用等周不等式

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla f| &= \int_0^{\infty} \mathrm{Area}\,(f = \sigma)\, d\sigma \\ &\geqslant C \int_0^{\infty} \mathrm{Vol}\,(f > \sigma)^{\frac{n-1}{n}}\, d\sigma.\end{aligned}$$

因此只要证明

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Vol}\,(f > \sigma)^{\frac{n-1}{n}}\, d\sigma \geqslant C_n \left(\int_0^{\infty} \mathrm{Vol}\,(f > \sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}\, d\sigma \right)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (*)$$

即可.

令

$$\begin{aligned}F(\sigma) &= \mathrm{Vol}\,(f > \sigma), \\ \varphi(t) &= \int_0^t F(\sigma)^{\frac{n-1}{n}}\, d\sigma, \\ \psi(t) &= \left(\int_0^t F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}\, d\sigma \right)^{\frac{n-1}{n}},\end{aligned}$$

则 $\varphi(0) = \psi(0)$. 此外利用 $F(\sigma)$ 的单调递减不难验证 $\varphi'(t) \geqslant \frac{n}{n-1}\psi'(t)$. 因而 $\varphi(\infty) \geqslant \frac{n}{n-1}\psi(\infty)$. 即 $(*)$ 式成立.

为了研究第一特征值的几何意义, Cheeger 引进了两个等周常数 ,它们和第一特征值有密切的关系:

定义 (Cheeger) 设 M 是紧 Riemann 流形,定义常数

当 $\partial M \neq \varnothing$ 时, $h_D(M) = \inf\left\{ \frac{\mathrm{Vol}\,(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \middle| \Omega \subset\subset M \right\}$,

当 $\partial M = \varnothing$ 时,

$$h_N(M) = \inf\left\{ \frac{\mathrm{Vol}\,(M)}{\min\{\mathrm{Vol}\,(M_1), \mathrm{Vol}\,(M_2)\}} \middle| \begin{array}{l} H\text{是}M\text{中超曲面,它将} \\ M\text{分成两部分}M_1, M_2, \\ \text{且}\partial M_1 = \partial M_2 = H. \end{array} \right\}$$

定理 (Cheeger) 对 Dirichlet 边界条件而言,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4} h_D^2(M).$$

对 Neumann 边界条件而言,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4} h_N^2(M).$$

证明 对 Dirichlet 边界条件. 设 f 是对应 λ_1 的特征函数,熟知, $f(x) > 0, x \in \Omega, f|_{\partial M} = 0$.

(i) 如果存在常数 $\mu > 0$, 使

$$\int_M |\nabla\varphi| \geqslant \mu \int_M |\varphi|, \quad \forall\varphi \in C^\infty(M), \quad \varphi|_{\partial M} = 0,$$

则 $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}\mu^2$. 这是因为,考虑 $f^2, \nabla f^2 = 2f\nabla f$.

$$\mu \int_M f^2 \leqslant 2\int_M |f||\nabla f| \leqslant 2\sqrt{\left(\int_M f^2\right)\left(\int_M |\nabla f|^2\right)},$$

因此

$$\lambda_1 \int_M f^2 = \int_M |\nabla f|^2 \geqslant \frac{\mu^2}{4}\int_M f^2,$$

即

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}\mu^2.$$

(ii) 根据 Co-Area 公式 indexCo-Area 公式, Co-Area formula，有

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\varphi| &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\varphi=\sigma} 1\right) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Area}\,(\varphi=\sigma)\,d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Area}\,(\varphi=\sigma)}{\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)}\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)\,d\sigma \\ &\geqslant \inf_{\sigma}\left(\frac{\text{Area}\,(\varphi=\sigma)}{\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)\,d\sigma \\ &\geqslant \inf_{\sigma}\left(\frac{\text{Area}\,(\varphi=\sigma)}{\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)}\right)\int_M|\varphi|,\end{aligned}$$

但

$$h_D(M) = \inf_{\Omega\subset\subset M}\frac{\text{Area}\,(\partial\Omega)}{\text{Vol}\,(\Omega)} \leqslant \inf_{\sigma}\left(\frac{\text{Area}\,(\varphi=\sigma)}{\text{Vol}\,(\varphi\geqslant\sigma)}\right),$$

故由 (i) 知， $\lambda_1 \geqslant \dfrac{1}{4}h_D^2(M)$.

对 Neumann 条件. 如所知 (见 I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press. Inc., 1984)，特征函数 f 恰好有二个结点区域 M_+ 和 M_-, 在其上 f 分别为正和负. 设 M_+ 的体积较小，于是 $h_D(M_+) \geqslant h_N(M)$. 因为 f 在 M_+ 上不变号，且 $f|_{\partial M_+} = 0$, 故 f 是 Dirichlet 边界条件下对应于特征值 λ_1 的特征函数. 根据上述 Dirichlet 条件，即得 $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}h_D^2(M_+) \geqslant \frac{1}{4}h_N^2(M)$. 证毕.

利用 Co-Area 公式和等周 (isoperemetric) 不等式,还可以证明以下的 Rayleigh 猜想.

定理 (Faber-Krahn) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一域， $B(R)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心, R 为半径的球体， $\text{Vol}\,(\Omega) = \text{Vol}\,(B(R))$, 则对 Dirichlet 边界条件的第一特征值而言,

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_1(B(R)).$$

证明 取对 Ω 而言的第一特征函数 f, 满足

$$\begin{aligned}&\Delta f = -\lambda_1(\Omega)f, \\ &f|_{\partial\Omega} = 0, f > 0, \text{在}\,\Omega\,\text{内}.\end{aligned}$$

此处

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

现在利用 f, 通过“对称化 ”来构造 $B(R)$ 中的函数 $g: B(R) \to \mathbb{R}^+$, 使得对于任意常数 C 有

$$\mathrm{Vol}\,(f \geqslant C) = \mathrm{Vol}\,(g \geqslant C),$$

并且 g 只是径向函数， $g(x) = g(|x|), |x| \leqslant R$. 因此， $\forall C$, 点集 $\{g \geqslant C\} =$ 球, $g(R) = 0$.（不难看到， g 被这些条件惟一确定.）根据 g 的定义显然有

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^2 &= \int_0^\infty \mathrm{Vol}\,(f^2 \geqslant C)\, dC \\ &= \int_0^\infty \mathrm{Vol}\,(g^2 \geqslant C) = \int_{B(R)} g^2,\end{aligned}$$

并且因为 g 仅依赖于 r, 所以在 $g = C$ 上， $|\nabla g| = \left|\dfrac{d}{dr} g(r)\right| =$ 常数，因而

$$\mathrm{Vol}\,(g = C) = \int_{g=C} 1 = \left(\int_{g=C} |\nabla g| \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|}\right)^{1/2},$$

但由 $\mathbb{R}^n$ 中的等周不等式（同体积的区域以球的表面积为最小），

$$\begin{aligned}\int_{f=C} |\nabla f| \int_{f=C} \frac{1}{|\nabla f|} &\geqslant \left(\int_{f=C} 1\right)^2 = [\mathrm{Area}\,(f = C)]^2 \\ &\geqslant [\mathrm{Area}\,(g = C)]^2 \\ &= \int_{g=C} |\nabla g| \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|},\end{aligned}$$

但由 Co-Area 公式，

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{Vol}\,(f \geqslant C)}{dC} &= \int_{f=C} \frac{1}{|\nabla f|}, \\ \frac{d\mathrm{Vol}\,(g \geqslant C)}{dC} &= \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|},\end{aligned}$$

而

$$\frac{d\mathrm{Vol}\,(f \geqslant C)}{dC} = \frac{d\mathrm{Vol}\,(g \geqslant C)}{dC},$$

所以

$$\int_{f=C} |\nabla f| \geqslant \int_{g=C} |\nabla g|.$$

再用 Co-Area 公式

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla f|^2 &= \int_0^{\infty} \left(\int_{f=C} |\nabla f| \right) dC = \int_0^{\infty} \left(\int_{g=C} |\nabla g| \right) dC \\ &= \int_{B(R)} |\nabla g|^2\end{aligned}$$

由极小极大原理

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2} \geqslant \frac{\int_{B(R)} |\nabla g|^2}{\int_{B(R)} g^2} \geqslant \lambda_1(B(R)).$$

注 由上述证明可见，若等号成立，即 $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(B(R))$, 则经过 $\mathbb{R}^n$ 的适当平移，就有 $\Omega = B(R)$.

3.2 Riemann 流形的热核

设 M 是一般的 Riemann 流形，令

$$\mathscr{D}(d) = \{f \in C^{\infty}(M) | \, ||f||_1 < +\infty\},$$

其中 $||f||_1^2 = \int f^2 + \int |df|^2$, 按 $||\cdot||_1$ 的完备化是 Sobolev 空间 $H^1(M) < L^2(M)$. 算子 d 在 $H^1(M)$ 中的闭包记作 $\overline{d}$, 令 d_C 为 d 在 $C_0^{\infty}(M)$ 的限制，d_C 的闭包 $\overline{d}_C$ 的定义域是 $H_0^1(M), H_0^1(M)$ 是 $C_0^{\infty}(M)$ 按 $||\cdot||_1$ 的完备化. 显然 $H_0^1(M) \subset H^1(M)$. Sobolev 空间理论指出，如果 M 是完备的 Riemann 流形，则 $H_0^1(M) = H^1(M)$

算子 $\delta = - * d*$, 满足 $\langle df, w \rangle = \langle f, \delta w \rangle$, 其中 $*$ 是 Hodge-Star 算子 ， w 是 C^{∞}1- 形式， f, w 只要二者之一具有紧支集. 令

$$\mathscr{D}(\delta) = \{w \in C^{\infty}1\text{- 形式} \Big| \int |w|^2 + \int |\delta w|^2 < +\infty\}.$$

根据 Gaffney 的一个引理 (Ann. of Math., 60, 1954, 458-466),

$$\overline{\delta} = \overline{d}_C^*, \ \overline{\delta}_C = \overline{d}^*,$$

其 Laplace 算子 (具有 Dirichlet 和 Neumann 边界条件) 为

$$\Delta_D = \overline{\delta}\,\overline{d}_C,\ \Delta_N = \overline{\delta}_C\overline{d},$$

当 M 具有光滑边界，则 $\Delta = \Delta_N =$ 通常的 Laplace 算子. 假设 M 是完备的（此时 $H_0^1(M) = H^1(M)$），则因为 $\overline{d}_C = \overline{d}, \overline{\delta}_C = \overline{\delta}$, 有 Gaffney 证明了 (Ann. of Math., 60, 1954, 140-145),

$$\Delta = \Delta_D = \Delta_N = \overline{\delta}\,\overline{d}.$$

熟知， Δ 是自共轭的，因此 $e^{-\Delta t}$ 组成有界自共轭算子的半群，根据自共轭算子的谱理论，如果 dE_λ 是 Δ 的谱测度 ，则

$$e^{-\Delta t} = \int_C^\infty d^{\lambda t} dE_\lambda,\ t > 0,$$

并且对于 $t > 0, e^{-\Delta t} : L^2(M) \to \bigcap_{i=1}^\infty D(\Delta^i) \subset C^\infty(M)$. 当 $f \in L^2(M)$ 时,

$$\Delta^i(e^{-\Delta t} f) = \int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda t}\, dE_\lambda(f)$$

这里 $\bigcap_{i=1}^\infty D(\Delta^i) \subset C^\infty(M)$ 是基于椭圆型算子的理论（ Weyl 理论）.

下面我们来叙述并证明本节的基本事实.

定理 2.1 设 M 是完备 Riemann 流形，则存在热核 $H(x,y,t) \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}^+)$, 使 $(e^{-\Delta t} f)(x) = \int_M H(x,y,t) f(y)$, $\forall f \in L^2(M)$, 满足:

(1) $H(x,y,t) = H(y,x,t)$,

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+} H(x,y,t) = \delta_x(y)$,

(3) $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) H = 0$,

(4) $H(x,y,t) = \int H(x,z,t-s) H(z,y,s)\, dz$.

证明

(A) 首先证明， $\forall f \in L^2(M), e^{-t\Delta} f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$. 为此先证，在广义导数意义下 (weak sense)

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\Delta} f) = \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t}\, dE_\lambda(f).$$

事实上

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\Delta}f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda(t+s)}\,dE_\lambda(f)\right.$$
$$\left. - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^A \frac{e^{-\lambda\varepsilon}-1}{\varepsilon}e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)\right.$$
$$\left. + \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda\varepsilon}-1}{\lambda\varepsilon}\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)\right]$$
$$= \int_0^A -\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f) + O(Ae^{-At}||f||),$$

最后项是由于 $(e^{-x}-1)/x$ 在 $[0,\infty)$ 上一致有界，而极限是在 L^2 意义下取的.

为证明 $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\Delta}f) = \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)$（弱）. 需证 $\forall\varphi\in C_0^\infty(M\times\mathbb{R}^+)$ 应有

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(e^{-t\Delta}f) = -\int\varphi\left(\int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)\right).$$

令 $f_0 = e^{-t\Delta}f$, 则由

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(e^{-t\Delta}f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)}{\varepsilon}f_0$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\varphi(t)\frac{f_0(t+\varepsilon)-f_0(t)}{\varepsilon}$$
$$= -\int\varphi(t)\left[\int_0^A -\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f) + O(Ae^{-At}||f||)\right].$$

再令 $A\to+\infty$, 即得

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}f_0 = -\int\varphi\left[\int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f)\right].$$

类似地推理，可得（在广义意义下）

$$\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^i(e^{-t\Delta}f) = \int_0^\infty(\lambda+\lambda^2)^i e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f),$$

而 $L = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 是 $M\times\mathbb{R}^+$ 的 Laplace 算子. 椭圆算子理论指出 $\bigcap^\infty \mathscr{D}(L^i)\subset C^\infty$, 因此 $e^{-t\Delta}f\in C^\infty(M\times\mathbb{R}^+)$. 如果 $f_1(x,t) = e^{-t\Delta}f$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1 = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dE_\lambda(f) = -\Delta(e^{-\Delta t}f) = -\Delta f_1,$$

所以

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) f_1(x,t) = 0,$$

因为 $f_1(x,t)$ 是光滑的，导数已是通常意义下的.

(B) 证明 $e^{-t\Delta}f = \int_M H(x,y,t)f(y)dy$.

根据单位分解，我们不妨假定 $f \in C_0^\infty(M)$, 并且 supp$f$ 是足够小. 考虑算子 $\Box = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}$ 的拟基本解 (parametrix)—— 见本定理后的附注 —— $P(x,y,t), P(x,y,t) \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}^+)$,

$$\lim_{t\to 0} P(x,y,t) = \delta_y,$$

并且对任何 $N > 0, \lim_{t\to 0}\Box_x P(x,y,t) = O(t^N)$, 而且当 $d(x,y)$ 足够小时，$t \to +0$, 有渐近展开

$$P(x,y,t) \sim \frac{\exp(-d(x,y)^2/4t)}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_i a_i(x,y)t^i,$$

其中 $n = \dim M, d(x,y) = x,y$ 的 Riemann 距离. $a(x,y) \in C^\infty(M\times M), a_0(x,y) = 1$, 对于 $0 < \varepsilon < s < t - s$,

$$\begin{aligned}
&e^{-\Delta\varepsilon}P(x,y,t-\varepsilon) - e^{-\Delta(t-\varepsilon)}P(x,y,\varepsilon)\\
&= \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds}(e^{-\Delta(t-s)}P(x,y,s))\,ds\\
&= \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \left[\Delta e^{-\Delta(t-s)}P(x,y,s) + e^{-\Delta(t-s)}\frac{\partial P}{\partial s}(x,y,s)\right] ds\\
&= \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} e^{-\Delta(t-s)}\Box_x P(x,y,s)\,ds.
\end{aligned}$$

用 t 代替 $t-\varepsilon$, 再令 $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\Delta t}P(x,y,\varepsilon) &= P(x,y,t) - \int_0^t e^{-\Delta(t-s)}\Box_x P(x,y,s)\,ds\\
&\overset{\text{def}}{=} H(x,y,t).
\end{aligned}$$

记 $F(x,y,s)=\Box_x P(x,y,s)$, 则

$$\begin{aligned}
&\Delta^i\int_0^t e^{-\Delta(t-s)}F(x,y,s)\,ds\\
=&\int_0^t\int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda(t-s)}\,dE_\lambda(F(x,y,s))\,ds\\
=&\int_{s_0}^t\int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda(t-s)}\,dE_\lambda(F(x,y,s))\,ds\\
&+\int_0^{s_0}\int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda(t-s)}\,dE_\lambda(F(x,y,s))\,ds\\
=&\int_{s_0}^t\int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda(t-s)}\,dE_\lambda(F(x,y,s))\,ds+\int_0^{s_0}O(s^N)\,ds
\end{aligned}$$

这是由于 $F(x,y,s)=O(s^N)$, 当 $s\to 0$ 时, 因此 $H(x,y,t)\in\mathscr{D}(\Delta^i)$, 所以 $H(x,y,t)\in C^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^+)$. 因为

$$|e^{-\Delta(t-s)}\Box_x P(x,y,s)|=O(s^N),$$

所以 $H(x,y,t)$ 和 $P(x,y,t)$ 具有相同的渐近展开. 由 $H(x,y,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}e^{-\Delta t}P(x,y,\varepsilon)$ 得 $\forall f(y)\in C_0^\infty(M)$, 都有

$$\begin{aligned}
\int H(x,y,t)f(y)\,dy&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M e^{-\Delta t}P(x,y,\varepsilon)f(y)\,dy\\
&=e^{-\Delta t}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M P(x,y,\varepsilon)f(y)\,dy=e^{-\Delta t}f(x),
\end{aligned}$$

最后的等号成立是由于 $P(x,y,t)$ 的 δ 性质.

同时, 由 $H(x,y,t)$ 的定义可验证, 当 y 固定, $t>0$ 时, $H(x,y,t)\in L^2(M)$, 因此

$$e^{-\Delta t}f(x)=\int H(x,y,t)f(y) \tag{**}$$

对一切 $f\in L^2(M)$ 成立. $H(x,y,t)$ 是 $e^{-\Delta t}$ 的核函数. 至于性质 (1), $H(x,y,t)=H(y,x,t)$, 是由于 Δ 是自共轭的, 性质 (2) 即 (**) 式.

性质 (3) 的证明: 由定义

$$H(x,y,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-\Delta t}P(x,y,t),\text{对任何}\varepsilon>0,$$

$e^{-\Delta t}P(x,y,t)$ 均满足热方程 $\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0$, 因而也有 $\left(\Delta_x+\frac{\partial}{\partial t}\right)H(x,y,t)=0$.

性质 (4) 的证明：由 $e^{-\Delta s}e^{-\Delta(t-s)}=e^{-\Delta t}$ 及 (**) 即得

$$H(x,y,t)=\int_M H(x,z,t-s)H(z,y,s)\,dz.$$

注 对于有界边界的流形, 也可证明 Dirichlet 或 Neumann 边界条件 的热核存在性（参考 I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, 1984).

附：关于热方程的拟基本解．

熟知，对 $\mathbb{R}^n$ 而言，热方程 $\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0$ 的基本解是 $\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)/(4\pi t)^{\frac{n}{2}}$. 对一般的 Riemann 流形 M, 我们希望找到具有以下形式的热方程基本解

$$U(x,y,t)\sim(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-d^2(x,y)/4t}\left\{\sum_{i\geqslant 0}\phi_i(x,y)t^i\right\},$$

其中 $d(x,y)$ 是 M 上两点的 Riemann 距离.

取围绕 x 的法坐标系 $y^i(i=1,\cdots,n), r=d(x,y)=$ 连接 x,y 的测地线距离. 熟知对于仅依赖于 r 的函数 $\psi(r),\phi(r)$

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{d^2\psi}{dr^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\frac{d\psi}{dr},\\ \Delta(\phi\psi) &= \phi\Delta\psi+\psi\Delta\phi+2\frac{d\phi}{dr}\frac{d\psi}{dr}.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\psi &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}}\\ \phi &= \phi_0+\phi_1 t+\cdots+\phi_N t^N,\end{aligned}$$

及

$$u_N=\psi\phi=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)\sum_{i=0}^{N}\phi_i t^i,$$

则

$$\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_N &= \phi\left(\Delta\psi-\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)+\psi\left(\Delta\phi-\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)\\ &\quad +2\frac{d\phi}{dr}\frac{d\psi}{dr}.\end{aligned}$$

由

$$\Delta\psi - \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\frac{d\psi}{dr},$$
$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{r}{2t}\psi,$$

可得

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u_N = \frac{\psi}{t}\sum_{k=0}^{N}\left[\Delta\phi_{k-1} - \left(k + \frac{r}{2}\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\phi_k - r\frac{d\phi_k}{dr}\right]t^k,$$

化为解方程

$$r\frac{d\phi_k}{dr} + \left(k + \frac{r}{2}\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\phi_k = \Delta\phi_{k-1},\ k = 0,\cdots,N,$$

此式即

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}(r^k g^{\frac{1}{4}}\phi_k) = r^{k-1}g^{\frac{1}{4}}\Delta\phi_{k-1}, & k \geqslant 1, \\ \dfrac{d\phi_0}{dr} + \dfrac{d\log\sqrt{g}}{\partial\, dr}\phi_0 = 0 & (\text{令}\phi_{-1} \equiv 0). \end{cases}$$

由此解得

$$\phi_0 = g^{-\frac{1}{4}},$$
$$\phi_k(x,y) = g^{-\frac{1}{4}}(y)r^{-k}\int_0^{r(x,y)} r^{k-1}(\Delta\phi_{k-1})g^{\frac{1}{4}}\,dr.$$

这样定义的 $\phi_k(k=0,\cdots,N)$, 显然是 C^∞ 的, 而

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u_N = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}}\Delta\phi_N \cdot t^N.$$

取截断函数 $\theta \in C_0^\infty$, 使

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & |r| \geqslant 1. \end{cases}$$

令

$$P_N(x,y,t) = \theta(r(x,y))u_N(x,y,t),$$

$P_N(x,y,t)$ 显然满足: $P_N(x,y,t) \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}^+)$, 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_N(x,y,\varepsilon) = \delta_x(y), \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)P_N = O(t^N),$$

即 $P_N(x,y,t)$ 是热方程的拟基本解．

从热方程初值问题

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = G, \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解对初值及 G 得依赖性可知，如果 G 在 $t=0$ 时有足够高阶零点，则其解也如此．因此上面构造的 $P_N(x,y,t)$, 可以逼近到热方程严格解至任意阶.

下面讨论热核 $H(x,y,t)$ 的性质.

引理 2.1

$$H(x,y,t) > 0, \quad \forall t > 0.$$

证明 由 Sobolev 空间 理论可知，如 $u \in H^1(M)$（或 $H_0^1(M)$），则 $|u| \in H^1(M)$（或 $H_0^1(M)$）．因此

$$d\frac{1}{2}(u - |u|) = \begin{cases} du, \ u \leqslant 0, \\ 0, \quad u > 0, \end{cases}$$

固定 y, 由 $H(x,y,t)$ 的渐近展开 ，知当 ε, δ 充分小时， $H(x,y,t) > -K_N t^N$, 只要 $d(x,y) < \varepsilon, t < \delta$. 设 $B_\varepsilon(y)$ 为以 y 为中心， ε 为半径的球，考虑

$$R_{\delta,t} = M \times [0,t] \setminus B_\varepsilon(y) \times [0,\delta],$$

则

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{R_{\delta,t}} dH \cdot d\left(\frac{1}{2}(H - |H|)\right) \\ &= \int_{R_{\delta,t}} \Delta H \frac{1}{2}(H - |H|) - \int_{B_\varepsilon(y)\times[0,\delta]} \frac{1}{2}(H - |H|) * dH. \end{aligned}$$

式中利用了 Stokes 公式及边界条件．注意当 $\delta \to 0$ 时，上式的第二项 $\to 0$, 这

是因为 $-H < H_N t^N \leqslant K_N \delta^N$. 而第一项

$$\begin{aligned}\int_{R_{\delta,t}} \Delta H \cdot \frac{1}{2}(H - |H|) &= -\int_{R_{\delta,t}} \frac{\partial}{\partial t} H \cdot \frac{1}{2}(H - |H|) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{R_{\delta,t}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(H - |H|)\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\int_{M\times[0,t]} \left[\frac{1}{2}(H - |H|)\right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_\varepsilon(y)\times[0,\delta]} \left[\frac{1}{2}(H - |H|)\right]^2\right\}.\end{aligned}$$

同理当 $\delta \to 0$ 时，后一项 $\to 0$. 因此， $H - |H| \equiv 0$, 即 $H \geqslant 0$. 但由热算子的极小值原理，只能有 $H > 0$.

引理 2.2 设 M 是常曲率的完备 Riemann 流形空间形式 (space form) 中的测地球 B_R, 熟知其热核 仅为 $r = d(x,y)$ 的函数 $H(r,t)$, 则 $\dfrac{\partial H(r,t)}{\partial r} < 0$.

证明 其思路同上一引理. 当 $0 < r, t < s$ 时，由 $H(x,y,t)$ 的渐近展开

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial r} \sim \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\left(-\frac{r}{2t}\right)(a_0(r) + a_1(r)t + \cdots) \\ + \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\left(\frac{\partial a_0}{\partial r}(r) + \frac{\partial a_1}{\partial r}(r)t + \cdots\right),\end{aligned}$$

$a_i(r) \in C^\infty(M)$, 此时 $\dfrac{\partial a_i}{\partial r} = O(r)$. 同时 $a_0(O) = 1$, 因此在 r, t 很小时，首项 $[e^{-\frac{r^2}{4t}}/(4\pi t)^{n/2}] \times [-r/(2t)]a_0(r)$ 起主要作用. 所以此时 $\dfrac{\partial H}{\partial r}(r,t) \leqslant 0$, 并且对任何 N 都有 $\frac{\partial H}{\partial r} = O(t^N)$. 令

$$\begin{aligned}R_{\delta,t} &= M \times [0,t] \setminus B_\varepsilon \times [0,\delta], \\ \mathfrak{M}_t^+ &= \left\{(x,y,t) \in R_{\delta,t} \Big| \frac{\partial H}{\partial r} > 0\right\}.\end{aligned}$$

则

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int_{\mathfrak{M}_t^+} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 &= \int_{\mathfrak{M}_t^+} \frac{1}{2}\langle \nabla H, \nabla H\rangle \\
&= \int_\delta^t \int_{\mathfrak{M}_s^+} \langle \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r}, \frac{\partial H}{\partial r}\rangle + \int_0^\delta \int_{\mathfrak{M}_s^+\setminus B_\varepsilon\times\{s\}} \langle \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r}, \frac{\partial H}{\partial r}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{B_\varepsilon\cap\mathfrak{M}_s^+} \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

当 $\varepsilon, \delta \to 0$ 时，最后项 $\to 0$, 而

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right), \frac{\partial H}{\partial r}\rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial r}\rangle \\
&= \langle \nabla\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right), \nabla H\rangle = \langle \nabla\Delta H, \nabla H\rangle .
\end{aligned}
$$

当 $s \in (\delta, t)$ 时，因为 H 仅依赖于 r, 故 $\mathfrak{M}_s^+$ 由一些闭环组成，其边界 $\partial\mathfrak{M}_s^+ = S_R$. 由边界条件再用 Stokes 公式

$$
\int_{\mathfrak{M}_s^+} \langle \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r}, \frac{\partial H}{\partial r}\rangle = \int_{\mathfrak{M}_s^+} \langle \nabla\Delta H, \nabla H\rangle = -\int_{\mathfrak{M}_s^+} |\Delta H|^2 .
$$

类似地，当 $s \in (0, \delta)$ 时，

$$
\int_{\mathfrak{M}_s^+\setminus B_\varepsilon\times\{s\}} \langle \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r}, \frac{\partial H}{\partial r}\rangle = -\int_{\mathfrak{M}_s^+\setminus B_\varepsilon\times\{s\}} |\Delta H|^2 - \int_{\mathfrak{M}_s^+\setminus B_\varepsilon\times\{s\}} \Delta H * dH .
$$

上式的最后一项 $\to 0$ (当 $\varepsilon, s \to 0$). 由此得到 $\mathfrak{M}_t^+ = \varnothing$, 即 $\dfrac{\partial H}{\partial r} \leqslant 0$, 因为

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - m(r)\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\
\Downarrow \\
-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}H\right) - m(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) - m'(r)\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) = 0,
\end{gathered}
$$

由抛物方程的极大值原理可得 $\dfrac{\partial H}{\partial r} < 0$.

在完备的 Riemann 流形中, 以 x_0 为中心, r_0 为半径的测地球记作 $B(x_0, r_0)$; 记 $V_n(k, r_0)$ 为 n 维单连通常曲率 k 的空间形式中的半径为 r_0 的测地球.

$V_n(k,r_0)$ 中的热核 为 $\mathscr{E}(x,y,t)=\mathscr{E}(r(x,y),t)$ 可看作 $B(x_0,r_0)$ 上的函数. 此函数在 $B(x_0,r_0)\setminus C$ 上光滑, 其中 C 是 x_0 的割迹 .

定理 2.2 （热核函数的比较定理, Cheeger-Yau）. 设 M 是完备 Riemann 流形, 其 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)k$, 任意固定 $x\in M, r_0>0$, 则 $B(x,r_0)$ 的热核 $H(x,y,t)$ 和空间形式中的测地球 $V(k,r_0)$ 的热核 $\mathscr{E}(r(x,y),t)$ 满足不等式

$$\mathscr{E}(r(x,y),t)\leqslant H(x,y,t)$$

（核函数的边界条件为 Dirichlet 或 Neumann 条件）.

证明 由热核函数的 δ 性质

$$\begin{aligned}
&H(x,y,t)-\mathscr{E}(x,y,t)\\
&=\int_0^t\int_{B(x,r_0)}\frac{d}{ds}[\mathscr{E}(x,z,t-s)H(z,y,s)]\,dz\,ds\\
&=-\int_0^t\int_{B(x,r_0)}\left[\frac{d}{ds}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)\right]H(z,y,s)\,dz\,ds\\
&\quad+\int_0^t\int_{B(x,r_0)}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)\frac{d}{ds}H(z,y,s)\,dz\,ds\\
&=-\int_0^t\int_{B(x,r_0)}\widetilde{\Delta}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)H(z,y,s)\,dz\,ds\\
&\quad+\int_0^t\int_{B(x,r_0)}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)\Delta H(z,y,s)\,dz\,ds
\end{aligned}$$

其中 Δ 和 $\widetilde{\Delta}$ 分别为 M 上及空间形式上的 Laplace 算子 . 由 Green 公式, 无论是 Dirichlet 还是 Neumann 边界条件, 都有

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r_0)}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)\Delta H(z,y,s)\,dz\\
&=\int_{B(x,r_0)}\Delta\mathscr{E}(r(x,z),t-s)H(z,y,s)\,dz,
\end{aligned}$$

因为 $H(z,y,s)>0$, 所以剩下只需证明

$$\widetilde{\Delta}\mathscr{E}(r(x,z),t-s)\leqslant\Delta\mathscr{E}(r(x,z),t-s).$$

用在 x 的法坐标 (r,ξ), 其中 $\xi\in S^{n-1}$,

$$\widetilde{\Delta}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+m(r)\frac{\partial}{\partial r},\qquad m(r)=\frac{d\log\sqrt{\widetilde{g}}}{dr},$$
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+m(r,\xi)\frac{\partial}{\partial r},\quad m(r,\xi)=\frac{d\log\sqrt{g}}{dr},$$

因为 M 的 Ricci 曲率 $\geqslant(n-1)k$, 由体积的比较定理 可知

$$m(r,\xi)\leqslant m(r),$$

所以

$$-m(r,\xi)\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial r}\leqslant -m(r)\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial r}.$$

这里用到 $\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial r}<0$, 因此

$$\widetilde{\Delta}\mathscr{E}(r,t-s)\leqslant\Delta\mathscr{E}(r,t-s).$$

注 以上的证明未考虑到割迹. 如测地球在割迹内, 则自然通过; 如计及割迹, 那么采取一定的极限手续, 按着证明的同一思路也可通过, 请见 Cheeger-Yau: Comm Pure and Applied Math., Vol. 34(1981).

关于热方程的基本解, 以下定理是熟知的, 其证明可见: M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math., 194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

定理 设 M 是紧 Riemann 流形, f_i 是 M 上的特征函数的一组正交基, λ_i 是其对应的特征值, 那么热方程的基本解 (heat kernel) 可写成

$$H(x,y,t)=\sum e^{-\lambda_i t}f_i(x)f_i(y),$$

特别地,

$$\sum e^{-\lambda_i t}=\int_M H(x,y,t)\,dx,$$

当 $t\to+0$ 时,

$$H(x,y,t)\sim(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}}\sum_{i\geqslant 0}\phi_i(x,y)t^i.$$

3.3 第一特征值上界估计

设 M 是紧致 Riemann 流形（可有边界），本节的目的是在 M 的曲率的一定假设下，给出 λ_1 的尽可能精确的上界估计.

上界估计的基本结果是 S. Y. Cheng (Math, Z., 143, 289-297 (1975)) 的工作. 在该文中 Cheng 建立了对第一特征值的比较定理. 在前文中我们已经有了关于热核函数的比较定理， Cheng 的特征值比较定理就很容易导出了：

定理 3.1 (S. Y. Cheng) 设 M 是完备的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)k, n=\dim M$. 以 $B(x_0,r)$ 表示 M 中以 x_0 为中心， r 为半径的测地球；再以 $V(k,r)$ 表示单连通的 n 维具常曲率 k 的空间形式中半径为 r 的测地球，则对 Dirichlet 边界条件 而言

$$\lambda_1(B(x_0,r)) \leqslant \lambda_1(V(k,r)).$$

证明 分别记 $B(x_0,R)$ 的热核 函数为 $H(x,y,t), V(k,,r)$ 的热核函数为 $\mathscr{E}(d(x,y),t)$. 按热核的谱展开

$$\begin{aligned} H(x,x,t) &= \sum e^{-\lambda_i t}\varphi_i^2(x), \\ \mathscr{E}(0,t) &= \sum e^{-\widetilde{\lambda}_i t}\widetilde{\varphi}_i^2(0). \end{aligned}$$

由热核比较定理，

$$H(x,x,t) \geqslant \mathscr{E}(0,t),$$

即

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda_1 t}[\varphi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\varphi_2^2(x) + \cdots] \\ \geqslant\ & e^{-\widetilde{\lambda}_1 t}[\widetilde{\varphi}_1^2(0) + e^{-(\widetilde{\lambda}_2-\widetilde{\lambda}_1)t}\widetilde{\varphi}_2^2(0) + \cdots]. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \varphi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\varphi_2^2(x) + \cdots \\ \geqslant\ & e^{-(\widetilde{\lambda}_1-\lambda_1)t}\left[\widetilde{\varphi}_1^2(0) + e^{-(\widetilde{\lambda}_2-\widetilde{\lambda}_1)t}\widetilde{\varphi}_2^2(0) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

由于 $\varphi_1(0)$ 和 $\widetilde{\varphi}_1(x)$ 都是第一特征函数，$\varphi_1(x)>0, \widetilde{\varphi}(x)>0$. 而且 $\lambda_m > \lambda_1 (m \geqslant 2)$. 令 $t\to\infty$, 得

$$\lambda_1 \leqslant \widetilde{\lambda}_1.$$

系 在定理的同样假设下，若 M 紧致，则 $\lambda_1(M) \leqslant \lambda_1(V(k,d/2))$. 其中 $d = M$ 的直径.

证明 根据 λ_1 的单调性，由上述定理直接得证.

定理 3.2 (S. Y. Cheng) 设 M 是 n 维紧 Riemann 流形， Ricci$(M) \geqslant (n-1)k$, 则

$$\lambda_m(M) \leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right),$$

其中 $d = M$ 的直径. $V\left(k, \frac{d}{2m}\right)$ 表示 n 维截面曲率为 k 的空间形式中半径为 $\frac{d}{2m}$ 的球.

证明 可以找到 $x_1, \cdots, x_{m+1} \in M$, 使 $B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)$ 两两不相交，设 φ 是 $V\left(k, \frac{d}{2m}\right)$ 上的第一特征函数，熟知它只与径向有关. 设 $\varphi_i (i = 1, \cdots, m+1)$ 是 $B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)$ 关于 Dirichlet 边界条件的第一特征函数，则由上述定理 3.1

$$\begin{aligned}\int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\nabla\varphi_i|^2 &= \lambda_1\left(B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)\right)\int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\varphi_i|^2 \\ &\leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right)\int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\varphi_i|^2.\end{aligned}$$

将 φ_i 零扩充到 $B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)$ 以外，显然存在 $a_1, \cdots, a_{m+1}$（常数）使 $\sum a_i\varphi_i \neq 0, \sum a_i\varphi_i \perp \{\psi_0, \cdots, \psi_{m-1} | \Delta\psi_j = -\lambda_j\psi_j\}$, 由此根据极小极大原理 ，

$$\begin{aligned}\lambda_m(M)\int_M \left(\sum a_i\varphi_i\right)^2 &\leqslant \int_M |\sum a_i\nabla\varphi_i|^2 = \int_M \sum a_i^2|\nabla\varphi_i|^2 \\ &\leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right)\int_M \left(\sum a_i\varphi_i\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\lambda_m(M) \leqslant \lambda_1\left(k, \frac{d}{2m}\right).$$

S. Y. Cheng 具体估计了空间形式中球的第一特征值:

(1) 如果 Ricci$(M) \geqslant 0$, 则 $\lambda_1 \leqslant \dfrac{C_n}{d^2}$, 其中 C_n 可取 $2n(n+4)$.

(2) 如果 Ricci$(M) \geqslant n-1$, 则 $\lambda_1 \leqslant \dfrac{n\pi^2}{d^2}$.

(3) 如果 Ricci$(M) \geqslant (n-1)(-k), k > 0$, 则

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{4}k + \frac{C_n}{d^2}.$$

3.4 第一特征值下界估计

给出特征值的精确下界估计通常较估计上界更为困难.

对于单连通的完备、非紧 Riemann 流形，一个重要的问题是，在何种条件下 $\lim\limits_{R\to\infty}\lambda_1(B(x_0,R))$ 存在？明显的表达式是什么？这方面我们有下述的 Mckean 定理:

定理 (Mckean) 如果 M 是完备的非紧致的单连通 Riemann 流形，其截面曲率 $\leqslant -C<0$, 那么 λ_1 有正的下界，且该下界仅依赖于常数 C.

证明 根据第一特征值与 Cheeger 的等周常数 h_D 的关系，有

$$\lambda_1(B(x_0,R))\geqslant\frac{1}{4}h_D^2(B(x_0,R)),$$

因此，只要证 $h_D(B(x_0,R))>$ 正常数即可.

任取 $\Omega\subset\subset M, x_0\in\Omega$, 令 $r(x)=\operatorname{dist}(x,x_0)$. 因为 M 是单连通的，且曲率为负，故 r 是可微分函数 (除点 x_0 外),

$$\operatorname{Area}(\partial\Omega)=\int_{\partial\Omega}1\geqslant\int_{\partial\Omega}\frac{dr}{d\eta}=\int_{\Omega}\Delta r,$$

其中不等号是因为 $|dr|=1$, $\frac{dr}{d\eta}<1,\eta$ 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向. 最后式是 Stokes 公式.

但熟知，当截曲率 $\leqslant -C$ 时,

$$\Delta r\geqslant\frac{n-1}{r}+C_a,\quad C_a>0,$$

因而,

$$\operatorname{Area}(\partial\Omega)\geqslant C_a\int_{\Omega}1=C_a\operatorname{Vol}(\Omega),$$

所以,

$$\lambda_1\geqslant\frac{1}{4}C_a^2.$$

下面来研究紧致流形的情况. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中带边界的域 (domain) , 其第一特征值的估计是一个历史悠久的问题. 其中代表工作有 Fabér-Krahn, Polya-Szegö, Payne, Weinberger 等. 对于一般的无边界紧致 Riemann 流形，在一定的曲率假设下给出第一特征值的下界估计，这一方面第一个重要工作属于 Lichnerowicz. 1958 年他首先建立了下述定理:

定理 (Lichnerowicz) 如 M 是紧致无边的 n 维 Riemann 流形，其

$$\text{Ricci}(M) \geqslant (n-1)k > 0,$$

则第一特征值满足

$$\lambda_1 \geqslant nk.$$

1962 年 Obata 证明，如果上式等号成立，则 M 等距于常曲率 k 的球面 S^n.

1970 年， Cheeger 给出了 λ_1 的下界估计，其中涉及到他所定义的某些等周常数. 在此基础上， Yau 给出了用更便于计算的几何量，例如直径、体积、Ricci 曲率 下界，来估计 λ_1 下界的方法. 从 1979 年开始， Li 与 Yau 发展了对第一特征函数进行梯度估计来求得 λ_1 的下界的有效方法 (当 Ricci $\geqslant 0$ 时， Li 在他的论文中得出此结果). 1980 年他们证明了以下结果:

(1) 设 M 是紧致 Riemann 流形， $\partial M = \varnothing, \text{Ricci} \geqslant 0$, 则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2},$$

其中 d 为 M 的直径.

(2) 设 M 是紧致 Riemann 流形， $\partial M = \varnothing, \text{Ricci} \geqslant -(n-1)K(K>0)$, 则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\exp\{-[1+(1+2C^2d^2K)^{1/2}]\}}{Cd^2},$$

其中 C 为仅依赖于 n 的常数， d 为 M 的直径.

(3) $\partial M = \varnothing, \text{Ricci} \geqslant 0, \partial M$ 是凸的 (即 ∂M 的第二基本形式是非负的)，则对 Neumann 边界条件而言，其第一特征值 η_1 满足

$$\eta_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2}.$$

其中 d 为 M 的直径.

现在我们来讨论用梯度估计以求得第一特征值下界的 P. Li-Yau 方法 .

设 M 是紧致的不带边界的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率 Ricci$\geqslant 0$. 设 u 是对应于 λ_1 的第一特征函数，因为 $\int_M u = -\frac{1}{\lambda_1}\int_M \Delta u = 0$, 所以不妨设

$$1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1,\ 1 \geqslant k > 0.$$

引理 4.1　如果 Ric $(M) \geqslant 0$, 则

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(k+u).$$

证明　令

$$\widetilde{u} = \frac{u - \frac{1-k}{2}}{\dfrac{1+k}{2}},$$

则

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{u} = -\lambda_1(\widetilde{u}+a), \quad a = \dfrac{1-k}{1+k}, \quad 1 > a \geqslant 0, \\ \max \widetilde{u} = 1, \\ \min \widetilde{u} = -1. \end{cases}$$

取 ε 充分小, $v = \dfrac{\widetilde{u}}{1+\varepsilon}$, 则

$$\begin{cases} \Delta v = -\lambda_1(v + a_\varepsilon), \quad a_\varepsilon = \dfrac{a}{1+\varepsilon}, \\ \max v = \dfrac{1}{1+\varepsilon}, \\ \min v = -\dfrac{1}{1+\varepsilon}. \end{cases}$$

考虑函数

$$F(x) = \frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}.$$

对 $F(x)$ 应用极大值原理. 设 $F(x)$ 在 $x_0 \in M$ 处达到极大值, 则 $\nabla F(x_0) = 0, \Delta F(x_0) \leqslant 0$. 由 $\nabla F(x_0) = 0$, 得

$$\sum_j v_j v_{ji} = \frac{|\nabla v|^2(-v)v_i}{1-v^2}, \ \forall i. \tag{3.4.1}$$

又

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta F(x_0) = & \frac{2\sum_{ij} v_{ij}^2 + 2\sum v_i v_{jii}}{(1-v^2)^2} - \frac{4\sum v_j v_{ji} v_i}{(1-v^2)^2}(-2v) \\ & + \frac{|\nabla v|^4(-2) + |\nabla v|^2(-2v)\Delta v}{(1-v^2)^2} + 2\frac{|\nabla v|^4(-2v)^2}{(1-v^2)^3}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

(3.4.1) 代入 (3.4.2)，得在 x_0 点,

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant\ & 2\sum_{ij} v_{ij}^2 + 2\sum_{ij} v_i v_{jii} \\
& - \frac{|\nabla v|^4(-2) + |\nabla v|^2(-2v)\Delta v}{1-v^2}.
\end{aligned}
$$

由 Ricci 等式,

$$
\begin{aligned}
\sum v_i v_{jii} &= \sum v_j v_{iji} = \sum v_j v_{iij} + \sum_{ijk} v_j v_k R_{kiji} \\
&= \sum v_j (\Delta v)_j + \mathrm{Ric}\,(\nabla v, \nabla v) \\
&\geqslant -\lambda_1 |\nabla v|^2.
\end{aligned}
$$

在 x_0 取坐标架，使 $v_j = 0 (j \neq 1)$, 由 (3.4.1)，

$$
\sum v_{ij}^2 \geqslant \sum v_{ii}^2 \geqslant v_{11}^2 = \frac{|\nabla v|^4 v^2}{(1-v^2)^2}.
$$

（此式在 $v_1 \neq 0$ 时推得，如 $v_1 = 0$, 则 $\nabla v = 0$, 此式更无问题.）将以上结果综合起来，得

$$
\begin{aligned}
\frac{2|\nabla v|^4 v^2}{(1-v^2)^2} - 2\lambda_1 |\nabla v|^2 &\leqslant \frac{-2|\nabla v|^4 - 2v\Delta v|\nabla v|^2}{1-v^2}, \\
\frac{|\nabla v|^2 v^2}{1-v^2} - \lambda_1(1-v^2) &\leqslant -|\nabla v|^2 + \lambda_1 v(v + a_\varepsilon), \\
\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}(x_0) &\leqslant \lambda_1(1 + a_\varepsilon v) \leqslant \lambda(1 + a_\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

因此， $\forall x \in M$, 都有

$$
|\nabla v|^2 \leqslant \lambda_1(1 + a_\varepsilon)(1 - v^2).
$$

以 $v = \left(u - \dfrac{1-k}{2}\right) / (1+\varepsilon)\dfrac{1+k}{2}, a_\varepsilon = \dfrac{1-k}{1+k}\dfrac{1}{1+\varepsilon}$ 代入，再令 $\varepsilon \to 0$, 即得

$$
|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(u+k).
$$

定理 4.1 (Li-Yau) 设 M 为紧致的 Riemann 流形，$\partial M = \varnothing, \mathrm{Ric}\,(M) \geqslant 0$. 又 d 表示 M 的直径，则

$$
\lambda_1 \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2.
$$

证明　取第一特征函数 u, 根据上述引理我们有梯度估计

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(u+k),$$

其中

$$1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1.$$

取 $x_1, x_2 \in M$, 使 $u(x_1) = \sup u = 1, u(x_2) = \inf u = -k$. 用极小测地线 Γ 连接 x_1, x_2, 则

$$\pi = \int_{-k}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(k+u)}} \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_1}{1+k}} \int_{x_1}^{x_2} ds \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_1}{1+k}} d.$$

即

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1+k}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 > \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{d^2}.$$

在以上方法的基础上, 上世纪 80 年代中钟家庆与杨洪苍将定理改进为 $\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{d^2}$, 得到了这一问题的最佳估计.

设 M 为紧致 Riemann 流形, $\partial M = \varnothing, \mathrm{Ric}\,(M) \geqslant 0$, 仍设 u 为第一特征函数.

$$-k = \inf u < \sup u = 1, \quad 1 \geqslant k > 0.$$

令

$$v = \frac{u - \dfrac{1-k}{2}}{\dfrac{1+k}{2}(1+\varepsilon)}, \quad a = \frac{1-k}{1+k},$$

则 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = -\lambda_1(v + a_\varepsilon), \quad a_\varepsilon = \dfrac{a}{1+\varepsilon}, \\ \sup v = \dfrac{1}{1+\varepsilon}, \\ \inf v = \dfrac{-1}{1+\varepsilon}. \end{cases}$$

令 $v = \sin\theta$, 则 $-\dfrac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \sin\theta \leqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon}$, 而

$$\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2} = |\nabla\theta|^2.$$

定义函数 $F(\theta)=\max\limits_{\substack{x\in M\\ \theta(x)=\theta}}|\nabla\theta|^2=\max\limits_{\substack{x\in M\\ \theta(x)=\theta}}\dfrac{|\nabla v|^2}{1-v^2}$, 显然 $F(\theta)$ 是 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+\delta,\dfrac{\pi}{2}-\delta\right]\to\mathbb{R}$ 的连续函数, 其中 δ 满足 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)=\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, 并且

$$F\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)=F\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=0.$$

采用这种术语, 引理 4.1, (特别是 (3.4.3) 式) 可以改述为

引理 4.2 $F(\theta)\leqslant\lambda_1(1+a_\varepsilon), a_\varepsilon=\dfrac{a}{1+\varepsilon}, a=\dfrac{1-k}{1+k}$.

从 Li-Yau 定理的证明可见, 如 $k=1$, 即 $a=0$, 那么 $\lambda_1\geqslant\left(\dfrac{\pi}{d}\right)^2$ 的结果已有. 因此, 我们下面假定 $1>a>0$.

下一步是求出关于 $F(\theta)$ 较引理 4.2 更为精确的估计, 为此, 设

$$F(\theta)=\lambda_1(1+a_\varepsilon\varphi(\theta)),$$

其中 $\varphi(\theta)$ 是 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+\delta,\dfrac{\pi}{2}-\delta\right]\to\mathbb{R}$ 的连续函数. 因为 F 在区间两端为零, 因此有

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)<-1,$$

而引理 4.1 此时可叙述成

$$\varphi(\theta)\leqslant 1.$$

定义 C^2 类函数 $\psi(\theta)$ 称为 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\delta,\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)$ 的闸函数 (barrier function) , 如果

$$\begin{cases}\varphi(\theta)\leqslant\psi(\theta), \quad \forall\theta,\\ \varphi(\theta_0)=\psi(\theta_0),\\ \psi'(\theta_0)\geqslant 0,\end{cases}$$

于是, 我们有下述两个引理:

引理 4.3 如果 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 θ_0 的闸函数, 则有

$$\varphi(\theta_0)\leqslant\sin\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0 y'(\theta_0)+\frac{1}{2}\cos^2\theta_0 y''(\theta_0). \tag{3.4.4}$$

引理 4.4 定义函数 $\psi(\theta)$ 为

$$\psi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\frac{4}{\pi}(\theta+\cos\theta\sin\theta)-2\sin\theta}{\cos^2\theta}, \quad \theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1, \psi\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1,\end{cases} \tag{3.4.5}$$

则 $\psi(\theta)$ 满足 $\psi'(\theta) \geqslant 0$, 并且

$$\psi - \sin\theta + \sin\theta\cos\theta\psi' - \frac{1}{2}\cos^2\theta\psi'' = 0. \tag{3.4.6}$$

引理 4.4 的证明是直接验证, 引理 4.3 的证明我们留待后面. 现在我们从这些引理出发讨论本节的主要结果:

定理 4.2(钟家庆 – 杨洪苍) 设 M 为无边的紧 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{d^2}.$$

证明 记 $F(\theta) = \lambda_1(1 + a_\varepsilon\varphi(\theta))$, 同时记 $\psi(\theta)$ 为公式 (3.4.5) 中的函数, 则我们有以下断定:

$$\varphi(\theta) \leqslant \psi(\theta). \tag{3.4.7}$$

这是因为, 如果 (3.4.7) 不成立, 那么因为 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) < -1$, 而 $\psi'(\theta) \geqslant 0, \psi(\theta) \geqslant \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, 所以存在 $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta\right)$, 使

$$\varphi(\theta_0) - \psi(\theta_0) = \max_{\theta\in[-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta]}(\varphi(\theta) - \psi(\theta)) = b > 0. \tag{3.4.8}$$

因此, $\psi(\theta) + b$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 θ_0 的闸函数. 根据引理 4.3 , 有

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta_0) &\leqslant \sin\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0(\psi+b)' + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0(\psi+b)'' \\
&= \sin\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0\psi'(\theta_0) + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0\psi''(\theta_0) \\
&= \psi(\theta_0).
\end{aligned}$$

最后一步是根据引理 4.4 得出的, 这与 (3.4.8) 矛盾. 因而断言 (3.4.7) 成立. 这样我们就有

$$F(\theta) \leqslant \lambda_1(1 + a_\varepsilon\varphi(\theta)) \leqslant \lambda_1(1 + a_\varepsilon\psi(\theta)),$$

即

$$|\nabla\theta|^2 \leqslant \lambda_1(1 + a_\varepsilon\psi(\theta)).$$

在 M 上取 x_1, x_2, 使 $\theta(x_1) = \frac{\pi}{2} - \delta, \theta(x_2) = -\frac{\pi}{2} + \delta$, 用极小测地线 γ 连接 x_1 和 x_2, 有

$$\lambda_1^{1/2}d \geqslant \lambda_1^{1/2}L(\gamma) = \int_\gamma \lambda^{1/2}\,ds \geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + a_\varepsilon\psi(\theta)}}.$$

由引理 4.4，易见 $\psi(0)=0,\psi(-\theta)=-\psi(\theta),|a_\varepsilon\psi(\theta)|<1$. 因此

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{1/2}d &\geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta}\frac{d\theta}{\sqrt{1+a_\varepsilon\psi(\theta)}}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{1+a_\varepsilon\psi(\theta)}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_\varepsilon\psi(\theta)}}\right]d\theta\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(4k-1)}{2\times 4\times\cdots\times(4k)}a_\varepsilon^{2k}\psi^{2k}\right)d\theta\\
&\geqslant \pi-2\delta.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$, 因而 $\delta\to 0$, 即有 $\sqrt{\lambda_1}\geqslant\dfrac{\pi}{d}$. 定理证毕.

现在剩下的惟一问题是验证引理 4.3. 证明引理 4.3 的方法是再一次应用极大值原理.

引理 4.3 之证明　根据题设 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\delta,\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)$ 的闸函数. 即 $\varphi(\theta)\leqslant y(\theta),\varphi(\theta_0)=y(\theta_0),y'(\theta_0)\geqslant 0$. 考虑函数

$$G(x)=\left\{\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}-\lambda_1(1+a_\varepsilon y)(\theta(x))\right\}\cos^2\theta(x),\tag{3.4.9}$$

因为 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 的闸函数，因而

$$G(x)\leqslant 0,\ G(x_0)=0,\ \theta_0=\theta(x_0),$$

即 $G(x)$ 在 x_0 达到极大值，由极大值原理，

$$\nabla G(x_0)=0,\quad \Delta G(x_0)\leqslant 0.\tag{3.4.10}$$

注意 $v=\sin\theta$. 有

$$\begin{aligned}
v_j &= \cos\theta\cdot\theta_j\\
\Delta\theta &= \frac{\Delta v}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\nabla v\cdot\nabla\theta\\
&=\frac{-\lambda_1(\sin\theta+a_\varepsilon)}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}|\nabla\theta|^2,
\end{aligned}\tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\cos^2\theta &= 2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)|\nabla\theta|^2-2\sin\theta\cos\theta\Delta\theta\\
&=2\lambda_1\sin\theta(\sin\theta+a_\varepsilon)-2|\nabla\theta|^2\cos^2\theta.
\end{aligned}$$

(3.4.10) 可写成

$$
\begin{aligned}
2\sum v_j v_{ij} &= \lambda_1[(1+a_\varepsilon y)(-2\sin\theta\cos\theta)+ay'\cos^2\theta]\theta_i,\\
2\sum v_{ij}^2+2\sum v_i v_{ijj} &= \lambda_1 a_\varepsilon(y''|\nabla\theta|^2+y'\Delta\theta)\cos^2\theta\\
&\quad -2\lambda_1 a_\varepsilon y'(-2\sin\theta\cos\theta)|\nabla\theta|^2-\lambda_1(1+a_\varepsilon y)\Delta\cos^2\theta\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

将 (3.4.11) 诸式代入上两式，并应用

$$
\left(\sum_{i,j} v_{ij}^2\right)\left(\sum v_i^2\right)\geqslant\left(\sum v_{ij}v_i v_{ij}\right)^2
$$

及

$$
\begin{aligned}
\sum v_i v_{ijj} &= -\lambda_1|\nabla v|^2+\mathrm{Ric}\,(\nabla v,\nabla v)\\
&\geqslant -\lambda_1|\nabla v|^2=-\lambda_1\cos^2\theta|\nabla\theta|^2,
\end{aligned}
$$

可得在 x_0 点，

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\lambda_1^2[(1+a_\varepsilon y)(-2\sin\theta)+a_\varepsilon y'\cos\theta]^2-2\lambda_1^2\cos^2\theta(1+a_\varepsilon y)\\
&-\lambda_1^2 a_\varepsilon(1+a_\varepsilon y)y''\cos^2\theta-\lambda_1^2 a_\varepsilon[-\cos\theta(\sin\theta+a_\varepsilon)\\
&+\sin\theta\cos\theta(1+a_\varepsilon y)]y'+\lambda_1^2 a_\varepsilon\cdot 4\cos\theta\sin\theta(1+a_\varepsilon y)y'\\
&-\partial\lambda_1^2(1+a_\varepsilon y)[\sin\theta(\sin\theta+a_\varepsilon)-(1+a_\varepsilon y)\cos^2\theta]\\
\leqslant{}& 0,
\end{aligned}
$$

消去 $\lambda_1^2 a_\varepsilon$, 由上式得到

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{a_\varepsilon}2(1+a_\varepsilon y)[1+a_\varepsilon y-(1+a_\varepsilon\sin\theta)]\\
&+\tfrac{1}{2}a_\varepsilon\cos^2\theta y'^2+\cos\theta\sin\theta(1+a_\varepsilon y)y'\\
&+\cos\theta(\sin\theta+a_\varepsilon)y'-(1+a_\varepsilon y)y''\cos^2\theta\\
\leqslant{}& 0.
\end{aligned}
$$

因此在 x_0 点，

$$
\begin{aligned}
y-\sin\theta \leqslant{}& -\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta+a_\varepsilon}{1+a_\varepsilon y}\cos\theta\right)y'\\
&+\frac{1}{2}\cos^2\theta y'',
\end{aligned}
$$

因为 $|y| \leqslant 1, 0 < a_\varepsilon < 1, 1 \geqslant y\sin\theta, 1 + a_\varepsilon y > 0$,

$$\frac{a_\varepsilon + \sin\theta}{1 + a_\varepsilon y} \geqslant \frac{a_\varepsilon y \sin\theta + \sin\theta}{1 + a_\varepsilon y} \geqslant \sin\theta,$$

所以

$$\varphi(\theta_0) = y(\theta_0) \leqslant \sin\theta_0 - \cos\theta_0 \sin\theta_0 y'(\theta_0) + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0 y''(\theta_0).$$

引理证毕.

定理 4.3 (Li-Yau) 设 M 是带边界的紧致 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0, \partial M \neq \varnothing$. 设 ∂M 是凸的 (即它对外法线方向而言的第二基本形是正的), 则 Neumann 条件的第一特征值 η_1 满足

$$\eta_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2},$$

其中 d 为 M 的直径.

证明 如同上面一样, 取规格化的第一特征函数 u,

$$\begin{cases} \Delta u = -\eta_1 u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = 0, \\ 1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1. \end{cases}$$

考虑函数

$$G(x) = \frac{|\nabla u|^2}{(1 + \varepsilon - u)(k + \varepsilon + u)},$$

$G(x)$ 是光滑到边界的函数, 对 $G(x)$ 应用极大值原理. 设 $G(x_0) = \sup G(x)$. 那么 x_0 可有两种情况. 如果 $x_0 \in M - \partial M$, 那么和定理 (关于 λ_1) 的证明完全一样, 可得 (令 $\varepsilon \to 0$)

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\eta_1}{1 + k}(1 - u)(u + k),$$

再逐字重复定理证明, 即有

$$\eta_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2}.$$

因此剩下的问题是排除 $x_0 \in \partial M$ 的可能性. 设 $x_0 \in \partial M$ 达到 $G(x)$ 的极大

值. 取 x_0 附近的局部坐标架 $(e_1,\cdots,e_n)$, 使 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}=e_n$, 则因为 $G(x_0)$ 极大

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu}=&\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iu_{in}}{(1+\varepsilon-u)(k+\varepsilon+u)}\\&-\frac{|\nabla u|^2(1-k-2u)u_n}{(1+\varepsilon-u)(k+\varepsilon+u)^2}\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_{in}(x)\geqslant 0.$$

由 Hession 及第二基本形的定义,

$$\begin{aligned}u_{ij}&=u_{ji}=H(e_i,e_j)(u)=e_ie_ju(\nabla_{e_i}e_j)u,\\u_{in}&=e_ie_nu-(\nabla_{e_i}e_n)u=-(\nabla_{e_i}e_i)u\\&=-(\nabla_{e_i}e_n)^{\mathrm{T}}u\\&=-\sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle e_ju=-h_{ij}u_j,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_{in}=-\sum_{i,j=1}^{n-1}h_{ij}u_iu_j\geqslant 0.$$

这和 $(h_{ij})>0$ 相矛盾. 除非 $u_i=0,\forall i$, 但此时 $G(x_0)=0$, 因而 $G(x)\equiv 0$, 即 $\nabla u\equiv 0$. 这是不可能的, 定理证毕.

下面将去掉 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 的条件, 用梯度估计的得到的一个结果是

定理 4.4 (Li-Yau) 设 M 是紧 Riemann 流形, $\partial M=\varnothing,\mathrm{Ric}\,(M)\geqslant-(n-1)K(K\geqslant 0)$, 则

$$\lambda_1\geqslant\frac{\exp\{-[1+(1+4(n-1)^2d^2K)^{1/2}]\}}{(n-1)d^2},$$

其中 $d=M$ 的直径.

证明 取正规化的第一特征函数 u, 设 $\sup u=1$, 取 $\beta>1$, 考虑

$$G(x)=\frac{|\nabla u|^2}{(\beta-u)^2}.$$

取极大点 $x_0 \in M$, 则 $\nabla G(x_0)=0, \Delta G(x_0) \leqslant 0$. 由

$$G(x)(\beta-u)^2=|\nabla u|^2,$$

得

$$\Delta G \cdot (\beta-u)^2+2\nabla G \cdot \nabla(\beta-u)^2+G\Delta(\beta-u)^2=\Delta|\nabla u|^2,$$

所以在 x_0 点有

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \Delta|\nabla u|^2-G\Delta(\beta-u)^2 \\
&=2\sum u_{ij}^2+2\sum u_i u_{ijj}-2G[(\beta-u)(-\Delta u)+|\nabla u|^2] \\
&=2\sum u_{ij}^2+2\sum u_i(\Delta u)_i+2\mathrm{Ric}\,(\nabla u,\nabla u) \\
&\quad -2G[\lambda_1 u(\beta-u)+|\nabla u|^2],
\end{aligned}$$

即

$$\sum u_{ij}^2-\lambda_1|\nabla u|^2-(n-1)K|\nabla u|^2-G[\lambda_1 u(\beta-u)+|\nabla u|^2] \leqslant 0.$$

在 x_0 选取局部坐标架，使 $u_i=0(i=2,\cdots,n), u_1=|\nabla u|$, 则 $u_1 \neq 0$ (否则 $|\nabla u|=0$, 则 $G(x)=G(x_0)=0$, 这是不可能的). 由 $\nabla G(x_0)=0$, 有

$$\begin{cases} u_{11}=-\dfrac{|\nabla u|^2}{\beta-u}, \\ u_{1i}=0,\ i \neq 1. \end{cases} \tag{3.4.12}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=2}^n u_{ij}^2 &\geqslant \sum_{i=2}^n u_{ii} \geqslant \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^n u_{ii}^2\right)=\frac{1}{n-1}(\Delta u-u_{11})^2 \\
&=\frac{1}{n-1}(\lambda u+u_{11})^2=\frac{1}{n-1}(\lambda^2u^2+2\lambda u u_{11}+u_{11}^2) \\
&\geqslant \frac{u_{11}^2}{2(n-1)}-\frac{1}{n-1}\lambda^2u^2,
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

所以

$$\sum_{i,j\geqslant 2} u_{ij}^2-(\lambda_1+(n-1)K)|\nabla u|^2-\lambda_1 Gu(\beta-u)+u_{11}^2-G|\nabla u|^2 \leqslant 0.$$

以 (3.4.12)， (3.4.13) 代入上式，得

$$\frac{1}{2(n-1)}\frac{|\nabla u|^4}{(\beta-u)^2}-\frac{\lambda^2u^2}{n-1}-(\lambda_1+(n-1)K)|\nabla|^2-\lambda_1\frac{|\nabla u|^2u}{\beta-u}\leqslant 0. \qquad (3.4.14)$$

如令 $\alpha=\frac{u}{\beta-u}$, 则

$$\alpha\leqslant\frac{1}{\beta-u}\leqslant\frac{1}{\beta-1}.$$

(3.4.14) 式可写成

$$\frac{1}{2(n-1)}G^2(x_0)-\frac{\lambda^2}{n-1}\alpha^2-(\lambda_1+(n-1)K)G(x_0)-\lambda_1G(x_0)\alpha\leqslant 0.$$

将上式看成关于 $G(x_0)$ 的二次式，易知

$$\begin{aligned}G(x_0)&\leqslant 4(n-1)\left[\lambda+(n-1)K+\frac{\lambda}{\beta-1}\right]\\&=4(n-1)\left(\frac{\lambda\beta}{\beta-1}+(n-1)K\right).\end{aligned}$$

因此,

$$|\nabla u\leqslant\left[4(n-1)\left(\frac{\lambda\beta}{\beta-1}+(n-1)K\right)\right]^{1/2}(\beta-u),$$

其中 $\beta>\sup u=1$. 在 M 上以极小测地线 γ 连接 x_1 和 x_2, $u(x_1)=0,u(x_2)=\sup u=1$, 那么

$$\log\frac{\beta}{\beta-1}\leqslant\int_\gamma\frac{|\nabla u|}{\beta-u}\leqslant\left[4(n-1)\left(\frac{\beta\lambda_1}{\beta-1}+(n-1)K\right)\right]^{1/2}d,$$

所以

$$\lambda_1\geqslant\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{4(n-1)d^2}\left(\log\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2-(n-1)K\right].$$

取 β_0, 使

$$\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{4(n-1)d^2}\left(\log\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2-(n-1)K\right]$$

极大，即得定理的证明.

3.5 高阶特征值的估计

现在我们转向高阶特征值的研究. 从 $\mathbb{R}^n$ 中有界域的 Dirichlet 问题开始. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域, 考虑 Dirichlet 边界条件的特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi = -\lambda\phi, \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

利用热核函数和 Tauber 定理 , H. Weyl 于 1912 年首先证明了渐近式

$$\lambda_k \sim C_n \left(\frac{k}{V}\right)^{2/n} \quad (k \to \infty),$$

其中 $C_n = (2\pi)^2 / \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{2/n}, \omega_{n-1} = \text{Area}\,(S^{n-1})$.

在此基础上, Polya(1960) 提出了著名的猜想: 对于任意 k,

$$\lambda_k \geqslant C_n \left(\frac{k}{V}\right)^{2/n}, \; V = \text{Vol}\,(\Omega).$$

Polya 本人在 $n = 2$ 时, 证明了对一些特殊的平面区域猜想成立. 1980 年, E. Lieb 证明存在较 C_n 为小的常数 $\widetilde{C}_n, \lambda_k \geqslant \widetilde{C}_n \left(\frac{k}{V}\right)^{2/n}$. 关于这一问题的最新结果是

定理 5.1 (Li-Yau) 对于任何 k, 有

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geqslant \frac{nC_n k}{n+2} \left(\frac{k}{V}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

系 因为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, 所以

$$\lambda_k \geqslant \frac{nC_n}{n+2} \left(\frac{k}{V}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

为了证明定理, 首先需要以下引理:

引理 5.1 如 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 满足

1° $0 \leqslant f \leqslant M_1$,

2° $\int_{\mathbb{R}^n} f(z)|z|\,dz \leqslant M_2$, 此处 M_1, M_2 为两个正常数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz \leqslant \left(M_1 \frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{2}{n+2}} M_2^{\frac{n}{n+2}} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

证明 选择 R_0, 使 $\int_{|z|\leqslant R_0}|z|^2 M_1\,dz = M_2$. 令

$$g(z) = \begin{cases} M_1, & |z| < R_0, \\ 0, & |z| \geqslant R_0, \end{cases}$$

自然有 $\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2 g(z)\,dz = M_2$. 同时

$$\begin{aligned}&(|z|^2 - R_0^2)(f(z) - g(z)) \\ =& \begin{cases} (|z|^2 - R_0^2)(f(z) - M_1) \geqslant 0, & |z| < R_0, \\ (|z|^2 - R_0^2)f(z) \geqslant 0, & |z| \geqslant R_0, \end{cases}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} R_0^2\int_{\mathbb{R}^n}(f(z) - g(z)) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|z|^2(f - g) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|z|^2 f - \int_{\mathbb{R}^n}|z|^2 g \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|z|^2 f - M_2 \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

所以

$$R_0^2\int_{\mathbb{R}^n} f \leqslant R_0^2\int_{\mathbb{R}^n} g = M_1 R_0^2 \mathrm{Vol}\,(B(R_0)) = \frac{M_1}{n}R_0^{n+2}\omega_{n-1},$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz \leqslant \frac{M_1}{n}R_0^n\omega_{n-1}.$$

由

$$M_2 = \int_{\mathbb{R}^n}|z|^2 g = M_1\omega_{n-1}\int_o^{R_0} r^{n+1}\,dr$$

决定 R_0, 解得

$$R_0 = \left(\frac{M_2}{M_1}\frac{n+2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n+2}},$$

代入上式即得引理的证明.

现在回到 Li-Yau 定理的证明.

设 $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ 是相应于 $\{\lambda_i\}$ 的正交特征函数. 令

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(x)\phi_i(y),$$

记 $\Phi(x,y)$ 对于 x 的 Fourier 变换为 $\hat{\Phi}(z,y)$, 即

$$\hat{\Phi}(z,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y)e^{ix\cdot z}\,dx.$$

由 Planchel 公式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^2(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\Phi}(z,y)|^2\,dz.$$

所以，一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\Phi}(z,y)|^2 d\,z\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^2(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \Phi^2(x,y)\,dx\,dy \\ &= \sum \int_{\Omega} \phi_i(x)\phi_i(x)\,dx \int_{\Omega} \phi_i(y)\phi_i(y)\,dy \\ &= k,\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\Phi}(z,y)|^2\,dy &= \int_{\Omega} (2\pi)^{-n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x,y)e^{ix\cdot z}\,dx\right|^2 dy \\ &= \int_{\Omega} (2\pi)^{-n} \left|\int_{\Omega} \phi(x,y)e^{ix\cdot z}\,dx\right|^2 dy.\end{aligned}$$

因为 $f \to Tf = \int_{\Omega} \Phi(x,y) f\,dx$, 是 $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 中由 $\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}$ 张成的子空间的投影变换，所以

$$||f||^2 \geqslant ||Tf||^2,$$

即

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\Omega} \left|\int_{\Omega} \Phi(x,y)e^{iz\cdot x}\,dz\right|^2 dy \\ \leqslant\ &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\Omega}\int_{\Omega} |e^{ix\cdot z}|^2\,dz\,dy \\ =\ &(2\pi)^{-n}V.\end{aligned}$$

同时，由 Fourier 变换熟知性质

$$\left(\widehat{i\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi}\right)(z,y)=z_j\hat{\Phi}(z,y),$$

由 Planchel 公式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega}|z|^2|\hat{\Phi}|^2(z,y)\,dy\,dz &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega}|\widehat{\nabla_x\Phi}|^2\,dy\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega}|\nabla_x\Phi|^2(x,y)\,dy\,dx\\ &= -\int_{\Omega}\int_{\Omega}\Phi(x,y)\Delta_x\Phi(x,y)\,dy\,dx\\ &= \sum\lambda_i.\end{aligned}$$

将引理 5.1 应用于

$$F(z)=\int_{\Omega}|\hat{\Phi}(z,y)|^2\,dy,$$

其中 $M_1=(2\pi)^{-n}V$, 而 $M_2=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$. 即得定理.

在第 2 节及第 3 节中我们看到热核 函数与 Laplace 算子的特征值和特征函数有着密切的关系. 下面我们将给出 Cheng-Li 利用热核来估计流形上高阶特征值下界的方法 .

设 $\{\varphi_i\}$ 是由特征函数构成的一组正交基. 相应的特征值为 $\{\lambda_i\}$, 那么我们知道热核 $H(x,y,t)$ 可以表示成

$$H(x,y,t)=\sum_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

根据热核的半群性质，有

$$H(x,y,t)=\int_M H(x,z,s)H(z,y,t-s)\,dz,\quad 0<s<t.$$

因此

$$H(x,x,2t)=\int H(x,z,t)^2\,dz.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_M H(x,z,t)^2\,dz &= 2\int_M H(x,z,t)\Delta H(x,z,t)\,dz\\ &= -2\int |\nabla_z H(x,z,t)|^2\,dz\\ &\leqslant -2C\left(\int |H(x,z,t)|^{\frac{2n}{n-2}}\,dz\right)^{\frac{n-2}{n}}.\end{aligned}$$

其中最后一式是 Sobolev 不等式 ， C 为 M 的 Sobolev 常数.

因为 $\forall 0<t$ 有 $\int H(x,z,t)\,dz\leqslant 1$, 所以

$$\left(\int_M |H(x,z,t)|^{\frac{2n}{n-2}}\,dz\right)^{\frac{n-2}{n}} \geqslant \left(\int_M H(x,z,t)^2\,dz\right)^{\frac{2+n}{n}}.$$

注意到 $\lim\limits_{t\to 0}H(x,x,t)=\infty$, 根据以上几式我们得到

$$H(x,x,2t)\leqslant\left(\frac{4}{n}Ct\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

将上式积分，注意 $\lambda_i\leqslant\lambda_k$, 当 $i<k$ 时，得到

$$ke^{-2\lambda_k t}\leqslant\sum e^{-2\lambda_i t}\leqslant\left(\frac{4}{n}Ct\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{Vol}\,(M).$$

令 $2\lambda_k t=\dfrac{n}{2}$, 上式成为

$$ke^{-\frac{n}{2}}\leqslant\left(\frac{C}{n}\cdot\frac{n}{\lambda_k}\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{Vol}\,(M),$$

于是

$$\lambda_k\geqslant\frac{C}{e}\cdot\left[\frac{k}{\mathrm{Vol}\,(M)}\right]^{\frac{2}{n}}.$$

3.6 结点集与特征值的重数

在特征值的研究中，极小极大原理 有着基本的重要性. 在前面我们已经看到它对估计特征值的意义. 本节将展示它的另一应用. 这就是 Courant 结点域定理与关于 Riemann 曲面特征值重数估计的 S. Y. Cheng 定理.

设 M 是紧致带边界的 Riemann 流形 (可能 $\partial M=\varnothing$). 我们将讨论两类特征值问题:

1° $\partial M=\varnothing$, 此时特征值 $0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$,

2° $\partial M\neq\varnothing$, 边界条件为 Dirichlet 条件, $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots$.

定义 设 f 是 M 上某一椭圆型方程的解, $f^{-1}(0)\subset M$ 称为 f 的结点集. 开集 $M\setminus f^{-1}(0)$ 的任一连通分支称为 f 的一个结点域.

如果 f 是 Laplace 算子的特征函数, 那么因为在每个结点域中 f 具有相同的符号, 所以 f 对任一结点域而言是满足 Dirichlet 边界条件的第一特征函数. 这样就可能将涉及第 i 个特征值的问题化为第一特征值问题讨论.

结点集的整体结构一般十分复杂, 还有待人们去研究. 而研究其内部结构的根据是 L. Bers 关于线性椭圆方程解的局部性状的结果 (Comm. Pure and Appl. Math., **8**(1955) 473-496).

定理 (Lipman Bers) 设

$$L\phi(x)=\sum_{v=0}^{m}\sum a_{i_1\dots i_n}(x)\frac{\partial^v}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\phi(x)=0$$

是在原点 ($\in\mathbb{R}^n$) 附近的 C^∞ 系数的椭圆型方程. $\phi(x)$ 是它的解. ϕ 在原点的零点重数为 N, 则在原点附近

$$\phi(x)=P_N(x)+O(|x|^{N+\varepsilon}),\ 0<\varepsilon<1,$$

其中 $P_N(x)$ 是阶为 N 的齐次多项式. 满足

$$\sum a_{i_1\dots i_n}(0)\frac{\partial^m P_N(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=0.$$

将此结果用于 Riemann 流形特征函数的结点集. 由 N. Aronszajn 关于 Riemann 流形上二阶椭圆型方程的惟一性定理. 任何非零特征函数其零点均是有限阶的, 如 $P\in f^{-1}(0)$, 采用 P 点的正规坐标, 则在 P 点附近, $f(x)$ 可以表示成

$$f(x)=P_N(x)+O(|x|^{N+\varepsilon}),$$

其中 P_N 是阶为 N 的球调和多项式, 即满足

$$\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}P_N(x)=0$$

的 N 次多项式, 不仅如此, 尚可进一步证明, 在 P 点附近, 存在一个 C^1- 微分同胚 Φ, 使

$$f(x) = P_N(\Phi(x)).$$

利用这些准备, S. Y. Cheng 证明了以下关于结点集的局部性状定理:

定理 6.1 (S. Y. Cheng) 设 M 是 n 维 C^∞Riemann 流形, 如 $f \in C^\infty(M)$, 满足 $(\Delta + h(x))f = 0, h \in C^\infty(M)$, 则除去一低维 $(\dim < n-1)$ 闭集外, $f^{-1}(0)$ 组成 $n-1$ 维 C^∞- 流形.

证明 用归纳法, $n=1$ 是明显的. 设定理对 $n-1$ 维正确, 现在考虑 n 维情况, 由上已知就局部而言 $f^{-1}(0) \sim P_N^{-1}(0)$, 其中 "$\sim$" 表示 C^1- 微分同胚. 如果 $N=1, P_1^{-1}(0)$ 显然是 $n-1$ 维 C^∞- 流形.

如果 $N>1$, 则由 P_N 的齐次性

$$P_N^{-1}(0) = \{tx : t > 0, x \in S^{n-1}, P_N|_{S^{n-1}}(x) = 0\}.$$

但熟知 $P_N|_{S^{n-1}}$ 是 S^{n-1} 的特征函数, 当 $N>1$ 时, P_N 非 S^{n-1} 的第一特征函数, 它在 S^{n-1} 上必有零点, 因此 $P_N^{-1}(0)$ 以原点为奇点, 根据归纳法, $P_N^{-1}(0)$ 除去一低维闭集 $A(\dim A < n-1)$ 处是光滑的, 即 $f^{-1}(0) \setminus \Phi^{-1}(A) = M_0$ 是 $n-1$ 维 C^1- 流形 (其中 Φ 是上文所述的 C^1- 微分同胚). 下证 M_0 是 C^∞ 的.

设 $y_0 \in M_0$, 则 $f(y_0) = 0, \Phi(y) \notin A$, 利用上述同样的论证于 y_0 的局部, 则在 y_0 的附近, $f(x) \sim P_{N'}(x)$, 其中 $P_{N'}$ 是 N' 次球调和函数.

下证 $N'=1$. 如果 $N'>1$, 那么前面已经证明, 0 是 $P_N^{-1}(0)$ 的奇点, 而在 y 附近 M_0 与 $P_{N'}^{+}(0)$ 是 C^1- 微分同胚, 因而 y 也是 M_0 的奇点, 导致矛盾.

因此 $N'=1$, 但因 $f(x) \sim P_{N'}(x)$, 所以, $df|_{y_0} \neq 0, M_0$ 在 y_0 的局部是 C^∞ 的, 证毕.

系 6.1 如 M 是紧致的 Riemann 曲面, f 是任一特征函数, 则 f 的结点集具有以下性质:

1° 结点集由有限条 C^2-immersed circles 组成 (所谓 C^2-immersed circle 指 $\Phi(S^1)$, 其中 $S^1 \to M$ 是浸入).

2° 结点线上的临界点是孤立的.

3° 当结点线相交时, 它们是周角的分角线.

证明 只要注意到, 当结点线相交时, 在交点附近与 $\mathbb{R}^2$ 中球调和多项式的结点集是 C^1- 微分同胚. 如果 $P_N(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的球调和多项式, 令 $z = x + \sqrt{-1}y$,

则 $P_N(z)$ 是 $\operatorname{Re} z^N$ 和 $\operatorname{Im} z^N$ 的实线性组合，则 $P_N|_{S^1}$ 上是 $\cos N\theta$ 与 $\sin N\theta$ 的线性组合. 其零点将 S^1 $2N$ 等分. 而 $P_N^{-1}(0) = \{tx | x > 0, P_N|_{S^1}(x) = 0\}$. 因此 $P_N^{-1}(0)$ 由通过 0 点的 $2N$ 条等分周角的直线组成. 在指数映射下，这些直线映成等角的基点出发的测地线.

最后，因为 $\mathbb{R}^2$ 中球调和式的结点线是一组过原点的直线，所以 1° 必成立.

下面证明 Courant 的结点域定理.

定理 6.2 设 M 是紧致的 C^∞ 流形， λ_i 表示其第 i 个特征值，则

1° 如果 $\partial M \neq \varnothing$, 则 λ_i 的结点域的个数 $\leqslant i$.

2° 如果 $\partial M = \varnothing$, 则 λ_i 的结点域的个数 $\leqslant i+1$.

证明 只考虑 $\partial M \neq \varnothing$ 的情况，而 $\partial M = \varnothing$ 的情况完全类似. 设 ϕ_i 是 M 的第 i 个特征函数，又设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_{i+1}, \cdots$ 是 ϕ_i 的结点域，定义 $(j \leqslant i)$

$$\phi_i^j = \begin{cases} \phi_i, \text{ 在 } \Omega_j \text{ 中}, \\ 0, \text{ 在 } \Omega_j \text{ 外}. \end{cases}$$

因 $\dim\{\phi_i^1, \cdots, \phi_i^j\} > \dim\{\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}\}$, 可以找到不全为零的实数 $a_1, \cdots, a_i$ 满足

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_i^j \perp \{\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}\},$$

根据极小极大原理，有

$$\begin{aligned} \lambda_i &\leqslant \frac{\int |\nabla\phi|^2}{\int \phi^2} = \frac{\sum_{j=1}^{i} a_j^2 \int_{\Omega_j} |d\phi_i|^2}{\sum a_j^2 \int_{\Omega_j} \phi_i^2} \\ &= \frac{\lambda_i \sum a_j^2 \int \phi_i^2}{\int \phi^2} = \lambda_i \frac{\int \phi^2}{\int \phi^2}. \end{aligned}$$

根据前面的定理，除去一低维点集外， ϕ_i 的结点集由 $n-1$ 维 C^∞ 流形组成. 因此由 Stokes 公式

$$\int_{\Omega_j} |d\phi_i|^2 = \int_{\Omega_j} -\Delta\phi_i\phi_i = \lambda_i \int_{\Omega_j} \phi_i^2,$$

所以

$$\frac{\int_M |d\phi|^2}{\int \phi^2} = \lambda_i.$$

因此，ϕ 是 C^∞ 的. 并且满足 $\Delta\phi + \lambda_i\phi = 0$. 如果结点域多于 i 个，则因 $\phi|_{\Omega_{i+1}} = 0$, 可得 $\phi \equiv 0$ 在 M 上，得到矛盾.

系 6.2 1° 当 $\partial M \neq \varnothing$ 时，第一特征函数在 M 中不改变符号，即 ϕ_i 的结点域的个数 $= 1$；而 $\phi_2 \perp \phi_1, \phi_2$ 在 M 中必改变符号. 所以 ϕ_2 的结点数 $= 2$.

2° 当 $\partial M = \varnothing$ 时，因 $\int_M \phi_1 = 0, \phi_1$ 必改变符号，因此 ϕ_1 的结点域的个数 $= 2$.

因为对 Riemann 面而言，其结点集的结构相对比较简单，根据 Courant 结点域定理，可以获得关于特征值重数的信息，为此，我们首先需要以下拓扑引理：

引理 设 M 是紧致 Riemann 曲面，其亏格为 g. $\phi_j : S^1 \to M(1 \leqslant j \leqslant 2g+t, t \geqslant 1)$ 是 M 上的 C^1 闭曲线. 并且 $\phi_i(S^1) \cap \phi_k(S^1), i \neq k$, 仅由有限个点组成，则 $M \setminus \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+t}(S^1)$ 至少是 $t+1$ 连通的.

证明 从以下的证明过程可见，只需证 $t = 1$ 的情况即可，即要证 $M \setminus \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ 不是单连通的.

M 的亏格数为 g, 熟知 $\dim H_1(M, \mathbb{Z}) = 2g$, 因此存在不全为零的 $n_j \in \mathbb{Z}(j = 1, \cdots, 2g+1)$ 使 $\sum n_j[\phi_j(S^1)] = 0$, 其中 $[\phi_j(S^1)]$ 表示由 $\phi_j(S^1)$ 代表的同调类. 无妨假定 $n_1 \neq 0$, 根据假定，存在 $x_0 \in \phi_1(S^1)$ 使 ϕ_1 在 $\phi_1^{-1}(x_0) \in S^1$ 的局部是 C^1- 微分同胚. 同时 $x_0 \notin \phi_2(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$. 在 M 上作过 x_0 与 ϕ_1 相垂直（在 x_0）的，同时与 $\phi_2(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ 不相交的 C^1 曲线 α, 即 $\alpha : (-1,1) \to M$, 使

$$\alpha|_{(-1,1)} \cap (\phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)) = \{\alpha(0)\} = \{x_0\}.$$

如果 $M\setminus\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$ 是单连通的，那么可以找到 C^1 曲线 $\beta : [-1,1] \to M \setminus \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$, 使 $\beta(-1) = \alpha(-\frac{1}{2}), \beta(1) = \alpha(1)$. 连接 $\alpha|_{[-1/2,1/2]} \cup \beta|_{[-1,1]}$ 就得到一条在 x_0 与 $\phi_1(S^1)$ 正交，除 x_0 外全在 $M\setminus\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$ 内的闭曲线. 在曲线 $\phi_1(S^1)$ 点 x_0 的邻域都如法炮制. 这样我们就得到一个单 C^1 映射

$$\psi : (-1,1) \times S^1 \to M \setminus \phi_2(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1),$$
$$\text{Image}\,(\psi) \cap \phi_1(S^1) \subset \phi_1(S^1)\text{上}x_0\text{的某邻域}.$$

取非负函数 $f \in C_0^\infty((-1,1))$, 使 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$. 则 $w = f(t)\,dt$ 是 $(-1,1)\times$

S^1 上的闭形式. ψ 是单、C^1 映射, $\psi^* w$ 是 M 上闭形式. 因为 $\sum n_j \phi_j \sim 0$, 所以 $(\psi^{-1})^* w (\sum n_j \phi_j) = 0$. 但是

$$(\psi^{-1})^* w \left(\sum_{j=1}^{2g+1} n_j \phi_j \right) = n_i \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \neq 0,$$

得到矛盾.

现在我们已经可以证明本节主要结果.

定理 6.3 (S. Y. Cheng, Comm. Math. Helv., 51(1976), 43-55). 设 M 是紧致的 Riemann 曲面, 亏格数为 g, 则第 i 个特征值 λ_i 的重数 m_i 满足

$$m_i \leqslant \frac{1}{2}(2g+i+1)(2g+i+2).$$

证明 任取一个固定的相应于 λ_i 的特征函数 ϕ_i. 设 $x_0 \in \phi_i$ 的结点集, 则我们断言 ϕ_i 在 x_0 的零阶数 $\leqslant 2g+i$.

由关于结点集的结构知, 如 x_0 的零阶数 $= k$ 的话, 则从 x_0 出发有 k 条结点线. 因此, 如果 $k > 2g+i$, 则由引理, $M \setminus \phi_1^{-1}(0)$ 至少是 $i+1$ 连通的, 再由 Courant 定理, $M \setminus \phi_1^{-1}(0)$ 至多是 i 连通的, 此为矛盾.

下面证明定理. 为简明起见, 看 $i=1$ 的情形. 其他的 i 的证明完全一样.

任取 $P \in M$. 令 M 在 P 点的正规坐标为 x, y, 令 λ_1 的特征空间为 $V_1 = \{\varphi | \Delta\varphi = -\lambda_i \varphi\}$. 令 $N = \frac{1}{2}(2g+3)(2g+2)$. 考虑映射 $T: V_1 \to \mathbb{R}^N$ 如下:

$$\varphi \to \left(\cdots, \frac{\partial^{v_1+v_2}\varphi}{\partial x^{v_1} \partial x^{v_2}}(p), \cdots \right), \quad 0 \leqslant v_1 + v_2 \leqslant 2g+2.$$

如果 $\dim V_1 = m_1 > N$ 的话, 则 $\ker T \neq \varnothing$, 即存在 $\varphi \in \ker T$, 使 φ 在 P 点的零阶数 $> 2g+1$, 因而与前面断言矛盾. 因此 $m_1 \leqslant N = \dfrac{1}{2}(2g+2)(2g+3)$. 定理证毕.

注 (1) 在以上的研究中, 如果注意到特征函数 φ, 满足 $\Delta\varphi = -\lambda_i\varphi$, 因而 $\varphi(p)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(p)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(p)$ 并非独立, 而是有一线性关系. 因此,

$$\left(\cdots, \frac{\partial^{v_1+v_2}\varphi}{\partial x^{v_1} \partial y^{v_2}}(p), \cdots \right)$$

仅落在 $\mathbb{R}^N$ 的低维子空间中, 根据这一观察, G. Resson 将 m_i 的估计改进为

$$m_i \leqslant 4g + 2i + 1.$$

(Ann. Inst. Fourier Grenoble, 30(1980).)

(2) 如果 $g=0$, 即 M 同胚于 S^2, 则 $m_1 \leqslant 3$. 对于 S^2 的标准度量, Cheng 的估计正好达到.

3.7 相邻两特征值之空隙

高阶特征值估计的一个侧面是给出相邻两特征值之空隙的尽可能精确的估计. 这一方面我们将限于提及两个结果, 一是早在 1956 年由 Payne-Polya-Weinberger 给出的上界, 一是新近由 B. Wang 及 S. T. Yau 给出的下界.

定理 7.1 (Payne-Polya-Weinberger) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域, λ_k 是 Ω 的第 k 个特征值 (Dirichlet 条件), 则下述估计成立.

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leqslant \frac{4\sum_{i=1}^k \lambda_i}{Nk}.$$

证明 根据极小极大原理, 如果 u_i 是相应于 λ_i 的满足 Dirichlet 边界条件的特征函数, 则

$$\lambda_{k+1}=\inf_{\left\{\substack{\int \varphi u_i=0 \\ i=1,\cdots,k \\ \varphi|_{\partial\Omega}=0}\right.} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2}{\int_\Omega \varphi^2},$$

不失一般性, 我们可以假定 u_k 是正交规格化的, 即

$$\int_\Omega u_i u_j=\delta_{ij}.$$

现在我们来选取适当的试测函数 φ. 任意固定 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$, 取一待定函数 g, 令

$$\varphi_i = g u_i - \sum_j^k a_{ij} u_j,$$

显然 $\varphi_i|_{\partial\Omega}=0$. 条件 $\int \varphi_i u_e=0$ 给出

$$0=\int g u_i u_e - \sum_j a_{ij}\int u_j u_e = \int g u_1 u_e - a_{ie},$$

所以 $a_{ie} = a_{ei}$,

$$\int_\Omega \varphi_i^2 = \int_\Omega g u_i \varphi_i - \int_\Omega \sum_j a_{ij} u_j \varphi_i = \int g u_i \varphi_i,$$

$$\int |\nabla \varphi_i|^2 = -\int \varphi_i \Delta \varphi_i,$$

因为

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_i &= \Delta g u_i + 2\nabla g \cdot \nabla u_i + g\Delta u_i - \sum_j a_{ij} a_{ij} \Delta u_j \\ &= \Delta g u_i + 2\nabla g \cdot \nabla u_i - \lambda_i g u_i + \sum_j \lambda_j a_{ij} u_j,\end{aligned}$$

所以

$$\int |\nabla \varphi_i|^2 = -\int \Delta g \varphi_i u_i - 2\int \nabla g \cdot \nabla u_i \cdot \varphi_i + \lambda_i \int g u_i \varphi_i,$$

其中

$$\begin{aligned}-2\sum_i \int \varphi_i \nabla g \cdot \nabla u_i &= -2\sum_i \int g \nabla g \cdot u_i \nabla u_i \\ &\quad +2\sum_{ji} a_{ij} \int u_j \nabla u_i \cdot \nabla g \\ &= \sum_i \left(-\frac{1}{2}\int \nabla g^2 \cdot \nabla u_i^2\right) + \sum_{ij} a_{ij} \int \nabla(u_i u_j) \nabla g \\ &= \sum_i \frac{1}{2}\int u_i^2 \Delta g^2 - \sum_{ij} a_{ij} \int u_i u_j \Delta g, \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_i \int |\nabla \varphi_i|^2 &= \sum_i \left(-\int \varphi_i u_i \Delta g\right) + \frac{1}{2}\sum_i \int u_i^2 \Delta g^2 \\ &\quad -\sum_{ij} a_{ij} \int u_i u_j \Delta g + \sum_i \lambda_i \int g u_i \varphi_i \\ &= -\sum_i \int u_i^2 g \Delta g + \sum_{ij} a_{ij} \int u_i u_j \Delta g + \frac{1}{2}\sum_i \int u_i^2 \Delta g^2 \\ &\quad -\sum_{ij} a_{ij} \int u_i u_j \Delta g + \sum_i \lambda_i \int g u_i \varphi_i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \int u_i^2 |\nabla g|^2 + \sum_i \lambda_i \int \varphi_i^2 \\
&\leqslant \sum_i \int u_i^2 |\nabla g|^2 + \lambda_k \sum \int \varphi_i^2.
\end{aligned}
$$

因为 $\forall i, \lambda_{k+1} \int \varphi_i^2 \leqslant \int |\nabla \varphi_i|^2$, 所以

$$
\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\sum \int u_i^2 |\nabla g|^2}{\sum \int \varphi_i^2}.
$$

取 $g = g_a(x) = \sum_{i=1}^N a_i x_i, \sum a_i^2 = 1$, 则 g 满足

$$
\Delta g = 0, \quad |\nabla g| = 1.
$$

于是

$$
\lambda_{k+1} - \lambda_k \leqslant \frac{\sum_i \int u_i^2}{\sum_i \int \varphi_{ia}^2} = \frac{k}{\sum_i \int_\Omega \varphi_{ia}^2},
$$

其中 $\varphi_{ia} = g_a(x) u_i - \sum a_{ij} u_j$, 由 (3.7.1) 式

$$
\begin{aligned}
\sum_i \int_\Omega u_i^2 = k &= -2 \sum_i \int_\Omega \varphi_{ia} (\nabla g \cdot \nabla u_i) \\
&= -2 \sum_i \int_\Omega \varphi_{ia} \left(\sum_j a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).
\end{aligned}
$$

对 $a = (a_1, \cdots, a_N) \in S^{N-1}$ 进行平均. 取规格化的积分 $\int_{S^{N-1}} da = 1$, 则由 Schwarz 不等式

$$
\int \sum \xi_i \eta_i \leqslant \left(\int \sum \xi_i^2 \right)^{1/2} \left(\int \sum \eta_i^2 \right)^{1/2}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{2} &= -\sum_i \int_{S^{N-1}} \int_\Omega \varphi_{ia} \left(\sum_j a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\
&\leqslant \left(\int_\Omega \int_{S^{N-1}} \sum_i \varphi_{ia}^2 \right)^{1/2} \left[\int_\Omega \int_{S^{N-1}} \sum_i \left(\sum_j a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

利用熟知的事实

$$\int_{S^{N-1}} a_j a_e = \begin{cases} \frac{1}{N}, & j = e, \\ 0, & j \neq e. \end{cases}$$

$$\int_\Omega \int_{S^{N-1}} \sum_i \left(\sum_j a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_i \int_\Omega \frac{1}{N} \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_i \frac{1}{N} \int |\nabla u_i|^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i \lambda_i \int u_i^2 = \frac{\sum \lambda_i}{N},$$

所以

$$\frac{k^2}{4} \leqslant \frac{\sum \lambda_i}{N} \cdot \sum_i \int_\Omega \int_{S^{N-1}} \sum_i \varphi_{ia}^2.$$

因为 $\forall a \in S^{N-1}, (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \sum_i \int_\Omega \varphi_{ia}^2 \leqslant k$, 所以

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \sum_i \int_\Omega \int_{S^{N-1}} \varphi_{ia}^2 \leqslant k,$$

所以

$$\frac{k^2}{4} \leqslant \frac{\sum \lambda_i}{N} \frac{k}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)},$$

即 $\lambda_{k+1} - \lambda_k \leqslant \frac{4}{Nk} \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

现在考虑两特征根之差的下界.

定理 7.2　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界光滑凸域， λ_1, λ_2 为 Dirichlet 问题的第一和第二特征值，则 $\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2}$, 其中 d 为 Ω 的直径.

首先证明引理.

引理　设 u_1, u_2 为对应的第一和第二特征函数，则 $u_1(x) > 0, \forall x \in \Omega, \frac{u_2}{u_1}$ 光滑到边界.

证明　$u_1(x) > 0, \forall x \in \Omega$ 是 Courant 定理的结果.

在充分小的开集 U 上，选择局部坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得 $U \cap \partial\Omega = U \cap \{x_1 = 0\}$, 由于在 Ω 内 $u_1 > 0$, 而在 $\partial\Omega$ 上 $u_1 \equiv 0$. 由 Hopf 引理 ，有 $\frac{\partial u_1}{\partial x} < 0$, 在 $\partial\Omega$ 上，又 u_1 光滑到 $\partial\Omega$ 上，所以它是 $U \cup \Omega$ 上的光滑函数. 由 Malgrange 定理和 $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\partial\Omega} \neq 0$, 我们有

$$u_1 = g_1 x_1$$

在局部成立. 其中 g_1 在 $\overline{\Omega}\cup U$ 上光滑且 $g_1\neq 0$.

另外, 在 $\partial\Omega$ 上 $u_2=0$, 由 Malgrange 定理

$$u_2=g_2x_1h_2,$$

其中 $g_2\neq 0$, 且在 $U\cap\overline{\Omega}$ 上 g_2 和 h_2 为光滑的. 显然

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{g_2h_2}{g_1}$$

必在 $\overline{\Omega}\cap U$ 光滑.

现在证明定理. 令 $v=\dfrac{u_2}{u_1}$, 通过简单计算我们有

$$\Delta v=-\lambda v-2(\nabla v\cdot\nabla\log u_1),$$

其中 $\lambda=\lambda_2-\lambda_1>0$. 令 $G:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ 为

$$G=|\nabla v|^2+\lambda(\mu-v)^2,\ \mu>\sup v,$$

则 G 是 $\overline{\Omega}$ 上的光滑函数. 因此必在 $x_0\in\overline{\Omega}$ 取到其极大值, 断言

$$G\leqslant\sup_{\Omega}\lambda(\mu-v). \tag{3.7.2}$$

事实上, 设 $x_0\in\partial\Omega$. 我们选取 $\mathbb{R}^n$ 中的局部正交标架 $\{l_1,\cdots,l_n\}$, 使得 l_1 为外法线, 并记为 $l_1\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial x_1}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0)&=2\sum_{i=1}^n v_iv_{i1}-2\lambda v_1(\mu-v)\\&=2v_1v_{11}+2\sum_{i=2}^n v_iv_{i1}-2\lambda v_1(\mu-v)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

考虑 $\Delta v=-\lambda v-2(\nabla v\cdot\nabla\log u_1)$, 其中 Δv 和 v 都光滑到边界. 因而在 $\partial\Omega$ 上取有限值, 所以

$$(\nabla v\cdot\nabla\log u_1)=\frac{1}{u_1}\left[v_1(u_1)_1+\sum_{2\leqslant i\leqslant n}v_i(u_1)_i\right]$$

取有限值. 而在 $\partial\Omega$ 上 $u_1 \equiv 0$, 所以 $(u_1)_i \equiv 0 (2 \leqslant i \leqslant n)$ (在 $\partial\Omega$ 上). 因此 $\frac{1}{u_1}v_1(u_1)_1$ 有限. 由 Hopf 引理 $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0$, 而 $u_1|_{\partial\Omega} \equiv 0$, 所以 $v_1|_{\partial\Omega} \equiv 0$. 因此

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0) = 2\sum_{i=2}^{n} v_i v_{i_1} \geqslant 0.$$

由 $\mathbb{R}^n$ 中超曲面的第二基本形的定义

$$v_{i1} = -\sum_{j=2}^{n} h_{ij} v_j, \quad 2 \leqslant i, j \leqslant n,$$

其中 (h_{ij}) 为 $\partial\Omega$ 的第二基本张量. 所以

$$0 \leqslant \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0) = -2\sum_{i,j=2}^{n} v_i h_{ij} v_j.$$

因为 Ω 是凸的, 所以 $v_i|_{x_0} = 0, 2 \leqslant i \leqslant n$, 即 $\nabla v(x_0) = 0$. 因此

$$\begin{aligned} G(x) &\leqslant G(x_0) = |\nabla v|^2\big|_{x_0} + \lambda(\mu - v)^2 \\ &\leqslant \sup_{x\in\overline{\Omega}} \lambda(\mu - v)^2. \end{aligned}$$

其次设 $x_0 \in \Omega$, 则我们有

$$\nabla G|_{x_0} = 0, \quad \Delta G|_{x_0} \leqslant 0,$$

即

$$\begin{aligned} 0 &= G_i|_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} 2v_j v_{ji} - 2\lambda(\mu - v)v_i, \\ 0 &\geqslant \Delta G = \sum_{i=1}^{n} G_{ii} \\ &= 2\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + \sum_{ij=1}^{n} 2v_j v_{jii} \\ &\quad + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\lambda(\mu - v)\sum_{i=1}^{n} v_{ii}. \end{aligned}$$

将 v 满足的方程代入

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant \Delta G = & \{2\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + 2\lambda^2 v(\mu - v)\} \\
& + \{4\lambda(\mu - v)(\nabla v \cdot \nabla \log u_1)\} \\
& - \{4(\nabla v) \cdot [\nabla(\nabla v \cdot \nabla \log u_1)]\},
\end{aligned}
$$

若 $\nabla v(x_0) = 0$, 则 (3.7.2) 成立，若 $\nabla v(x_0) \neq 0$, 我们可取局部正交标架，使得 $v_1(x_0) \neq 0, v_i(x_0) = 0, 2 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$
\begin{aligned}
v_{11}(x_0) &= \lambda(\mu - v), \\
v_{ii}(x_0) &= 0,\ 2 \leqslant i \leqslant n.
\end{aligned}
$$

因此

$$
0 \geqslant \Delta G = 2\sum_{ij\geqslant 1}^{n} v_{ij}^2 + 2\lambda(\mu - v)v - 4v_1^2(\log u_1)_{11}.
$$

根据 Brascamp 和 Liep 的结果， $\log u_1$ 是凹函数，因而 $(\log u_1)_{11}(x_0) \leqslant 0$, 因此

$$
\left\{\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + \lambda^2(\mu - v)v\right\}\Bigg|_{x_0} \leqslant 0,
$$

或

$$
\{v_{11}^2 + \lambda^2 v(\mu - v)\}|_{x_0} \leqslant 0.
$$

将 $v_{11}(x_0)$ 的表达式代入，得

$$
\mu(\mu - v(x_0)) \leqslant 0 \quad (\nabla v(x_0) \neq 0 \Rightarrow v(x_0) < \sup_{\Omega} v).
$$

这是不可能的，所以 $\nabla v(x_0) = 0$, 即

$$
G(x) \leqslant \sup_{x\in\overline{\Omega}} \lambda(\mu - v)^2,
$$

即

$$
|\nabla v|^2 \leqslant \lambda\{\sup_{\Omega}(\mu - v)^2 - (\mu - v)^2\},
$$

特别地,

$$|\nabla v|^2 \leqslant \lambda\{(\sup v - \inf v)^2 - (\sup v - v)^2\},$$

因此

$$\sqrt{\lambda} \geqslant \frac{|\nabla v|^2}{\sqrt{(\sup v - \inf v)^2 - (\sup v - v)^2}}.$$

在 $\overline{\Omega}$ 中找两点 q_1 和 q_2, 使 $v(q_2) = \inf\limits_{\overline{\Omega}} v, v(q_1) = \sup\limits_{\Omega} v$. 直线连接 q_1, q_2, 则此线段落在 $\overline{\Omega}$ 中, 沿此线积分得

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \sqrt{\lambda} d,$$

其中 d 为直径, 则 $\lambda \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2}$. 证毕.

3.8 与曲面有关的特征值问题

本节将集中讨论与曲面有关得特征值问题. 特征值问题的总目标是通过尽可能明确的几何量, 例如流形的体积 $\mathrm{Vol}(M)$, 直径 $\mathrm{diam}\,(M)$, 以及有关的曲率量来给出特征值的上界和下界的估计. 从 Polya 猜想 可以看出, 就 $\mathbb{R}^n$ 中情况, 结论似乎应为

$$\lambda_1 \sim \frac{C}{(\mathrm{Vol}\,(M))^{2/n}}.$$

在曲面的情况下 $(n = 2), \lambda_1 \sim \frac{C}{A(M)}$, 其中 $A(M) = \mathrm{Area}\,(M)$.

历史上第一次给出这方面肯定结果的是 Szegö , 他证明, 如果 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, 是一单连通的有界域, 则对满足 Neumann 边界条件的第一特征值 μ_1 有估计

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{A(D)},$$

其中 C 是与 Bessel 函数第一个零点有关的常数, 并且等号成立当且仅当 $D =$ 圆盘.

Szegö 的上述结果, 1965 年由 Weinberger(J. Math. and Mech., 1965) 推广到高维的情形: 如果 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一单连通的有界域, 则 Ω 的 Neumann 边界条件的第一特征值具有上界

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{(\mathrm{Vol}\,(\Omega))^{2/n}},$$

其中等号当且仅当 Ω 为球时成立， C 由球的体积值决定.

将 Szegö 的方法推广到 2 维紧致曲面 S^2 的是 Hersch(*C. R. A. S.*, **270**(1974)).

定理 (Hersch) 对 S^2 的任何度量，其第一特征值有估计

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi}{A(S^2)},$$

其中 $A(S^2)$ 是对所给度量而言的面积.

如果将 S^2 在标准度量下的面积记作 $A_0(S^2)$, 则 $A_0(S^2) = 4\pi$, 熟知此时 S^2 的第一特征值为 2，上式也可以写作

$$\lambda_1 A(S^2) \leqslant \lambda_1(\text{standard}\, A_0(S^2)).$$

Urakawa(J. Math. Soc. Japan., 31(1979), 209-226) 指出， Hersch 的结果直接推广到紧致高维流形是不成立的，即不能指望

$$\lambda_1 \mathrm{Vol}\,(M)^{2/n} \leqslant C,$$

而其中常数 C 仅依赖于 n. 它必须依赖于流形 M 的其他几何量（参加前节中 Cheng 的定理）.

S^2 是亏格 $g = 0$ 的 Riemann 曲面，对于亏格 $g > 0$ 的紧致 Riemann 曲面 Σ_g, 相应于 Hersch 定理的结果由 P. Yang-S. T. Yau 给出：

定理 (P. Yang-S. T. Yau) [*Ann. Scuola. Norm, Sup. Pisa.* **7**(1980)]. 设 Σ_g 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面，则对 Σ_g 的任何度量而言，都有

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi(1+g)}{A\,(\Sigma_g)},$$

其中 $A\,(\Sigma_g)$ 是对给定度量而言.

为了研究这些问题，P Li-S. T. Yau 提出了共形体积的概念, 下文将表明，这一概念不仅与第一特征值的估计有关, 还与关于超曲面的 Willmore 猜想及极小曲面等有关.

本节将顺序讨论 Szegö-Weinberger 定理， Hersch 定理， P. Yang-S. T. Yau 定理 以及共形体积等有关问题.

为了叙述并证明 Szegö 定理, 我们首先回顾一下 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $D = \{|z| < 1\}$ 的特征值问题（Neumann 条件）. 对 $\mathbb{R}^2$ 而言, 其 Laplace 算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

如果用极坐标 (r,θ) 表达则为

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}.$$

欲求 Δ 的第一特征值和特征函数，通常采用分离变量法，令 $u = R(r)\cos\theta$ 或 $u = R(r)\sin\theta$ 为第一特征函数，特征值为 λ_1, 则由 $\Delta u = -\lambda_1 u$ 而得

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda_1 - \frac{1}{r^2}\right)R = 0.$$

经过变量替换， $R(r/\sqrt{\lambda_1})$ 满足的方程是 Bessel 方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\right]R(r/\sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

因此， $R(r/\sqrt{\lambda_1}) = J_1(r), R(r) = J_1(\sqrt{\lambda_1}r)$, 其中 $J_1(r)$ 为通常的 Bessel 函数. 如果我们要求的是满足 Neumann 条件的第一特征函数，则条件 $\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=1} = 0$ 等价于 $\frac{dR(r)}{dr}\Big|_{r=1} = 0$, 即 $J_1'(\sqrt{\lambda_1}) = 0$, 因此 $\sqrt{\lambda_1}$ 是 $J_1'(r)$ 的第一个零点. 根据 Bessel 函数的理论，它的数值（以下记为 ξ） $\xi \doteq 1.8412$. 总之，对 D 的第一特征值问题而言（ Neumann 条件），我们可以找到两个独立的特征函数:

$$J_1(\sqrt{\lambda_1}r)\cos\theta,\ J_1(\sqrt{\lambda_1}r)\sin\theta.$$

而第一特征值

$$\lambda_1 = \xi^2 \approx (1.8412)^2.$$

下述定理见 G. Szegö, J. Rat. Math. Anal., 3(1954), 343-356.

定理 8.1 (Szegö) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中单连通有界区域，则它的第一特征值 μ_1 （ Neumann 条件）满足

$$\mu_1 \leqslant \frac{\xi^2\pi}{A(\Omega)},$$

其中 $\xi \doteq 1.8412, A(\Omega) = \text{Area}\,(\Omega)$.

注 当 $\Omega =$ 单位圆盘时，这一估计是最佳的.

证明 由极小极大原理

$$\mu_1 = \inf_{\int_\Omega f=0} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2},$$

因此我们欲寻求尽可能接近第一特征函数的检测函数，以给出 μ_1 的上界. 令 $f(r)=J_1(\xi r)$, 则由前所述 $g_1=f(r)\cos\theta, g_2=f(r)\sin\theta$ 是单位圆盘 D 的第一特征函数（ Neumann 条件），因此，满足

$$\int_D |\nabla g_i|^2=\xi^2\int_D g_i^2,\quad i=1,2,$$

$\left.\dfrac{\partial g_i}{\partial r}\right|_{r=1}=0$ 蕴含 $\int_D g_i=0$.

根据 Riemann 映照定理 ，存在一一的全纯映照 $F:\Omega\to D,\partial\Omega\to\partial D$, 令 $\varphi_1=g_1\circ F,\varphi_2=g_2\circ F$. 因映照是共形的， $\partial\Omega$ 的法线方向变成 ∂D 的法线方向. 因为 $\left.\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right|_{\partial\Omega}=0$, 所以 $\int_\Omega\varphi_1=0=\int_\Omega\varphi_2$, 但熟知的 Dirichlet 积分是共形不变的. 因而

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|\nabla\varphi_1|^2+|\nabla\varphi_2|^2)&=\int_D|\nabla g_1|^2+|\nabla g_2|^2\\&=\xi^2\int_D g_1^2+g_2^2=\xi^2\int_D f^2(r).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_\Omega\varphi_1^2+\varphi_2^2&=\int_\Omega(g_1\circ F)^2+(g_2\circ F)^2\\&=\int_D f^2(r)\left|\frac{dw}{d\,z}\right|^2 r\,d\theta\,dr\\&=\int_0^1 f^2(r)r\int_0^{2\pi}\left|\frac{dw}{d\,z}\right|^2 d\theta\,dr,\end{aligned}$$

其中 $w=w(z)$ 是全纯映射 $F^{-1}:D\to\Omega$, 令

$$G(r)=\int_0^{2\pi}\left|\frac{dw}{d\,z}\right|^2 d\theta.$$

设 $w(z)=\sum_0^\infty a_n\cdot z^n$, 则

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=\sum na_n\cdot z^{n-1},\\G(r)&=\int_0^{2\pi}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=2\pi\sum_1^\infty n^2|a_n|^2\cdot r^{2(n-1)}.\end{aligned}$$

由此可得 $G(r)$ 是增函数. 于是，当 $r \leqslant 1$ 时，

$$\int_0^r G(t)t\,dt = r^2\int_0^1 G(xr)x\,dx \leqslant r^2\int_0^1 tG(t)\,dt.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(r)rG(r)dr &= \int_0^1 f^2(r)d\left(\int_0^r tG(t)\,dt\right)\\
&\geqslant f^2(1)\int_0^1 tG(t)\,dt - \int_0^1 [f^2(r)]'r^2\int_0^1 tG(t)\,dt\\
&\geqslant \int_0^1 tG(t)\,dt\left[f^2(1) - \int_0^1 r^2[f^2(r)]'\,dr\right]\\
&= \int_0^1 tG(t)\,dt\cdot\int_0^1 2f^2(r)r\,dr\\
&= 2\int_0^1 f^2(r)\,dr\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\,dr\,d\theta\\
&= 2\int_0^1 f^2(r)r\,dr\cdot \mathrm{Area}\,(\Omega)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_D f^2\right)A(\Omega),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\mu_1 &\leqslant \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_2|^2}{\int_\Omega \varphi_1^2+\varphi_2^2}\\
&= \frac{\xi^2\int_D f^2(r)}{\frac{1}{\pi}\left(\int_D f^2(r)\right)A(\Omega)} = \frac{\xi^2\pi}{A(\Omega)}.
\end{aligned}$$

式中用到 $f'(r) > 0$（当 $0 < r < 1$ 时）这是因为 $r = 1$ 是 $f'(r)$ 的第一个正零点.

注 1 利用同样的方法可以推广这个定理到具非正曲率的带边的紧致曲面上，即有：对单连通的紧致曲面（带有边界）M，如果其曲率非正，则其第一特征值（ Neumann 条件）满足

$$\mu_1 \leqslant \frac{\xi^2\pi}{\mathrm{Area}\,(M)},$$

其中 $\xi \approx 1.8412$ 为 $J_1'(r)$ 的第一个零点. （见 P Li-Yau 的文章.）

注 2 对于 $\mathbb{R}^2$ 中有界单连通区域 Ω 的高阶特征值，有 Polya 猜测：对 Dirichlet 条件而言，

$$\lambda_i \geqslant \frac{4\pi i}{\text{Area}\,(\Omega)};$$

对 Neumann 条件而言，

$$\mu_1 \leqslant \frac{4\pi i}{\text{Area}\,(\Omega)},$$

其中特征值重数计算在内，见第七章问题集，问题 70.

在往下讨论以前，我们首先叙述 $\mathbb{R}^N$ 中单位球 $\left\{\sum_{i=1}^N x_i^2 < 1\right\}$ 的特征值问题（ Neumann 条件），我们要找的特征函数具 $\varphi(r)\dfrac{x_i}{r}$ 的形式，由

$$\begin{aligned}-\mu\varphi(r)\frac{x_i}{r} &= \Delta\left(\varphi(r)\frac{x_i}{r}\right)\\ &= \Delta\varphi\cdot\frac{x_i}{r} + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{x_i}{r} + \varphi\Delta\frac{x_i}{r},\end{aligned}$$

经过直接验算

$$\begin{aligned}\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{x_i}{r} &= 0,\\ \Delta\frac{x_i}{r} &= -(N-1)\frac{x_i}{r^3},\end{aligned}$$

得

$$-\mu\varphi(r)\frac{x_i}{r} = \Delta\varphi\cdot\frac{x_i}{r} - (N-1)\frac{x_i}{r^3}\varphi,$$

所以

$$\Delta\varphi + \left(\mu - \frac{N-1}{r^2}\right)\varphi = 0,$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{N-1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr} + \left(\mu - \dfrac{N-1}{r^2}\right)\varphi = 0,\\ \varphi'(1) = 0 \quad (\text{Neumann 条件}).\end{cases}$$

将它正规化，考虑 Bessel 型方程

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \left(1 - \frac{N-1}{r^2}\right)\varphi = 0$$

的解 $J(r)$. 设 J' 的第一个正零点为 β, 则 $J(\beta r)$ 满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2J}{dr^2} + \dfrac{N-1}{r}\dfrac{dJ}{dr} + \left(\beta^2 - \dfrac{N-1}{r^2}\right)J = 0, \\ J'(\beta r)|_{r=1} = 0. \end{cases}$$

于是 $\left\{J(\beta r)\dfrac{x_i}{r}\right\}$ 组成 $\{\sum x_i^2 < 1\}$ 的第一特征函数（ Neumann 条件），其特征值为 β^2.

如果球 $B(O, R_0)$ 的半径是 R_0. 那么经过一个简单的变换，即有 $\{J(\frac{\beta}{R_0}r)\frac{x_i}{r}\}$ 组成 $\{\sum x_i^2 < R_0^2\}$ 的第一特征函数，特征值为

$$\beta^2/R_0^2 = 常数/[\mathrm{Vol}\,(B(O,R_0))]^{2/N}.$$

下面证明 Weinberger 对 Szegö 定理的高维推广.

定理 8.2 (Weinberger) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界域，则满足 Neumann 条件的特征值有如下估计

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{(\mathrm{Vol}\,(\Omega))^{2/N}},$$

其中等号仅当 $\Omega = B(x_0, R_0)$ 时成立，即中心在某点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 半径为 $R_0 > 0$ 的球.

证明 由极小极大原理,

$$\mu_1 = \inf_{\int_\Omega f=0} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}.$$

我们必须构造适当的检验函数,以给出 μ_1 的上界.取以原点为球心的球 $B(O,\rho_0)$, 使 $\mathrm{Vol}\,(B(O,\rho_0)) = \mathrm{Vol}\,(\Omega)$, 其中 $B(O,\rho_0)$ 的半径为 ρ_0, 根据前面的说明，我们有 $B(O,\rho_0)$ 的满足 Neumann 条件的第一特征函数 $\left\{g(r)\dfrac{x_i}{r}\right\}$, 其中 g 满足

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g}{dr^2} + \dfrac{N-1}{r}\dfrac{dg}{dr} + \left(\mu_1(B) - \dfrac{N-1}{r^2}\right)g = 0, \\ g'(\rho_0) = 0. \end{cases}$$

因为 ρ_0 是 g' 的第一个正零点， g 在 $[0,\rho_0]$ 上是递增的.

作辅助函数

$$G(r) = \begin{cases} g(r), & r \leqslant \rho_0, \\ g(\rho_0), & r \geqslant \rho_0, \end{cases}$$

对任何 $x^0 \in \operatorname{con}(\Omega)$（ Ω 的凸壳），考虑向量 $V(x^0)$

$$V(x^0) = -\sum_{i=1}^{N} \int_{x\in\Omega} \frac{(x_i - x_i^0)G(r(x,x^0))}{r(x,x^0)}\,dx \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

这样就定义了 $\operatorname{con}(\Omega)$ 上的一个连续向量场，当 $x^0 \in \partial(\operatorname{con}(\Omega))$ 时，$V(x^0)$ 的方向指向 $\partial(\operatorname{con}(\Omega))$ 的外侧，与 $\partial(\operatorname{con}(\Omega))$ 横截 (transversal) 相交，在这种情况下，关于向量场奇点的 Hopf 定理成立，因而至少存在一个点 $x^0 \in \operatorname{con}(\Omega)$，使 $V(x^0) = 0$，将坐标原点移到 x^0，即无妨认为 $x^0 = 0$，令 $f_i = G(r)\frac{x_i}{r}(i = 1,2,\cdots,N)$，则我们有 $\int_\Omega f_i = 0$，因而

$$\mu_1 \int_\Omega f_1^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla f_i|^2$$

及

$$\mu_1 \int_\Omega \sum_i f_i^2 \leqslant \int_\Omega \sum_i |\nabla f_i|^2.$$

$$\begin{aligned}
\sum_i |\nabla f_i|^2 &= \sum_{i,j} |\nabla_j f_i|^2 \\
&= \left(\frac{G'}{r} - \frac{G}{r^2}\right)^2 \sum_{i,j} \frac{x_j^2 x_i^2}{r^2} + \frac{G^2}{r^2}\sum_{i,j}\delta_{ij} \\
&\quad + 2\frac{G}{r}\left(\frac{G'}{r} - \frac{G}{r^2}\right)\sum_{i,j}\frac{x_i^2\delta_{ij}}{r} \\
&= \frac{G'^2}{r^2}\sum_i x_i^2 + \frac{G^2}{r^2}\sum_i\left(1 - \frac{x_i^2}{r^2}\right) \\
&= G'^2 + \frac{G^2}{r^2}(N-1), \\
\sum_i f_i^2 &= G^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\mu_1 \leqslant \frac{\int_\Omega G'^2 + (N-1)\frac{G^2}{r^2}}{\int_\Omega G^2}.$$

考虑分子中被积函数 $G'^2 + (N-1)\frac{G^2}{r^2}$，由定义，当 $r \leqslant \rho_0$ 时，$G(r) = g(r)$，

此时

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(g'^2+(N-1)\frac{g^2}{r^2}\right)&=2\left[g'g''+(N-1)\frac{g}{r}\left(\frac{g'}{r}-\frac{g}{r^2}\right)\right]\\&=2\left[g'\left(-\frac{N-1}{r}g'-\mu_1(B)g+\frac{N-1}{r^2}g\right)\right.\\&\quad\left.+(N-1)\frac{g}{r}\left(\frac{g'}{r}-\frac{g}{r^2}\right)\right]\\&=2\left[-\mu_1(B)gg'-\frac{N-1}{r}\left(g'^2-\frac{2gg'}{r}+\frac{g^2}{r^2}\right)\right]\\&=-2\mu_1(B)gg'-\frac{N-1}{r^3}(rg'-g)^2\\&\leqslant 0.\end{aligned}$$

这里用到 $g\geqslant 0, g'\geqslant 0$. 当 $r>\rho_0$ 时,

$$\frac{d}{dr}\left(G'^2+\frac{N-1}{r^2}G^2\right)=(N-1)g^2(\rho_0)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)<0.$$

记 $\Omega_1=\Omega\cap B(O,\rho_0)$, 则当 $x\in\Omega\setminus\Omega_1$ 时, $r(x)\geqslant\rho_0$, 因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(G'^2+\frac{N-1}{r^2}G^2\right)&=\int_{\Omega_1}\left(G'^2+\frac{N-1}{r^2}G^2\right)\\&\quad+\int_{\Omega\setminus\Omega_1}\left(G'^2+\frac{N-1}{r^2}G^2\right)\\&\leqslant\int_{\Omega_1}\left(g'^2+\frac{N-1}{r^2}g^2\right)+\left(G'^2+\frac{N-1}{r^2}G^2\right)\Big|_{r=\rho_0}\\&\quad\cdot\mathrm{Vol}\,(\Omega\setminus\Omega_1)\\&\leqslant\int_{\Omega_1}\left(g'^2+\frac{N-1}{r^2}g^2\right)+\int_{B(O,\rho_0)\setminus\Omega_1}\left(g'^2+\frac{N-1}{r^2}g^2\right)\\&=\int_{B(O,\rho_0)}\left(g'^2+\frac{N-1}{r^2}g^2\right).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_\Omega G^2&=\int_{\Omega_1}g^2+g^2(\rho_0)\mathrm{Vol}\,(\Omega\setminus\Omega_1)\\&=\int_{\Omega_1}g^2+g^2(\rho_0)\mathrm{Vol}\,(B(O,\rho_0)\setminus\Omega_1)\\&\geqslant\int_{B(O,\rho_0)}g^2,\end{aligned}$$

因此

$$\mu_1 \leqslant \frac{\int_\Omega G'^2 + \frac{N-1}{r^2} G^2}{\int_\Omega G^2} \leqslant \frac{\int g'^2 + \frac{N-1}{r^2} g^2}{\int_{B(O,\rho_0)} g^2}$$
$$= \mu_1(B(O,\rho_0)) = \frac{C}{(\mathrm{Vol}\,(B(O,\rho_0)))^{2/N}} = \frac{C}{(\mathrm{Vol}\,(\Omega))^{2/N}}.$$

以下讨论中，有关 S^n 的共形变换群的下述事实是经常用到的.

设 S^n 的共形变换群为 G, 则 G 中包含一个和 $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} || x| < 1\}$ 同胚的子群 G_0 ：令 $x \in B^{n+1}$, 定义

$$y = \frac{(1-|a|^2)x - (1 - 2a\cdot x + |x|^2)a}{1 - 2a\cdot x + |a|^2|x|^2}, \ |a|^2 < 1, \tag{3.8.1}$$

由 Schwarz 不等式，当 $|x|^2 \leqslant 1$ 时，

$$1 - 2a\cdot x + |a|^2|x|^2 = (1 - a\cdot x)^2 + |a|^2|x|^2 - (a\cdot x)^2 > 0,$$

因此可以定义

$$g_a : \overline{B}^{n+1} \to \overline{B}^{n+1}.$$

不难验证

$$g_a : B^{n+1} \to B^{n+1}, \ S^n \to S^n,$$

$B^{n+1} = \{x | |x|^2 < 1\}$, 这是因为通过计算，

$$1 - |y|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|x|^2)}{1 - 2a\cdot x + |a|^2|x|^2},$$

不仅如此， g_a 作为 $B^{n+1} \to B^{n+1}, S^n \to S^n$ 还是共形的，因为有

$$\frac{|dy|^2}{(1-|y|^2)^2} = \frac{|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}.$$

另外，由 (3.8.1) 还可以看出，当 $a \in S^n$（即 $|a|^2 = 1$）时，则任何 $x \in S^n \setminus \{a\}$, 都有

$$y = \frac{-2a(1 - a\cdot x)}{2(1 - a\cdot x)} = -a,$$

即：此时 g_a 将 $S^n \setminus \{a\} \to \{-a\}$.

以上共形变换群也可以通过球极投影来得到: 对于任何 $a \in B^{n+1}$, 通过球极投影(以 $\frac{a}{|a|}$ 为极点)将 $x \in S^n \to \xi(x) \in \mathbb{R}^n$, 对任何实数 t, 及 $\xi \in \mathbb{R}^n \to t\xi \in \mathbb{R}^n$ 定义了 S^n 上的一个单参数共形变换群 $g_a(t)$, 这一单参数变换群定义了 S^n 上一个共形向量场 $V_a(x)$,

$$V_a(x) = \frac{a}{|a|}\text{在}T_xS^n\text{上的投影}.$$

$g_a(t)$ 中存在惟一的映射将 $O \to a$, 直观上也看得很清楚. 当 $a \to S^n$ 时(即 $t \to \infty$), $S^n \setminus \{-a\} \to \{a\}$.

现在我们来证明 Hersch 定理.

定理 8.3 (Hersch) 对于 S^2 的任何度量, 其第一特征值有估计

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi}{A(S^2)}.$$

证明 对于 S^2 的任何度量 $d\widetilde{s}^2$, 考虑共形映射(这样的共形映射总是存在的, 因为 S^2 上只有一个共形结构) $\varphi : (S^2, d\widetilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$ " ds_0^2 " 指通常的球面度量. 根据极小极大原理,

$$\lambda_1 = \inf_{\int_{S^2} f=0} \frac{\int_{S^2} |\nabla f|^2 \, d\widetilde{v}}{\int_{S^2} f^2 \, d\widetilde{v}},$$

$d\widetilde{v}$ 是对 $d\widetilde{s}^2$ 而言的. 现在取 (s^2, ds_0^2) 上的坐标函数 $x^i (i = 1, 2, 3)$ (熟知它是 (S^2, ds_0^2) 上的第一特征函数!), 则 $x^i \circ \varphi$ 是 $(S^2, d\widetilde{s}^2)$ 上的函数.

1° 因为 φ 是共形映射, 而在曲面情况下, 函数的 Dirichlet 积分是共形不变的, 即 $\forall i$

$$\begin{aligned}\int_{S^2} |\nabla(x^i \circ \varphi)|^2 \, d\widetilde{v} &= \int_{S^2} |\nabla x^i|^2 \, dv \\ &= -\int_{S^2} x^i \Delta x^i = 2\int_{S^2} x^{i^2} = \frac{8\pi}{3}.\end{aligned}$$

2° Area $(S^2) = \int_{S^2} 1 \cdot d\widetilde{v} = \sum \int_{S^2} (x^i \circ \varphi)^2$, 因此, 至少有一 i, 有

$$\int_{S^2} (x^i \circ \varphi)^2 \geqslant \frac{\text{Area}\,(S^2)}{3}.$$

因而, 如果 φ 选择可使 $\int_{S^2} x^i \circ \varphi \, d\widetilde{v} = 0$, 那么

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_{S^2} |\nabla(x^i \circ \varphi)|^2 \, d\widetilde{v}}{\int |x^i \circ \varphi|^2 \, d\widetilde{v}} \leqslant \frac{8\pi}{\text{Area}\,(S^2)}.$$

因此问题归结为找 φ 使 $\int_{S^2} x^i \circ \varphi d\widetilde{v} = 0$, 任意固定共形映射 $\varphi_0 : (s^2,\, d\widetilde{s}^2) \to (S^2,\, ds_0^2)$, 再考虑本节开始所述的 $(S^2,\, ds_0^2) \to (S^2,\, ds_0^2)$ 的共形变换群 G_0, 取 $g_a \in G_0$, 令 $\varphi = g_a \circ \varphi_a$, 它自然是 $(S^2,\, d\widetilde{s}^2) \to (S^2,\, ds_0^2)$ 的共形变换.

定义映射 $H : B^{n+1} \to B^{n+1}$

$$a \mapsto \frac{1}{A(s^2)} \left(\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi\, d\widetilde{v} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

当 $a \in S^2$ 时，如前所述， S^2 上所有的点 (除去 $-a$ 外) 都映成 a, 此时 $\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi = a^i, a = (a^1, a^2, a^3) \in S^2$, 因而 H 可连续延拓到 S^n 上，并且在 S^n 上是恒同映射，根据初等拓扑知识，此时 H 必是满的，因而存在 $a \in B^{n+1}$ 使

$$H(a) = (0, 0, 0),$$

即

$$\int x^i \circ g_a \circ \varphi = 0, \ \forall i,$$

定理证毕.

S^2 是亏格 $g = 0$ 的 Riemann 面，对亏格 $g > 0$ 的闭 Riemann 曲面 $\sum_g$, 相应于 Hersch 定理的结果是 P. Yang 与 S. T. Yau 的下述定理:

定理 8.4 (P. Yang-S. T. Yau) 对 $\sum_g$ 的任何度量其第一特征值满足

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi(1+g)}{\mathrm{Area}\,(\sum_g)}.$$

这一定理可以考虑共形分支映射 $\varphi : \sum_g \to S^2$, 再利用类似 Hersch 定理的证明方法而得到. 由 Riemann-Roch 定理， $\sum_g$ 上存在非常数的亚纯函数，具有惟一的重数不超过 $g+1$ 的零点. 因此 $\sum_g$ 一定是 S^2 的阶数不超过 $g+1$ 的分支覆盖. 这样的 φ 是一定存在的. 但是利用下文将讨论的共形体积概念，这一定理还可以更简单地证明.

设 $(M,\, ds^2)$ 是一紧致的 Riemann 面， $\phi : M \to S^{\triangle}$ 是一共形映射 (浸入), 设 ds_0^2 是 $S^{\triangle}$ 的标准度量，则

$$\phi^*\, ds_0^2 = a(x)\, ds^2,$$

其中 $a(x)$ 是定义于 M 上的非退化 C^∞ 正函数.

令 G 为 S^n 的共形变换群, $\forall g\in G, g\circ\phi: M\to S^n$ 仍是共形的, 记 dv_g 为 M 上对应于 $(g\circ\phi)^*\,ds_0^2$ 的体积元素.

定义 相应于 ϕ 的 M 的共形体积 $V_C(n,\phi)$ 为

$$V_C(n,\phi)=\sup_{g\in G}\int_M dv_g,$$

而 M 的共形体积则定义为

$$V_C(n,M)=\inf_{\phi} V_C(n,\phi),$$

其中 ϕ 取遍所有 $M\to S^n$ 的非退化共形映射 (浸入).

下述定理表明共形体积与第一特征值有着密切的关系, 同时该定理也表明 $V_C(n,\phi)$ 的定义是非平凡的.

定理 8.5 (P. Li-S. T. Yau) 设 M 是紧致 Riemann 面, 如果存在 $M\to S^n$ 的共形映射的话 (此时 $V_C(n,M)$ 可定义), 则

$$\lambda_1 V(M)\leqslant 2V_C(n,M),$$

等号成立时 M 是 S^n 的极小曲面, 并且浸入 $M\to S^n$ 由第一特征函数的子空间给出.

证明 如同 Hersch 定理证明一样, 设 $x^i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标, 则对任何从 M 到 S^n 的共形变换 ϕ, 存在 $g\in G$ 使

$$\int_M x^i\circ g\circ\phi=0,\quad \forall i,$$

于是

$$\lambda_1\leqslant\frac{\int_M|\nabla(x^i\circ g\circ\phi)|^2}{\int_M(x^i\circ g\circ\phi)^2}.$$

我们注意, 对于任何等距浸入曲面 $N\to S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$, 有

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla x^i|^2=2. \tag{3.8.2}$$

事实上, 对于任一点 $p\in N\subset S^n$, 通过 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交变换可使 $p=(0,\cdots,0,1)$ 是 S^n 的北极. 于是 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 给出了 S^n 的一个局部坐标系, 使得 S^n 的标

准度量张量 g_{ij} 在 p 点为 $g_{ij}(p)=\delta_{ij}$. 不妨设 $T_pN=\text{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\}$. 因为 N 的度量是从 S^n 诱导而得，故易得

$$|\nabla x^1|^2(p)=|\nabla x^2|^2(p)=1,$$
$$|\nabla x^i|^2(p)=0,\quad \forall 3\leqslant i\leqslant n+1.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla x^i|^2(p)=2.$$

既然点 $p\in N$ 是任意的，故得 (3.8.2).

因为

$$\int_M|\nabla(x^i\circ g\circ\phi)|^2=\int_{g\circ\phi(M)}|\nabla x^i|^2=\int_M(g\circ\phi)^*(|\nabla x^i|^2\,dv),$$

所以由 (3.8.2) 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\int_M|\nabla(x^i\circ g\circ\phi)|^2&=\int_M(g\circ\phi)^*(\sum|\nabla x^i|^2\,dv)\\&=2\int_M(g\circ\phi)^*\,dv\leqslant 2V_C(n,\phi).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\sum_{i=1}^{n+1}\int_M(x^i\circ g\circ\phi)^2=\int_M 1=\text{Vol}\,(M),$$

所以

$$\lambda_1\text{Vol}\,(M)\leqslant 2V_C(n,\phi).$$

因为 $V_C(n,M)=\inf\limits_{\phi}V_C(n,\phi)$, 自然有

$$\lambda_1V(M)\leqslant 2V_C(n,M).$$

现在证明定理的后一断言，设 $\lambda_qV(M)=2V_C(n,M)$, 通过对度量作一伸缩变换，无妨设 $\lambda_1=2$, 此时有 $V(M)=V_C(n,M)$.

取一串共形映射 $\phi_h:M\to S^n$, 使

$$\lim_{h\to\infty}V_C(n,\phi_h)=V_C(n,M),$$

同时满足

$$\int_M x^i \circ \phi_h = 0, \quad \forall i, h.$$

适当改变坐标顺序，无妨设

$$\lim_{h\to\infty}\int_M (x^i\circ\phi_h)^2 = \begin{cases} >0,\ i=1,2,\cdots,N, \\ 0, \quad\ i=N+1,\cdots,n+1. \end{cases}$$

由

$$\begin{aligned} 2V_C(n,\phi_h) &\geqslant \sum_{i=1}^{n+1}\int_M |\nabla x^i\circ\phi_h|^2 \\ &\geqslant 2\sum_{i=1}^{n+1}\int_M (x^i\circ\phi_h)^2 = 2V(M), \end{aligned}$$

第二式是因为假定 $\lambda_1 = 2$, 第三式是因为 $\sum x_i = 1$, 令 $h\to\infty$, 注意假设 $V_C(n,M)=V(M)$, 得

$$\begin{aligned} 2V_C(n,M) &= \lim_{h\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\int_M |\nabla x^i\circ\phi_h|^2 \\ &= \lim_{h\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1} 2\int_M (x^i\circ\phi_h)^2 = 2V(M), \end{aligned}$$

因而对任意固定的 i, $\{x^i\circ\phi_h\}$ 是 Sobolev 空间 $H_1^2(M)$ 中的有界集, 因而无妨假设它是弱收敛的. 再根据 Sobolev 空间的理论, $H_1^2(M)\hookrightarrow L_2(M)$ 是紧算子, 无妨设它在 $L_2(M)$ 中强收敛到 ψ_i, 显然 $\sum_{i=1}^{n+1}\psi_i^2 = 1$ a. e., $\psi_i = 0 (i=N+1,\cdots,n+1)$. 由于 $\forall i$

$$\int_M |\nabla x^i\circ\phi_h|^2 \geqslant 2\int_M (x^i\circ\phi_h)^2$$

$$\lim\sum_{i=1}^{n+1}\int_M |\nabla x^i\circ\phi_h|^2 = \lim\sum_{i=1}^{n+1}\int_M (x^i\circ\phi_h)^2,$$

因此, $\forall i$ 都有

$$\lim\int_M |\nabla x^i\circ\phi_h|^2 = 2\int\psi_i^2 \leqslant \int_M |\nabla\psi_i|^2,$$

同时因为 $x^i\circ\phi_h\to\psi_i$（弱）， $\lim\int|\nabla x^i\circ\phi_h|^2\geqslant\int|\nabla\psi_i|^2$, 因而

$$\lim\int_M|\nabla x^i\circ\phi_h|^2=\int|\nabla\psi_i|^2,$$

即在 $H_1^2(M)$ 中实际上 $x^i\circ\phi_h$ 是强收敛到 ψ_i, 并且 $2\int\psi_i^2=\int|\nabla\psi_i|^2$, 即 ψ_i 是 M 的第一特征函数并且是 $C^\infty(M)$ 的. $x\to(\psi_1(x),\cdots,\psi_N(x))$ 定义了 $M\to S^{N-1}$ 的共形映射，由 $\sum\varphi_i^2=1$, 得

$$\sum|\nabla\psi_i|^2=2\sum\psi_i^2=2=\lambda_1,$$

因此 $(\psi_1,\cdots,\psi_N)$ 实为等距 (isometry)，因而 M 是 S^{N-1} 的一个极小子流形.

定理 8.6 设 M^2 是由浸入 $\phi:M^2\to S^n$ 给出的 S^n 中的紧致极小曲面，则

$$V(M)=V_C(n,\phi).$$

证明 设 $\pi:S^n\to\mathbb{R}^n$ 为球极投影，则 π 是 $S^n\to\mathbb{R}^n$ 的共形映射，对每一个 $\pi\circ\phi(M)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的法向量 v^α, 令 $\{\mu_1^\alpha,\mu_2^\alpha\}$ 是相应的主曲率，熟知

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}\sum_\alpha(\mu_1^\alpha-\mu_2^\alpha)^2$$

是共形不变量. 因此，对于任何 $g\in\mathrm{conf}\,(S^n)$ 都有

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}\sum_\alpha(\mu_1^\alpha-\mu_2^\alpha)^2=\int_{\pi\circ\phi(M)}\sum_\alpha(\overline{\mu}_1^\alpha-\overline{\mu}_2^\alpha)^2.$$

但是由 Gauss-Bonnet 公式（如 M 是 N 的曲面，则 $R_M(X,Y)-R_N(X,Y)=\sum_\alpha\mu_1^\alpha\mu_2^\alpha$），得

$$\begin{aligned}4\int_{\pi\circ\phi(M)\mathrm{in}\mathbb{R}^n}H^2-K&=4\int_{g\circ\phi(M)\mathrm{in}S^n}\overline{H}^2-(\overline{K}-1)\\&=4\int\overline{H}^2-\overline{K}+4V(g\circ\phi(M)).\end{aligned}$$

再由 Gauss-Codazzi 公式 $\int K=\int\overline{K}=2\pi\chi(M)$, 因此有

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}H^2=\int_{g\circ\phi(M)}\overline{H}^2+V(g\circ\phi(M)).$$

由于 $\phi(M)$ 是 S^n 中极小曲面，因此

$$V(\phi(M))=\int_{\pi\circ\phi(M)}H^2=\int_{g\circ\phi(M)}\overline{H}^2+V(g\circ\phi(M)),$$

所以

$$V(\phi(M)) \geqslant V(g \circ \phi(M)),\ \forall g.$$

由 $V_C(n,\phi)$ 的定义，有

$$V(\phi(M)) \geqslant V_C(n,\phi),$$

另一方面，由定义显然有 $V_C(n,\phi) \geqslant V(\phi(M))$, 定理证毕.

以上两个定理结合起来，可以使我们计算若干曲面的共形体积.

系 设 M 是紧致曲面，如存在一个极小浸入 $\phi: M \to S^n$, 并且坐标函数由第一特征函数给出，则 $V_C(n,M) = V(M)$.

这是因为，熟知此时 $\lambda_1 = 2$, 根据上面两个定理，有

$$2V(M) \leqslant 2V_C(n,M) \leqslant 2V_C(n,\phi) = 2V(M).$$

根据此系，立得

(1) $V_C(S^2) = 4\pi$,

(2) $V_C(\mathbb{RP}^2) = 6\pi$.

这是因为, 对 $\mathbb{RP}^2$ 的标准度量而言, 其第一特征空间给出了 $\mathbb{RP}^2 \to S^4$ 的一个等距极小嵌入(文献中的这一极小嵌入称为 Veronese 曲面), 而 $V(\text{Veron}) = 6\pi$.

(3) $V_C(T^2) = 2\pi^2$, 其中 T^2 是所谓方环，在 $g=1$ 的模空间中由向量 (1,0) 和 (0,1) 生成.

这是因为对具平坦度量的方环而言，可以通过第一特征值的特征函数来实现到 S^3 的极小嵌入:

$$S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to S^3, \text{而}$$
$$V\left(S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\pi^2$$

(4) 设 M 是亏格为 1 的紧曲面，且共形等价于由 $\{(1,0),(x,y)\}(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 1-x^2 \leqslant y \leqslant 1)$ 所生成的平环面，则 $2\pi^2 \leqslant V_C(M)$.

定理 8.7 (P. Yang-S. T. Yau) 设 $\sum_g$ 是亏格为 g 的紧 Riemann 曲面，则对 $\sum_g$ 的任何度量而言，都有

$$\lambda_1 A(\sum_g) \leqslant 8\pi(1+g).$$

证明 根据定理 8.6， $\lambda_1 A(\sum_g) \leqslant 2V_C(2,\sum_g)$. 任取共形分支覆盖映射 $\phi:\sum_g \to S^2, \deg\varphi \leqslant 1+g$ (根据 Riemann-Roch, $\sum_g$ 上存在非常数的亚纯函数，具有重数 $\leqslant 1+g$ 的零点，因此这样的 ϕ 总是存在的). 易见，如果 $N \to M$ 是 d 重覆盖，则 $V_C(2,N) \leqslant dV_C(2,M)$. 因此

$$\begin{aligned}\lambda_1 A(\Sigma_g) &\leqslant 2V_C(2,\Sigma_g) \leqslant 2V_C(2,S^2)(1+g)\\ &= 8\pi(1+g).\end{aligned}$$

注 Yang-Yau 实际上证明了如下更强的一些结果：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i} \geqslant \frac{3V(M)}{8\pi(1+g)}.$$

与第一特征值、共形体积等密切相关的问题有 Willmore 猜想. 利用共形面积的概念，可以很容易地部分解决 Willmore 猜想.

下面讨论 Willmore 猜想. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致曲面，具有诱导度量. 以 H 表示其平均曲率， Willmore 猜想为：对于任何可浸入环面 $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, 有

$$\int_M |H|^2 \geqslant 2\pi^2.$$

引理 8.1 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧曲面 (无边界)，则

$$\int_M |H|^2 \geqslant V_C(n,M).$$

等号成立意味着在某一球极投影下， M 是 S^n 中极小曲面的像.

证明 利用球极投影的逆映射，我们得到从 M 到 S^n 的共形映射 ϕ, 再与 Möbius 变换复合，我们可以假设 $\phi(M)$ 的面积就是 ϕ 的共形面积 $V_C(n,\phi)$.

利用前面定理的讨论，我们有

$$\int_M |H|^2 = \int_{\phi(M)} |\overline{H}|^2 + V(\phi(M)),$$

其中 $\overline{H}$ 是 $\phi(M)$ 在 S^n 中的平均曲率. 由 $V(\phi(M)) = V_C(n,\phi)$ 得到

$$\int_M |H|^2 \geqslant V_C(n,\phi).$$

证毕.

由引理 8.1 及前面的定理很容易得到下面的

引理 8.2 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 中紧致曲面，则

$$\int_M |H|^2 \geqslant \frac{1}{2}\sup(\lambda_1 \cdot V(M)),$$

其中 sup 是对所有与 $\mathbb{R}^n$ 中诱导度量共形等价的度量取的.

由引理 8.1 及前面关于共形面积的计算，我们立即可以得到下面的两个定理：

定理 8.8 设 M 是 $\mathbb{RP}^2$, 则对任何浸入 $M \to \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_M |H|^2 \geqslant 6\pi.$$

等号成立隐含 M 是在球极投影下 S^4 中某一极小曲面（其特征值 $\lambda_1 = 2$）在 $\mathbb{R}^4$ 中的像.

定理 8.9 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中亏格为 1 的曲面，且共形等价于由 $\{(1,0),(x,y)\}$, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1$ 所生成的环面，则

$$\int_M |H|^2 \geqslant 2\pi^2.$$

等号成立表示 M 共形等价于方环.

最后我们要提一下与这里讨论的问题有关的两个猜想.

猜想 1：对于亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面 $\sum_g$ 存在一个绝对常数 C, 使对 $\sum_g$ 的任何度量都有

$$\frac{\lambda_k}{k} \leqslant \frac{C(1+g)}{A(\sum_g)}.$$

Yang-Yau 定理 表明，当 $k=1$ 时，其答案是肯定的.

猜想 2：设 M 是 S^3 中的极小嵌入紧致曲面，则第一特征值 $\lambda_1(M) = 2$.

关于猜想 2，最近 H. I. Choi-A. N. Wang 获得了下述结果（ J. Diff. Geom., 18(1983), 559-563 ）.

定理 (Choi-Wang) 设 M 是 S^3 中紧致、极小嵌入曲面，则

$$\lambda_1(M) \geqslant 1.$$

注 原定理较此为广,它证明如果 M 是 S^{n+1} 中紧致极小超曲面,则 $\lambda_1(M) \geqslant \frac{n}{2}$. 证明方法是一样的,下面只考虑 $n=2$ 的情形.

证明 M 将 S^3 分成两个连通区域 Ω_1 和 Ω_2,使得 $\partial\Omega_1=\partial\Omega_2=M$,设 f 是 M 上的第一特征函数(相对于 M 在 S^3 中诱导度量而言). 在 Ω_1 中解 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{\partial\Omega_1}=u|_M=f,\end{cases}$$

则 u 是光滑到 $\partial\Omega_1$ 的函数, $\forall x\in S^3$. 取 x 附近的正交标架 $\{e_1,e_2,e_3\}$, 当 $x\in\partial\Omega_1$ 时, 令 $e_3=\partial\Omega_1$ 的外法线方向, 而 $e_1,e_2\in T_xM$, 则熟知,

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{3}D^2u(e_i,e_i)=\sum u_{ii}.$$

D^2u 是 u 的 Hessian :

$$D^2u(X,Y)=X(Yu)-(\nabla_xY)u,$$

当 $x\in\partial\Omega_1$ 时, 对于 $i\neq 3$, 因为

$$\nabla_{e_i}e_i=\overline{\nabla}_{e_i}e_i-h(e_i,e_i)e_3,$$

其中 $\overline{\nabla}$ 表示 $M=\partial\Omega_1$ 的协变微分, 而 h 表示第二基本形式. 因此当 $x\in M$ 时,

$$\begin{aligned}\Delta u&=\sum_{i=1}^{3}D^2u(e_i,e_i)=u_{33}+\overline{\Delta}f+\sum_{i=1}^{3}h(e_i,e_i)u_3\\&=u_{33}+\overline{\Delta}f+2Hu_3,\end{aligned}$$

其中 $\overline{\Delta}$ 表示 M 上的 Laplace 算子, 而 H 则为 M 的平均曲率, 因为 M 是极小曲面, $H=0$, 所以 $\forall x\in M$,

$$u_{33}=-\overline{\Delta}f=\lambda_1 f.$$

在 Ω_1 中考虑 $\Delta|\nabla u|^2$, 易见(用到 $\Delta u=0$)

$$\Delta|\nabla u|^2=2\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2+2\sum_{i,j=1}^{3}R_{ij}u_iu_j,$$

所以

$$\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 \geqslant 4\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2.$$

这是因为对于 $S^3, R_{ij} = 2g_{ij}$. 另一方面，由 Stokes 公式

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 &= \int_{\partial\Omega_1} |\nabla u|_3^2 = 2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i=1}^{3} u_i u_{i3} \\
&= \int_{\partial\Omega_1} \left(2\sum_{i=1}^{2} u_i u_{i3} + 2u_3 u_{33}\right) \\
&= 2\int_{\partial\Omega_1} u_3\lambda_1 f + 2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i=1}^{2} u_i u_{i3}.
\end{aligned}$$

但当 $i \neq 3$ 时,

$$\begin{aligned}
u_{i3} &= D^2u(e_i, e_3) = e_i(e_3 u) - (\nabla_{e_i} e_3)u \\
&= e_i(u_3) - \sum_{j=1}^{2} h_{ij} u_j,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 &= 2\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f + 2\int_{\partial\Omega_1} \nabla f \cdot \nabla u_3 \\
&\quad -2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} u_i u_j \\
&= 2\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f - 2\int_{\partial\Omega_1} u_3 \Delta f - 2\int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u) \\
&= 4\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f - 2\int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

但是

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 = -\int_{\Omega_1} u\Delta u + \int_{\partial\Omega_1} uu_3 = \int_{\partial\Omega_1} u_3 f,$$

因此

$$\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 = 4\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 + 2\int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u),$$

所以

$$4\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 \geqslant 4 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u),$$

$$4(\lambda_1 - 1) \int |\nabla u|^2 \geqslant \int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u).$$

无妨设 $\int_{\partial\Omega_1} h(\nabla u, \nabla u) \geqslant 0$, 否则我们可用 Ω_2 代替 Ω_1. 两者的法方向正好相反，且 $\nabla u|_{\partial\Omega} = \nabla f$. 因此

$$\int_{\partial\Omega_1} h(\nabla f, \nabla f) = -\int_{\partial\Omega_2} h(\nabla f, \nabla f).$$

这样，就证明了 $\lambda_1 \geqslant 1$.

系 如果 M 是 S^3 中亏格为 g 的紧的极小嵌入曲面，则

$$\mathrm{Area}(M) \leqslant 8\pi(1+g).$$

这由 Yang-Yau 定理 及上述 $\lambda_1 \geqslant 1$ 的结果直接可见.

最后我们要提一下有关负曲率的一般 Riemann 曲面的特征值的结果. A. Selberg 证明，如果

$$\Sigma_g = H/\Gamma, H = \{z|\mathrm{Im}\, z > 0\},$$

而 Γ 是 $\mathrm{SL}(2,z)$, 则 $\lambda_1(\sum_g) \geqslant 3/16$, 人们猜测最好的下界可能是 1/4 , 但至今尚未证明. (AMS. Symposium on Numba Theory, California Inst. of Tech., Pasadena (1965).)

又，关于 Riemann 曲面上特征值的下界估计， R. Schoen, S. Wolpert, S. T. Yau 证明： $\forall g \in \mathbb{Z}^+$, 存在一系列 Riemann 曲面 $\sum_{g,n}$ 具有相同的结构，使得相应的 $\lambda_{1,n}, \cdots, \lambda_{2g-3,n}$ 趋于 0. 但是， λ_{2g-2} 具有与 $\sum_g$ 的保形结构无关而只与 g 有关的下界. 详见 Proceedings of the Symposia in Pure Math., 36(1980), 279-285.

第四章　Riemann 流形上的热核

4.1 热方程的梯度估计

本节假定 M 是 n 维完备 Riemann 流形可能具有边界（允许 $\partial M=\varnothing$）. 我们的主要任务是给出热方程

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0 \tag{4.1.1}$$

的正解的导数的估计（梯度估计）. 这种估计一般而言是一种局部估计，但今后我们将看到在某些情况下它也能导致整体的估计.

如果 u 是 (4.1.1) 的解， $u>0$, 令 $f=\log u$, 则 f 满足

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)f=-|\nabla f|^2. \tag{4.1.2}$$

此处 ∇f 表示对变量 $x\in M$ 的梯度.

我们从下面的引理出发，它是导出梯度估计的基础.

引理 4.1 设 Ric $(M)\geqslant -K$, $u(x,t)$ 是定义在 $M\times[0,\infty)$ 上的光滑函数, $u(x,t)>0$, 满足 (4.1.1), 令 $f=\log u$, 对任何固定的常数 $\alpha\geqslant 1$, 令

$$F(x,t)=t(|\nabla f|^2-\alpha f_t), \tag{4.1.3}$$

则有

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)F\geqslant -2\nabla f\cdot\nabla F+\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2 \\ -(|\nabla f|^2-\alpha f_t)-2K_t|\nabla f|^2. \tag{4.1.4}$$

证明 取 $x\in M$ 的局部正规标架 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$. 函数附以下标 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 表示该函数对 e_i,e_j 方向的协变导数，对 $F=t(|\nabla f|^2-\alpha f_t)$ 作协变微分，得

$$F_i=t\left(2\sum_{j=1}^n f_jf_{ji}-\alpha f_{ti}\right),$$

$$\Delta F=\sum_i F_{ji}=t\left(2\sum_{i,j}f_{ij}^2+2\sum_{i,j}f_jf_{jii}-\alpha(\Delta f)t\right). \tag{4.1.5}$$

根据熟知的不等式和 Ricci 公式

$$(\Delta f)^2=(\sum f_{ii})^2=\sum f_{ii}^2+2\sum_{i\neq j}f_{ii}f_{jj} \\ \leqslant\sum f_{ii}^2+\sum_{i\neq j}(f_{ii}^2+f_{jj}^2)\leqslant n\sum_{i,j}f_{ij}^2$$

$$\sum_{i,j}f_jf_{jii}=\sum_{i,j}f_jf_{iij}+\sum R_{ij}f_if_j=\nabla f\cdot\nabla(\Delta f) \\ +\mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)\geqslant\nabla f\cdot\nabla(\Delta f)-K|\nabla f|^2,$$

于是 (4.1.5) 成为

$$\Delta F\geqslant t\left(\frac{2}{n}(\Delta f)^2+2\nabla f\cdot\nabla(\Delta f)-2K|\nabla f|^2-\alpha(\Delta f)_t\right),$$

以 $\Delta f=f_t-|\nabla f|^2$ 代入，得

$$\Delta F\geqslant t\Big(\frac{2}{n}(f_t-|\nabla f|^2)^2+2\nabla f\cdot\nabla(f_t-|\nabla f|^2) \\ -2K|\nabla f|^2-\alpha(f_t-|\nabla f|^2)_t\Big).$$

另一方面

$$F_t=(t(|\nabla f|^2-\alpha f_t))_t=|\nabla f|^2-\alpha f_t+t(|\nabla f|^2-\alpha f_t)_t,$$

所以有

$$\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)F \geqslant\ & \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-2t\nabla f\cdot\nabla(|\nabla f|^2-f_t)\\&-2Kt|\nabla f|^2+\alpha t(|\nabla f|^2-f_t)_t-t(|\nabla f|^2-\alpha f_t)_t\\&-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)=\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)_t\\&-2Kt|\nabla f|^2-2t\nabla f\cdot\nabla(|\nabla f|^2-f_t)+(\alpha-1)_t|\nabla f|_t^2\\=\ &\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)-2Kt|\nabla f|^2\\&-2t\nabla f\cdot\nabla(|\nabla f|^2-\alpha f_t)\\=\ &-2\nabla f\cdot\nabla F+\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)-2Kt|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

证毕.

定理 4.1 设 M 是可能具边界的紧致 Riemann 流形, Ric $(M)\geqslant 0$, $u(x,t)$ 是 M 上热方程的非负解

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0. \tag{4.1.6}$$

当 $\partial M\neq\varnothing$ 时, 假定 ∂M 是凸的, 即 ∂M 的第二基本形 $\mathrm{II}\geqslant 0$, 此时 $u(x,t)$ 满足 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial v}=0,\quad 在\partial M\times(0,\infty),$$

其中 $\frac{\partial}{\partial v}$ 表示 ∂M 的外法线方向, 则在 $M\times(0,\infty)$ 上 u 满足下列梯度估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n}{2t}. \tag{4.1.7}$$

证明 用 $u+s$ 代替 u, 无妨设 $u>0$, 令 $f=\log u$, ε 是任意小的小数. 在引理 4.1 中取 $\alpha=1$, 即 $F(x,t)=t(|\nabla f|^2-f_t)$,

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}=|\nabla f|^2-f_t=\frac{F_t}{t}.$$

因此, 证明定理相当于证明 $F\leqslant\dfrac{n}{2}$, 下面分两种情况:

1° $\partial M=\varnothing$, 如果 $F(x,t)\leqslant\dfrac{n}{2}$, 则定理已经证明. 否则对某一 $T>0$, $\max\limits_{M\times[0,T]}F>\dfrac{n}{2}$. 设极大值在 $(x_0,t_0)\in M\times[0,T]$ 达到, 由 $F(x,0)=0$, 应用极大

值原理，在 (x_0,t_0) 有

$$\Delta F(x_0,t_0) \leqslant 0,\ T \geqslant t_0 > 0,$$
$$\nabla F(x_0,t_0) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}F(x_0,t_0) \geqslant 0,$$

最后式是因为可能 $t_0=T$. 由引理 4.1 ，在 (x_0,t_0) 点，

$$0 \geqslant \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F \geqslant \frac{\partial t_0}{n}\frac{F^2}{t_0^2} - \frac{F}{t_0} = \frac{2F}{nt_0}\left(F - \frac{n}{2}\right).$$

由此， $F(x_0,t_0) \leqslant \frac{n}{2}$, 得到矛盾.

2° $\partial M \neq \varnothing$, 根据假设， ∂M 凸，而且 $u(x,t)$ 在 ∂M 上满足 Neumann 条件.

证明的过程同上面一样，如果 x_0 是 M 的内点，则得到矛盾，因此只能 $x_0 \in \partial M$.

在 x_0 取局部正规标架，使 $e_1 = \frac{\partial}{\partial \nu}$, ν 是外法线方向，因为 F 满足

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F \geqslant -2\nabla f \cdot \nabla F + \frac{2}{nt}F\left(F - \frac{n}{2}\right), \tag{4.1.8}$$

强极大值原理成立，因此

$$\frac{\partial F}{\partial \nu}(x_0,t_0) > 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \nu} &= F_1 = t\left(2\sum_j f_j f_{j1} - f_{t1}\right) = t(2\sum f_j f_{j1} - f_{1t})\\ &= 2t\sum_{j>1} f_j f_{j1},\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

这是因为根据 Neumann 条件，在 ∂M 上，

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial \nu}(\log u) = \frac{u_\nu}{u} \equiv 0.$$

因而在 ∂M 上

$$\begin{aligned}0 = df_1 &= \sum_{j>1} f_{1j}w^j + \sum_{j>1} f_j w_1^j\\ &= \sum_{j>1} f_{1j}w^j + \sum_{j,k>1} f_j h_{jk} w^k\end{aligned}$$

因此

$$f_{1j} = f_{j1} = -\sum_{k>1} f_k h_{kj},$$

代入 (4.1.9)，在 (x_0, t_0) 点,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial F}{\partial \nu} &= 2t_0 \left(\sum_{j>1} f_j f_{j1} \right) \\ &= -2t_0 \sum_{j,k>1} h_{kj} f_k f_j = -2t_0 \mathrm{II}(\nabla f, \nabla f), \end{aligned}$$

和 $\mathrm{II} \geqslant 0$ 相矛盾.

定理 4.2 设 M 是完备的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$, 以 M 中任一固定点 O 为中心，$2R$ 为半径的测地球记为 B_{2R}. 设 $u(x,t)$ 是定义在 $B_{2R} \times [0,\infty]$ 上热方程的正解

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0.$$

取 $\alpha > 1$, 则在 B_R 中下列梯度估计成立:

$$\begin{aligned} \sup_{B_R} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \right) \leqslant & \frac{C\alpha^2}{R^2} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \sqrt{k} R \right) \\ & + \frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha - 1)} + \frac{n\alpha^2}{2t}, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

其中 C 为仅依赖于 n 的常数.

证明 仿前，令 $f = \log u$, $F = t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t)$,

则

$$\sup_{B_R} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \right) = \sup_{B_R} \frac{F}{t},$$

取 cut-off 函数 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 使 $\mathrm{supp}\psi \subseteq [-2,2]$, $1 \geqslant \psi \geqslant 0$, 并且当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时 $\psi(t) \equiv 1$, 此外还满足

$$\psi' \leqslant 0, \psi'' \geqslant -C_1, \frac{|\psi'|^2}{\psi} \leqslant C_2, \tag{4.1.11}$$

其中 C_1, C_2 为两绝对常数.

M 中以 0 为基点的距离函数记作 $\rho(x)$, 再令

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{\rho(x)}{R}\right), \tag{4.1.12}$$

则 $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B_{2R}$, 而 $\varphi|_{B_R} \equiv 1$.

我们将对函数 φF 应用极大值原理 ，因为 $\varphi = \psi\left(\frac{\rho(x)}{R}\right)$, 它在 0 的割迹（ cut locus ）上将失去光滑性而只是 Lipschitz 连续. 但正如我们在第一章已经解释过的那样，利用 support 函数的方法，在应用极大值原理时我们不失一般性地可以假定 φ 在该点是可微的.

设 φF 在 (x_0, t_0) 达到它在 $B_{2R} \times [0, T]$ 的极大值. 显然可设 $\varphi F(x_0, t_0) > 0$（否则 $F \leqslant 0$, 定理自然成立）. 因此 $x_0 \in B_{2R}$, $t_0 > 0$, 根据极大值原理，在 (x_0, t_0) 点有

$$0 = \nabla(\varphi F) = F\nabla\varphi + \varphi\nabla F, \tag{4.1.13}$$

$$\Delta(\varphi F) \leqslant 0, \tag{4.1.14}$$

$$\frac{\partial(\varphi F)}{\partial t} = \varphi F_t \geqslant 0. \tag{4.1.15}$$

以下的计算均在 (x_0, t_0) 进行，不再一一注明. 由 (4.1.13)， $\nabla F = -F\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$, 再由 (4.1.14)，

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta(\varphi F) &= \Delta\varphi \cdot F + \varphi\Delta F + 2\nabla\varphi \cdot \nabla F \\ &= \Delta\varphi \cdot F + \varphi\Delta F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

由 (4.1.11),

$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} = \frac{|\psi'|^2|\nabla\rho|^2}{R^2\psi} = \frac{|\psi'|^2}{R^2\psi} \leqslant \frac{C_2}{R^2}, \tag{4.1.17}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\psi''|\nabla\rho|^2}{R^2} + \frac{\psi'\Delta\rho}{R} = \frac{\psi'}{R^2} + \frac{\psi'}{R}\Delta\rho \\ &\geqslant -\frac{C_1}{R^2} - \frac{\sqrt{C_2}}{R}\Delta\rho. \end{aligned}$$

当 $\operatorname{Ric}(M) \geqslant -k$ 时，由 Laplace 算子 比较定理 (1.1.17)，

$$\Delta\rho \leqslant (n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}\rho),$$

得

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\geqslant -\frac{C_3}{R}(n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}R) - \frac{C_1}{R^2}, \\ &\xlongequal{\text{记作}} -A(n,k,R), \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

代入 (4.1.16)，并由引理 4.1，

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant \Delta(\varphi F) &\geqslant -A(n,k,R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \varphi\Delta F \\
&\geqslant -A(n,k,R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \varphi(F_t - 2\nabla f\cdot\nabla F \\
&\quad + \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2kt|\nabla f|^2).
\end{aligned}
$$

但 $\varphi F_t = (\varphi F)_t \geqslant 0,\ -2\varphi\nabla F\cdot\nabla f = 2F\nabla\varphi\cdot\nabla f$, 上式变成

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant -A(n,k,R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + 2F\nabla\varphi\cdot\nabla f \\
&\quad + \varphi\left[\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2kt|\nabla f|^2\right], \\
0 &\geqslant -A(n,k,R)\varphi F - 2F|\nabla\varphi|^2 + 2\varphi F\nabla f\cdot\nabla\varphi \\
&\quad + \varphi^2\left[\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2kt|\nabla f|^2\right] \\
&= (\varphi F)\left[-A(n,k,R) - 2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right] + 2\varphi F\nabla f\cdot\nabla\varphi \\
&\quad + \frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - nk|\nabla f|^2] - \frac{\varphi F\cdot\varphi}{t} \\
&\geqslant (\varphi F)\left[-A(n,k,R) - 2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} - \frac{\varphi}{t}\right] \\
&\quad - 2\varphi F|\nabla f||\nabla\varphi| + \frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - nk|\nabla f|^2].
\end{aligned}
$$

利用 $1 \geqslant \varphi \geqslant 0$, 及 (4.1.17)$|\nabla\varphi| \leqslant \sqrt{C_2}R^{-1}\varphi^{\frac{1}{2}}$, 得

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant (\varphi F)\left[-A(n,k,R) - \frac{2C_2}{R^2} - \frac{1}{t}\right] \\
&\quad - 2\varphi F\frac{\sqrt{C_2}}{R}\varphi^{\frac{1}{2}}|\nabla f| + \frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2 - f_t)^2 \\
&\quad - nk|\nabla f|^2],
\end{aligned}
$$

两边乘以 t, 令 $\widetilde{A}(n,k,R) = A(n,k,R) + \dfrac{2C_2}{R^2}$, 则

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant \varphi F(-1 - t\widetilde{A}(n,k,R)) - 2tF\varphi^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{C_2}}{R}|\nabla f| \\
&\quad + \frac{2t^2}{n}[(\varphi|\nabla f|^2 - \varphi f_t)^2 - nk\varphi^2|\nabla f|^2].
\end{aligned}
\tag{4.1.19}
$$

令 $y=\varphi|\nabla f|^2$, $z=\varphi f_t$, 则 $\varphi^2|\nabla f|^2=\varphi y\leqslant y$, 同时

$$y^{\frac{1}{2}}(y-\alpha z)=\varphi^{\frac{1}{2}}|\nabla f|(\varphi|\nabla f|^2-\varphi\alpha f_t)=\varphi^{\frac{3}{2}}\frac{F}{t}|\nabla f|.$$

将上述代入 (4.1.19)，得

$$\begin{aligned}0\geqslant&\ \varphi F(-1-t\widetilde{A})-\frac{2\sqrt{C_2}}{R}t^2y^{\frac{1}{2}}(y-\alpha z)\\&+\frac{2t^2}{n}[(y-z)^2-nky]=\varphi F(-1-t\widetilde{A}(n,k,R))\\&+\frac{2t^2}{n}\left[(y-z)^2-nky-\frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{\frac{1}{2}}(y-\alpha z)\right],\end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned}(y-z)^2=&\left[\frac{1}{\alpha}(y-\alpha z)+\frac{\alpha-1}{\alpha}y\right]^2\\=&\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2+(\frac{\alpha-1}{\alpha})^2y^2+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}y(y-\alpha z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(y-z)^2-nky-\frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{\frac{1}{2}}(y-\alpha z)\\=&\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2+\left[\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2}y^2-nky\right]+\left[\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}y\right.\\&\left.-\frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{\frac{1}{2}}\right](y-\alpha z).\end{aligned}$$

对 $(\frac{\alpha-1}{\alpha})^2y^2-nky$ 及 $\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}y-\frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{\frac{1}{2}}$ 应用熟知的不等式

$$ax^2-bx\geqslant-\frac{b^2}{4a}\quad(a,b>0),$$

得

$$\begin{aligned}0\geqslant&\ \varphi F(-1-t\widetilde{A}(n,k,R))+\frac{2t^2}{n}\left[\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2\right.\\&\left.-\frac{n^2k^2\alpha^2}{4(\alpha-1)^2}-\frac{n^2C_2\alpha^2}{2R^2(\alpha-1)}(y-\alpha z)\right],\end{aligned}$$

再由 $t(y-\alpha z)=\varphi t(|\nabla f|^2-\alpha f_t)=\varphi F$, 上式即

$$\begin{aligned}0\geqslant&\ \varphi F(-1-t\widetilde{A}(n,k,R))+\frac{2}{n\alpha^2}(\phi F)^2\\&-\frac{C_2h\alpha^2}{R^2(\alpha-1)}(\varphi F)_t-\frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)^2}t^2.\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

但

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(n,k,R) &= A(n,k,R)+\frac{2C_2}{R^2}=\frac{C_1}{R^2}\\&\quad+\frac{C_3}{R}(n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}R)+\frac{2C_2}{R^2}\\&\leqslant \frac{C_4}{R}(\frac{1}{R}+\sqrt{k}),\end{aligned}$$

其中 C_4 仅依赖于 n,(4.1.20) 成为

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2-(\varphi F)\left[1+\frac{C_4 t}{R}\left(\frac{1}{R}+\sqrt{k}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{C_2 n\alpha^2}{R^2(\alpha-1)}t\right]-\frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)}t^2\geqslant\frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2\\&\quad-(\varphi F)\left[1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t\right]\\&\quad-\frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)^2}t^2\end{aligned}$$

将上式看作 φF 的二次三项式，则 φF 不大于该二次三项式的大根，因此

$$\begin{aligned}\varphi F &\leqslant \frac{1}{4}\left\{1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t\right.\\&\quad\left.+\sqrt{\left(1+\frac{C_5 t}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)\right)^2+\frac{4k^2}{(\alpha-1)^2}t^2}\right\}n\alpha^2\\&\leqslant 2\left[1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t+\frac{2k}{\alpha-1}t\right]\frac{n\alpha^2}{4}\\&=\frac{n\alpha^2}{2}+\frac{n\alpha^2}{2}\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}t.\end{aligned}$$

以上的全部计算都是在极大值点 $(x_0,t_0)\in B_{2R}\times[0,T]$ 上进行的，因而

$$\begin{aligned}(\varphi F)(x,T) &\leqslant (\varphi F)(x_0,t_0)\leqslant\frac{n\alpha^2}{2}+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}t_0\\&\quad+\frac{n\alpha^2}{2}\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t_0\leqslant\frac{n\alpha^2}{2}\\&\quad+\frac{n\alpha^2}{2}\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)T+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1}T,\end{aligned}$$

限制在 B_R 上 $(\varphi \equiv 1)$, 即得

$$\sup_{x\in B_R}(|\nabla f|^2-\alpha f_t)(x,T)\leqslant \frac{n\alpha^2}{2T}+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}+\frac{C_5 n\alpha^2}{2R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right),$$

而 T 是任选的, 因此定理证毕.

系 对非紧的、不具边界的完备的 Riemann 流形 M,$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$, 如 $u(x,t)$ 是 M 上热方程的正解, 则下列估计成立: $\forall\alpha>1$,

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha^2}{2t}, \tag{4.1.21}$$

特别地, 当 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 时, 有

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n}{2t}. \tag{4.1.22}$$

证明 在定理 4.2 中让 $R\to\infty$ 得 (4.1.21) , 在 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 时, $k=0$, 故可令 $\alpha\to 1$ 而得 (4.1.22).

将定理 4.1 和定理 4.2 的证明结合起来, 可得

定理 4.3 设 M 是紧致的 Riemann 流形, 具有边界 ∂M (可能是 $\varnothing$), $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$, 当 $\partial M\neq\varnothing$ 时, 假定 ∂M 是凸的, 而作为热方程正解的 $u(x,t)$ 满足 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ (在 $\partial M\times[0,\infty)$ 上), 则 $\forall\alpha>1$, 下面的估计成立:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\alpha ut}{u}\leqslant\frac{nk\alpha^2}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha^2}{2t}. \tag{4.1.23}$$

4.2 Harnack 不等式与热核的估计

作为前节梯度估计的应用, 可以方便地建立热方程解的 Harnack 不等式, 并由此而导出热方程基本解的上、下界的估计.

定理 4.4 设 M 是完备的 n 维 Riemann 流形, 非紧, 不具边界. $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k, k\geqslant 0$. 如果 $u(x,t)$ 是 $M\times[0,\infty)$ 上热方程的正解, 则对任何 $\alpha>1$, $x_1,x_2\in$

M, $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, 下列不等式成立:

$$u(x_1,t_1) \leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha^2 d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)} + \frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right). \tag{4.2.1}$$

证明 在 M 中取连接 x_1 与 x_2 的极小测地线 $\gamma:[0,1]\to M$, 使 $\gamma(0)=x_2$, $\gamma(1)=x_1$, 在 $M\times(0,\infty)$ 中定义曲线 $\eta:[0,1]\to M\times(0,\infty)$

$$\eta(s) = (\gamma(s),(1-s)t_2+st_1),$$

则 $\eta(0)=(x_2,t_2)$, $\eta(1)=(x_1,t_1)$.

令 $f=\log u(x,t)$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &= \int_0^1 \frac{df(\eta(s))}{ds}ds \\ &= \int_0^1 \Big\{\langle\dot\gamma,\nabla f\rangle-(t_2-t_1)f_t\Big\}ds \\ &\leqslant \int_0^1 (|\dot\gamma||\nabla f|-(t_2-t_1)f_t)ds. \end{aligned}$$

如记 $\rho=d(x_1,x_2)$, 则 $|\dot\gamma|=\rho$. 对 f_t 引用梯度估计 (4.1.21),

$$-f_t \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(A+\frac{B}{t}-|\nabla f|^2\right),$$
$$A=\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)},\quad B=\frac{n\alpha^2}{2},$$

则

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) \leqslant \int_0^1 \left(\rho|\nabla f| - \frac{t_2-t_1}{\alpha}\cdot\left(A+\frac{B}{t}-|\nabla f|^2\right)\right)ds,$$

其中 $t=(1-s)t_2+st_1$. 将被积项看成 $|\nabla f|$ 的二次三项式，其极大值为

$$\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{t_2-t_1}{\alpha}A+\frac{t_2-t_1}{\alpha}B\cdot\frac{1}{t}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)\\
\leqslant\ &\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{t_2-t_1}{\alpha}A+\frac{t_2-t_1}{\alpha}B\int_0^1\frac{ds}{(1-s)t_2+st_1}\\
=\ &\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{t_2-t_1}{\alpha}\frac{n\alpha^2k}{2(\alpha-1)}+\frac{t_2-t_1}{\alpha}B\frac{1}{t_2-t_1}\cdot\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\\
=\ &\frac{\alpha d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\frac{(t_2-t_1)n\alpha k}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha}{2}\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right),
\end{aligned}
$$

再取 exp, 即得定理.

系 如果 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$, 在 (4.2.1) 中 $k=0$, 令 $\alpha\to 1$, 即有

$$
u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}\right). \tag{4.2.2}
$$

系 假设同定理 4.4，则有以下的次中值不等式:

$$
\begin{aligned}
u(x,t_1)\leqslant &\left(\int^{\wedge}_{B_x(R)}u^p(y,t_2)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}\\
&\cdot\exp\left(\frac{\alpha R^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right),
\end{aligned} \tag{4.2.3}
$$

其中 $p>0,\ \alpha>1,\ 0<t_1<t_2<+\infty$, $\int^{\wedge}_{B_x(R)}$ 表示积分平均，即

$$
\int^{\wedge}_{B_x(R)}g=(\mathrm{Vol}(B_x(R)))^{-1}\int_{B_x(R)}g.
$$

其证明是明显的.

定理 4.4 中的 Harnack 不等式是对非紧、完备的 Riemann 流形而言的，同样的定理对具边界的紧致流形也成立，因为方法完全类似，我们只作叙述而不再重复证明.

定理 4.5 设 M 是紧致可能带边界的 Riemann 流形，或者 $\partial M=\varnothing$；或者 $\partial M\neq\varnothing$, 但 ∂M 是凸的，即 ∂M 的第二基本形 $\geqslant 0$. 又 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$, $k\geqslant 0$. 设 $u(x,t)$ 是 $M\times[0,\infty)$ 上热方程的正解 (在 $\partial M\neq\varnothing$ 时，还要求它满足 Neumann

边界条件), 则对任何 $\alpha > 1$, 下述 Harnack 不等式 成立:

$$u(x_1,t_1) \leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)} + \frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right), \tag{4.2.4}$$

其中 $x_1,x_2 \in M$, $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, $d(x_1,x_2)$ 表示 x_1,x_2 在 M 中的距离.

同样, 当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$ 时, (4.2.2) 成立.

在定理 4.5 条件下, (4.2.3) 也成立:

$$u(x,t_1) \leqslant \left(\int_{B_x(R)}^{\wedge} u^p(y,t_2)\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \cdot \exp\left(\frac{\alpha R^2}{4(t_2-t_1)} + \frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right),$$

但是要求 $B_x(2R) \cap \partial M = \varnothing$.

现在我们来给出热方程基本解的上、下界的估计. 在讨论中, 除了上述 Harnack 不等式 外, 下面的引理起着重要的作用.

引理 4.2 设 M 是完备的非紧 Riemann 流形, $u(x,t)$ 是热方程的 L^2 解, 初值为 $u_0(x)$:

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.2.5}$$

任意固定 $y \in M$, 记 $B_y(R)$ 为以 y 为中心, R 为半径的测地球. 又设 $g(x,t) \in C^1(M \times [0,\infty))$, 并满足

$$\frac{1}{2}|\nabla g|^2 + g_t = 0, \quad g \leqslant 0, \tag{4.2.6}$$

则对任何 $R > 0$, $T > 0$, 都有

$$\int_{B_y(R)} e^{\frac{1}{2}g(x,T)} u^2(x,T)\,dx \leqslant \int_M e^{\frac{1}{2}g(x,0)} u_0^2(x)\,dx. \tag{4.2.7}$$

证明 取 $\varphi \in C_0^\infty(M)$, 满足

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_y(R), \\ 0, & x \notin B_y(R+k), \end{cases}$$

$$|\nabla\varphi| \leqslant \frac{C}{k}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1,$$

此处 C 为一绝对常数，取 $\varepsilon > 2$, 令 $\widetilde{g} = \frac{1}{\varepsilon} g$.

因为 $\mathrm{supp}\varphi \subseteq B_y(R+k)$, 由 Green 公式,

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\widetilde{g}} u \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t)\,dx\,dt \\
&= 2\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\widetilde{g}} u\Delta u\,dx\,dt - 2\int_M \varphi^2 \int_0^T e^{\widetilde{g}} u \frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx \\
&= -2\int_0^T\int_M \nabla(\varphi^2 e^{\widetilde{g}} u)\cdot\nabla u - \int_M \varphi^2 \int_0^T e^{\widetilde{g}}\,du^2\,dx \\
&= -\int_0^T\int_M [4\varphi e^{\widetilde{g}} u\nabla\varphi\cdot\nabla u + 2\varphi^2 e^{\widetilde{g}} u\nabla\widetilde{g}\cdot\nabla u \\
&\quad +2\varphi^2 e^{\widetilde{g}}|\nabla u|^2] - \int_M \varphi^2 [e^{\widetilde{g}} u^2(x,t)]_0^T\,dx \\
&\quad + \int_0^T\int_M \varphi^2 u^2 e^{\widetilde{g}} \widetilde{g}_t\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

由 Schwarz 不等式,

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^T\int_M e^{\widetilde{g}} \left[\frac{2(\varepsilon-2)}{\varepsilon}\varphi^2|\nabla u|^2 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}u^2|\nabla\varphi|^2\right] dx\,dt \\
&\quad + \int_0^T\int_M e^{\widetilde{g}}\varphi^2 \left[\frac{\varepsilon}{4}u^2|\nabla\widetilde{g}|^2 + \frac{4}{\varepsilon}|\nabla u|^2\right] dx\,dt \\
&\quad -2\int_0^T\int_M e^{\widetilde{g}}\varphi^2|\nabla u|^2\,dx\,dt - \int_M \varphi^2[e^{\widetilde{g}}u^2]_0^T\,dx + \int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\widetilde{g}} u^2 \widetilde{g}_t\,dx\,dt \\
&= \frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}\int_0^T\int_M e^{\widetilde{g}}|\nabla\varphi|^2 u^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\widetilde{g}} \\
&\quad \left[\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\widetilde{g}|^2 + \widetilde{g}_t\right] u^2 - \int_M \varphi^2[e^{\widetilde{g}}u^2]_0^T\,dx \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}\cdot\frac{C}{k^2}\int_0^T\int_M e^{\widetilde{g}}u^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\widetilde{g}} \\
&\quad \times \left[\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\widetilde{g}|^2 + \widetilde{g}_t\right] u^2 - \int_M \varphi^2[e^{\widetilde{g}}u^2]_0^T\,dx
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\widetilde{g}|^2 + \widetilde{g}_t &= \frac{1}{4\varepsilon}|\nabla g|^2 + \frac{1}{\varepsilon}g_t \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{4}|\nabla g|^2 + g_t\right) = 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$\int_M \varphi^2 [e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2]_0^T \, dx \leqslant \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 2} \frac{C}{k^2} \int_0^T \int_M e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2 \, dx \, dt.$$

因 $u \in L^2$, $g \leqslant 0$, 上式中令 $k \to \infty$, 即得

$$\int_M \varphi^2 [e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2]_0^T \leqslant 0.$$

再令 $\varepsilon \to 2$, 就有

$$\int_M \varphi^2 e^{\frac{1}{2} g(x,T)} u^2(x,T) \, dx \leqslant \int_M \varphi^2 e^{\frac{1}{2} g(x,0)} u(x,0) \, dx,$$

因在 $B_y(R)$ 上 $\varphi \equiv 1$, 在 M 上 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, 最后得

$$\int_{B_y(R)} e^{\frac{1}{2} g(x,T)} u^2(x,T) \, dx \leqslant \int_M e^{\frac{1}{2} g(x,0)} u_0(x) \, dx.$$

系 1　从上式中自然得出，如果 $u(x,0) \equiv 0$, 则 $u(x,t) \equiv 0$, $\forall t$. 此事实表明，热方程 (4.2.5) 当初值 $u(x,0) \in L^2(M)$ 时，其解是惟一的.

注：当初值 $\in L^p(M)(1 < p < \infty)$ 时，热方程解的惟一性（只假定 M 是完备的）是 Strichartz 证明的.

当初值为 $L^\infty(M)$ 函数（即有界函数）时，仅假定 M 完备已经不能保证解的惟一性. P. Li 证明，如果 $\mathrm{Ric}(M)$ 最多以 $-cr^2$ 下降的话，那么热方程的解仍然是惟一的. 证明的方法是在引理 2 的基础上再作进一步的分析.

系 2　完备 Riemann 流形 M 的热方程的基本解记为 $H(x,y,t)$, 任取 $\rho > 0$, $T > 0$, 令

$$F(y,t) = \int_{M \setminus B_x(\rho)} H(x,\xi,T) H(\xi,y,t) \, d\xi, \tag{4.2.8}$$

则对任何 $\delta > 0$, $R > 0$, 都有

$$\int_{B_x(R)} F^2(y,(1+\delta)T) \, dy \leqslant \exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}\right) \exp\left(\frac{-\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right) \cdot \int_{M \setminus B_x(\rho)} H^2(x,\xi,T) \, d\xi. \tag{4.2.9}$$

证明　由 $F(y,t)$ 的定义，它显然是热方程的解，而其初值，由热核的 δ- 函数性质，为

$$F(y,0) = \begin{cases} H(x,y,T), & y \in M \setminus B_x(\rho), \\ 0, & y \in B_x(\rho), \end{cases}$$

它在 $L^2(M)$ 之中.

取 (固定 x 和 T),

$$g(y,t)=\frac{-r^2(x,y)}{(1+2\delta)T-t},$$

则它满足

$$\frac{1}{4}|\nabla g|^2+g_t=0.$$

由引理 4.2， $\forall t\leqslant(1+2\delta)T$,

$$\int_{B_x(R)}e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2(x,y)}{(1+2\delta)T-t}}F^2(y,t)\,dy\leqslant\int_M e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2(x,y)}{(1+2\delta)T}}F^2(y,0).$$

取 $t=(1+\delta)T$, 则

$$e^{-\frac{R^2}{2\delta T}}\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)\,dy\leqslant\int_M e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2(x,y)}{(1+2\delta)T}}H^2(x,y,T)\,dy$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)\,dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}}\int_{M\setminus B_x(\rho)}H^2(x,y,T)\,dy,$$

因此 (4.2.9) 得证. 根据 $F(y,T)$ 的定义 (4.2.8)，上式也可以写做

$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)\,dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}}F(x,T).\tag{4.2.10}$$

如果取 $\rho=0$, 即令

$$F(y,T)=\int_M H^2(x,y,T)\,dx,\tag{4.2.11}$$

则对任何 $\delta>0,\ T>0,\ R>0$ 有

$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)\,dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}F(x,T).\tag{4.2.12}$$

下面是本节的主要结果之一:

定理 4.6 设 M 是完备的无边界的 Riemann 流形， $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k,\ k\geqslant 0$. 设 $H(x,y,t)$ 是热方程

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0$$

的基本解，任给 $\delta \in (0,1)$, 则在 M 上下式成立:

$$
\begin{aligned}
H(x,y,t) \leqslant\ & C(\delta,n)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \\
& \cdot \exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4+\delta)t} + C_1\delta kt\right),
\end{aligned} \tag{4.2.13}
$$

这里 $V_x(R)$ 表示 $B_x(R)$ 的体积，即 $V_x(R) = \mathrm{Vol}(B_x(R))$, $C(\delta,n)$ 是仅依赖于 δ,n 的常数（当 $\delta\to 0$ 时， $C(\delta,n)\to\infty$ ）， C 只依赖于 n.

证明 令

$$
F(y,t) = \int_M H(x,\xi,T)H(\xi,y,t)\,d\xi,
$$

则由 (4.2.12), 对任意 $R>0,\delta>0$, 有

$$
\int_{B_x(R)} F^2(y,(1+\delta)T)\,dy \leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}F(x,T), \tag{4.2.14}
$$

$F(y,t)$ 显然就是热方程的正解，因此它满足 Harnack 不等式 (4.2.3)（取 $t_1 = T$, $t_2=(1+\delta)T$ ），

$$
\begin{aligned}
F^2(x,T) \leqslant\ & V_x^{-1}(R)\left[\int_{B_x(R)} F^2(y,(1+\delta)T)\right] \\
& \cdot(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\frac{\alpha R^2}{2\delta T} + \frac{n\alpha k}{\alpha-1}\delta T\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha>1$, 再由 (4.2.14) 即得

$$
\begin{aligned}
F(x,T) \leqslant\ & V_x^{-1}(R)(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\frac{(1+\alpha)R^2}{2\delta T}\right. \\
& \left. + \frac{n\alpha k}{\alpha-1}\delta T\right).
\end{aligned}
$$

取 $R^2=2T$, 得

$$
\begin{aligned}
F(x,T) &= \int_M H^2(x,y,T)\,dy \leqslant V_x^{-1}(\sqrt{2T})(1+\delta)^{n\alpha} \\
&\quad \cdot\exp\left(\frac{1+\alpha}{\delta}\right)\exp\left(\frac{\alpha nk}{\alpha-1}\delta T\right) \\
&= C(n,\delta,\alpha)V_x^{-1}(\sqrt{2T})\exp\left(\frac{\alpha nk}{\alpha-1}\delta T\right),
\end{aligned} \tag{4.2.15}
$$

其中 $C(n,\delta,\alpha)=(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\dfrac{1+\alpha}{\delta}\right)$. 根据热方程解的惟一性导出热核的半群性质：$\forall 0<s<t,\ H(x,y,t)=\int_M H(x,z,s)\cdot H(z,y,t-s)\,dz$, 再令 $s=\dfrac{t}{2}$ 得

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=\int_M H\left(x,z,\frac{t}{2}\right)H\left(z,y,\frac{t}{2}\right)dz\\&\leqslant\left(\int_M H^2\left(x,z,\frac{t}{2}\right)dz\right)^{\frac12}\left(\int_M H^2\left(z,y,\frac{t}{2}\right)dz\right)^{\frac12}\\&\leqslant C(h,\delta,\alpha)V_x^{-\frac12}(\sqrt{t})V_y^{-\frac12}(\sqrt{t})\exp(C_1k\delta t),\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

其中 $C_1=\dfrac{\alpha n}{\alpha-1}$. 比较定理的结论，易见当

$$r^2(x,y)\leqslant 4t$$

时，(4.2.16) 已经蕴涵结论：

$$\exp(C_1k\delta t)\leqslant e\cdot\exp\left(C_1k\delta t-\frac{r^2(x,y)}{4t}\right),$$

因此只要看 $4t<r^2(x,y)$ 时的情况.

设 $r^2(x,y)>4t$, 令

$$F_\rho(y,t)=\int_{M\setminus B_x(\rho)}H(x,\xi,T)H(\xi,y,t)\,d\xi,\tag{4.2.17}$$

则由 (4.2.9)

$$\begin{aligned}&\int_{B_x(R)}F_\rho^2(y,(1+\delta)T)\,dy\\&\leqslant\exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right)\int_{M\setminus B_x(\rho)}H^2(x,y,T)\,dy\\&=\exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right)F_\rho(x,T).\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

$F_\rho(y,t)$ 作为热方程的正解，满足 Harnack 不等式 (4.2.3)

$$\begin{aligned}F_\rho^2(x,T)\leqslant V_x^{-1}(R)\int_{B_x(R)}&F^2(y,(1+\delta)T)\,dy\cdot(1+\delta)^{n\alpha}\\&\cdot\exp\left(\frac{\alpha R^2}{2\delta T}+\frac{\alpha nk}{\alpha-1}\delta T\right).\end{aligned}$$

与 (4.2.18) 结合起来，得

$$F_\rho(x,T) \leqslant (1+\delta)^{n\alpha} V_x^{-1}(R) \exp\left(\frac{(1+\alpha)R^2}{2\delta T} + \frac{\alpha n k}{\alpha-1}\delta T - \frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right), \tag{4.2.19}$$

取 $R^2 = (1+\delta)^{-1}T$, 得

$$F_\rho(x,T) \leqslant C(\delta,\alpha) V_x^{-1}(\sqrt{(1+\delta)^{-1}T}) \cdot \exp\left(\frac{\alpha n k}{\alpha-1}\delta T - \frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right).$$

取以 y 为中心，$r(x,y)-\rho(0<\rho<r(x,y))$ 为半径的球 $B_y(r-\rho)$, 则 $B_y(r-\rho) \subseteq M \setminus B_x(\rho)$, 由 Harnack 不等式 ，并且取 $T=(1+\delta)t$,

$$\begin{aligned}
H(x,y,t) &\leqslant \left(\int_{B_y(r-\rho)}^{\wedge} H^2(x,\xi,T)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4(T-t)} + \frac{\alpha n k}{2(\alpha-1)}(T-t)\right) \\
&\leqslant V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho)(1+\delta)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} + \frac{\alpha n k}{2(\alpha-1)}\delta t\right) \left(\int_{M\setminus B_x(\rho)} H^2(x,\xi,T)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho)(1+\delta)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} + \frac{\alpha n k}{2(\alpha-1)}\delta t\right) F_\rho(x,T)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C(\delta,\alpha) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \cdot V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho) \\
&\quad \exp\left(\frac{\alpha n k(2+\delta)\delta}{2(\alpha-1)}t + \frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} - \frac{\rho^2}{4(1+2\delta)(1+\delta)t}\right).
\end{aligned}$$

最后一步由 (4.2.19) 得出. 取 ρ, 使 $r-\rho=\sqrt{t}$, 则

$$\begin{aligned}H(x,y,t) &\leqslant C(\delta,\alpha)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\\&\quad\cdot\exp\left(C_1\delta kt-\frac{\rho^2}{4(1+2\delta)(1+\delta)t}\right)\\&\leqslant C(\delta,\alpha)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\\&\quad\cdot\exp\left(C_1\delta kt-\frac{r^2(x,y)}{4(1+2\delta)(1+\delta)^2t}\right).\end{aligned}$$

最后一步用到 Schwarz 不等式

$$\rho^2=(r-\sqrt{t})^2\geqslant\frac{r^2(x,y)}{1+\delta}-\frac{t}{\delta}.$$

定理证毕.

对可能具边界的紧致 Riemann 流形, 其热核 有相同类型的定理. 其证明和定理 4.6 相似, 我们仅写出其结果:

定理 4.7 设 M 是可有边界的紧致 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k, k\geqslant 0$, 如果 $\partial M\neq\varnothing$, 则假定 ∂M 是凸的, M 的热核 $H(x,y,t)$ 指满足 Neumann 条件者, 则对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}H(x,y,t) &\leqslant C(\varepsilon,\eta)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\\&\quad\cdot\exp\left(-\frac{r^2(x,\eta)}{(4+\varepsilon)t}+C_1\varepsilon kt\right),\end{aligned}\tag{4.2.20}$$

其中 C_1 仅依赖于 n, $\varepsilon\to 0$ 时, $C(\varepsilon,n)\to\infty.V_x(R)$ 表示 $\mathrm{Vol}B_x(R)$.

关于 $H(x,y,t)$ 的下界, 我们有以下结果:

定理 4.8 设 M 是完备的无边界的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$, 则热方程的基本解 $H(x,y,t)$ 满足

$$H(x,y,t)\geqslant C(\varepsilon,n)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right)\tag{4.2.21}$$

及

$$H(x,y,t)\geqslant C(\varepsilon,n)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right).\tag{4.2.22}$$

证明 在 Harnack 不等式 (4.2.1) 中, 取 $k=0,\alpha=1$, 则

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{r^2(x,y)}{4(t_2-t_1)}\right).$$

由此得:

$$\begin{aligned}&\int_{B_x(R)} H(z,y,(1-\varepsilon)t)\,dz\\ \leqslant\ & V_x(R)H(x,y,t)(1-\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{R^2}{4\varepsilon t}\right).\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

取 $\varphi=\varphi(r(x,t))\in C_0^\infty(M)$, 使

$$\varphi(r(x,z))=\begin{cases}1, & z\in B_x(\sqrt{1-\varepsilon}R),\\ 0, & z\notin B_x(R),\end{cases}$$

并且 $0\leqslant\varphi\leqslant 1, \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0$, 令

$$F(y,t)=\int_M \varphi(r(x,z))H(z,y,t)\,dz,$$

它显然是热方程的正解，其初值为 $F(y,0)=\varphi(r(x,y))$.

$$\begin{aligned}F(y,t)&=\int_M \varphi(r(x,z))H(z,y,t)\,dz\\&=\int_{B_x(R)}\varphi(r(x,z))H(z,y,t)\,dz\\&\leqslant\int_{B_x(R)} H(z,y,t)\,dz.\end{aligned}$$

由 (4.2.23) 可见，欲估计 $H(x,y,t)$ 的下界，只要估计 $F(y,(1-\varepsilon)t)$ 即可. 估计 $F(y,t)$ 下界的方法采用 Cheeger-Yau 关于热核函数比较定理的证法（第三章，第 2 节，定理 2.2 ）. 将 Ric$\geqslant 0$ 的流形 M 和 $\mathbb{R}^n$ 相比较，记 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\varphi(r)$ 为初值的热方程的解为 $\overline{F}(y,t)$ 即

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\overline{F}(y,t)=0, & y\in\mathbb{R}^n,\\ \overline{F}(y,0)=\varphi(|y|),\end{cases}$$

则熟知

$$\overline{F}(y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|z|)\exp\left(\frac{-|y-z|^2}{4t}\right)dz,$$

易见， $\overline{F}(y,t)$ 对 y 是球对称的：如 $y'=yA, A\in SO(n)$, 则

$$\begin{aligned}\overline{F}(y',t) &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|y'-z|^2}{4t}\right)dz\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|yA-z|^2}{4t}\right)dz\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|zA'|)\exp\left(-\frac{|y-zA'|}{4t}\right)d(zA')\\ &= F(y,t).\end{aligned}$$

根据第二章第 2 节定理 2.2 的证明，只要可证

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial r}(r,t)\leqslant 0,$$

即有

$$\overline{F}(r(x,y),t)\leqslant F(y,t). \tag{4.2.24}$$

当 $t>0$ 时，记 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, 适当选取坐标系使 $y=(r,0,\cdots,0)$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{F}}{\partial r}(r,t)\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|z|)\frac{\partial}{\partial r}\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)\cdot\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|z|)(-1)\frac{r-z_1}{2t}\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)\cdot\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(|z_1|)\left(-\frac{r-z_1}{2t}\right)\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)dz_1\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(|y-r|)\left(-\frac{y}{2t}\right)e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy\\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

其中

$$\psi(|z_1|)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(\sqrt{z_1^2+\cdots+z_n^2}\cdot\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz_2\cdots dz_n.$$

注意由 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0$ 可知 $\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\leqslant 0$.

至于 $t=0$ 时，

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial r}(r,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0,$$

因此，(4.2.24) 得证. 由此，

$$\begin{aligned}\int_{B_x(R)} H(z,y,(1-\varepsilon)t)\,dz &> F(y,(1-\varepsilon)t)\\ &\geqslant \overline{F}(r(x,y),(1-\varepsilon)t)\\ &= (1-\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|y-z|^2}{4(1-\varepsilon)t}\right)dz.\end{aligned}$$

在 (4.2.23) 中取 $R^2=t$, 则

$$\begin{aligned}H(x,y,t) &\geqslant C(\varepsilon)(1-\varepsilon)^{\frac{n}{2}}V_x^{-1}(\sqrt{t})\\ &\quad\cdot\int_{B_x(\sqrt{t})} H(x,y,(1-\varepsilon)t)\\ &\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\\ &\quad\cdot\int_{|x|\leqslant\sqrt{1-\varepsilon t}}\exp\left(-\frac{|r(x,y)-|z|^2}{4(1-\varepsilon)t}\right)dz\\ &\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{4(1-\varepsilon)t}\right).\end{aligned}$$

至此，(4.2.21) 得证. 至于 (4.2.22), 由

$$\begin{aligned}2H(x,y,t) &\geqslant C^{-1}(\varepsilon)\exp\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}(V_x^{-1}(\sqrt{t})+V_y^{-1}(\sqrt{t}))\\ &\geqslant 2C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\cdot\exp\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\end{aligned}$$

即得.

用类似的但更为细致的讨论可以对具边界紧致 Riemann 流形证明同样的定理. 其证明的细节，见 P. Li and S. T. Yau, Estimate of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, Proc. Symp. Pure Math., 36(1980), 205-240.

定理 4.9 设 M 是可具边界的紧致 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$. 在 $\partial M\neq\varnothing$ 时，假定 ∂M 是凸的，则适合 Neumann 边界条件的基本解 $H(x,y,t)$ 具有以下估计：

$$H(x,y,t)\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right) \tag{4.2.25}$$

及

$$H(x,y,t)\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right). \tag{4.2.26}$$

将 $H(x,y,t)$ 的上界估计与下界估计结合起来, 可以得到单独用 $V_x^{-1}(\sqrt{t}) = \mathrm{Vol}^{-1}B_x(\sqrt{t})$ 来估计 $H(x,y,t)$ 的上界的一个结果:

定理 4.10 设 M 是完备的不具边界的 Riemann 流形, 或者是可具边界的紧致 Riemann 流形, 如 $\partial M \neq \varnothing$ 时, 假定 ∂M 是凸的. 两种情况下都假定 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 则满足 Neumann 条件的热方程的基本解有估计

$$H(x,y,t) \leqslant C(\delta)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \tag{4.2.27}$$

其中 $\delta \in (0,1), C(\delta)$ 为依赖于 δ 及 n 的常数.

证明 由 (4.2.13) 和 (4.2.20), 无论是完备还是紧致的情况, 都有

$$H(x,y,t) \leqslant C(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)t}\right), \tag{4.2.28}$$

再由 (4.2.21) 和 (4.2.25), 两种情况下也有

$$H(x,y,t) \geqslant C_1^{-1}(\varepsilon)V_y^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right).$$

由此,

$$V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \leqslant C_2(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\exp\left[\frac{r^2(x,y)}{t}\left(\frac{1}{4-\varepsilon}-\frac{1}{4+\varepsilon}\right)\right].$$

代回 (4.2.28),

$$\begin{aligned}
H(x,y,t) &\leqslant C_3(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left[\frac{r^2(x,y)}{t}\left(\frac{1}{4-\varepsilon}-\frac{2}{4+\varepsilon}\right)\right] \\
&\leqslant C_3(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left[-\frac{r^2(x,y)}{t}\frac{1-\frac{3}{4}\varepsilon}{4-\frac{\varepsilon^2}{4}}\right] \\
&\leqslant C(\delta)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right).
\end{aligned}$$

只要取 ε 使 $4+\delta = (4-\frac{\varepsilon^2}{4})/(1-\frac{3}{4}\varepsilon)$ 即可.

本节所讨论的结果大都可推广到有位能的热方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + qu = 0, \tag{4.2.29}$$

特别是 Harnack 不等式, 以及基本解的上、下界估计, 读者可参考 P. Li and S. T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math. 156(1986), 153-201. 在这里，我们只节录较重要的结果.

对任意常数 $\alpha > 1, x, y \in M, 0 < t_1 < t_2$, 函数 $\rho_\alpha(x,y,t_1,t_2)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(x,y,t_1,t_2) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\Big\{&\frac{\alpha}{4(t_2-t_1)}\int_0^1|\dot\gamma|^2\,ds\\&+(t_2-t_1)\cdot\int_0^1 q(\gamma(s),(1-s)t_2+st_1)\,ds\Big\}.\end{aligned}$$

在这里 $\Gamma = \{\gamma|\gamma:[0,1]\to M, \gamma(0)=x, \gamma(1)=y\}$. 假定 $q(x,t)$ 是对 x 二次可微连续，对 t 一次可微连续函数. 另外， q 要满足其他一些条件. 下面定理 4.4′ 中， A 表示和 $\Delta q, |\nabla q|$ 的上界以及 α 有关的常数. 确定的关系，读者可参考他们的文章.

定理 4.4′ 设 M 是完备的 n 维、非紧的流形, 没有边界，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k, k \geqslant 0$. 如果 $u(x,t)$ 是 (4.2.29) 的一个正解，则对任意 $\alpha > 1, x_1, x_2 \in M, 0 < t_1 < t_2 < +\infty$, 下列不等式成立：

$$\begin{aligned}u(x_1,t_1) \leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}&\exp(A(t_2-t_1)\\&+\rho_\alpha(x_1,x_2,t_2,t_1)).\end{aligned}$$

对 (4.2.29) 基本解也有类似的上界估计, 但表示较繁. 读者可参考 Li 和 Yau 的文章. 另外，对基本解的下界估计有下面的定理：

定理 4.8′ 设 M 是完备的无边界 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$.$q(x)$ 是 M 上的二次可微连续函数, 且满足 $\Delta q \leqslant \theta$, θ 是一个常数. 另外假设 $\exp(-q) \in L^2(M)$, 则 (4.2.29) 的基本解 $H(x,y,t)$ 满足下列不等式：

$$H(x,y,t) \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\left(\frac{n\theta}{2}\right)^{\frac12}t-\rho(x,y,t)\right].$$

定理 4.4′ 和定理 4.8′ 的证明可参考 Li 和 Yau 的文章 (发表在 Acta Math.).

4.3 热核估计的应用

本节将给出第 1 节和第 2 节中关于热核的整体估计和局部增长估计（梯度估计）的若干应用. 这些应用或者提供了流形热核的总体信息，或者导出流形

的整个谱系的估计. 而关于 Green 函数 的估计，则用更简单的方法改进了 N. Varopoulos 的结果.

定理 4.11 设 M 是可能具边界的紧致 Riemann 流形， $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 如果 $\partial M \neq \varnothing$, 则假定 ∂M 是凸的, 则满足 Neumann 条件的热方程的基本解 $H(x,y,t)$ 具估计

$$H(x,x,t) \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}. \tag{4.3.1}$$

证明 应用定理 4.1 于 $u = H(x,y,t+\varepsilon)$ (看成 $(y,t) \in M \times [0,\infty)$ 的函数)， u 显然符合该定理的条件，因此有 $(H = H(x,y,t+\varepsilon))$

$$|\nabla H|^2 - H\frac{\partial H}{\partial t} \leqslant \frac{n}{2t}H^2, \tag{4.3.2}$$

两边在 M 上积分，应用 Stokes 公式. 无论是 $\partial M = \varnothing$, 还是 $\partial M \neq \varnothing$ 而 $\frac{\partial H}{\partial \nu} = 0$ (ν 是 ∂M 的外法线方向)，都有

$$\int_M |\nabla H|^2 = -\int_M H\Delta H,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{n}{2t}\int_M H^2\,dy &\geqslant -\int_M \left(H\Delta H + H\frac{\partial}{\partial t}H\right)dy \\ &= -2\int_M H\frac{\partial}{\partial t}H\,dy \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_M H^2\,dy,\end{aligned}$$

但是由第三章定理 2.1 有

$$\int H^2(x,y,t+\varepsilon)\,dy = H(x,x,2(t+\varepsilon)),$$

所以

$$\frac{n}{2t}H(x,x,2(t+\varepsilon)) \geqslant -\frac{\partial}{\partial t}H(x,x,2(t+\varepsilon)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\ln(t^{\frac{n}{2}}H(x,x,2(t+\varepsilon)))] \geqslant 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 并注意 $H(x,x,t) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(t \to 0)$, 即得

$$H(x,x,t) \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.$$

定理证毕.

根据紧致流形热核的谱(对函数而言)展开式,如果我们记 M 的 Laplace 算子对函数而言的谱集为 $0 = u_0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots$ (当 $\partial M \neq \varnothing$ 时,这里指的是满足 Neumann 边界条件 的特征值),则

$$H(x, x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \varphi_i^2(x),$$

$\varphi_i(x)$ 组成 $\left\{ f | f \in L^2(M), \left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = 0 \right\}$ 一组完备正交基,因此 (4.3.1) 给出

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M). \tag{4.3.3}$$

而著名的 Polya 猜想要求证明(对 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域)

$$\mu_k \leqslant C(n) \left(\frac{k}{\mathrm{Vol}(M)} \right)^{\frac{2}{n}}, \tag{4.3.4}$$

$$C(n) = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} \right)^{-\frac{2}{n}}, \ \omega_{n-1} = \mathrm{Area}(S^{n-1}).$$

(4.3.3) 提供了(至少对凸域而言) Polya 猜想为真的一个迹象.

在紧致流形情况下,正如我们在第三章第 4 节看到的,可以用流形的直径来估计第一特征值 的下界. Gromov 对 $\partial M = \varnothing$ 的紧致流形的高阶特征值给出了下界的估计,见 M. Gromov , Paul Levy's isoperimetric inequality, I. H. E. S., preprint, 1980. 下面的定理表明,利用热核的估计可以方便地把这一估计推广到具凸边界紧致流形的情形(无论 Dirichlet 边界条件还是 Neumann 边界条件皆如此).

定理 4.12 设 M 是可能具有边界的紧致 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$. 当 $\partial M = \varnothing$ 时,记其 Laplace 算子的特征值为 $\{0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots\}$. 当 $\partial M \neq \varnothing$ 时,假定 ∂M 是凸的,其 Dirichlet 特征值记作 $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots\}$; Neumann 条件特征值记作 $\{0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots\}$, 则 $\forall k \geqslant 1$, 有

$$\lambda_k \geqslant \frac{C_1(n)}{d^2} k^{\frac{2}{n}}; \mu_k \geqslant \frac{C_2(n)}{d^2} (k+1)^{\frac{2}{n}},$$

其中 $C_1(n), C_2(n)$ 仅依赖于 n, 而 d 为 M 的直径.

证明 因为 Dirichlet 热核 $\leqslant$Neumann 热核，在下面的证明中 $H(x,y,t)$ 理解为后者. 由定理 4.10，存在 $C(n)$, 使

$$H(x,y,t) \leqslant C(n) V_x^{-1}(\sqrt{t}).$$

令 $y=x$, 求其迹，得

$$\int_M H(x,x,t)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \leqslant C(n) \int_M V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dx.$$

但当 $\sqrt{t} \geqslant d$ 时， $V_x(\sqrt{t}) = V_x(d) = \mathrm{Vol}(M)$. 而当 $\sqrt{t} \leqslant d$ 时，由体积的比较定理（第一章，第 1 节， (1.1.17)),

$$\frac{V_x(\sqrt{t})}{V_x(d)} \geqslant \frac{V(0,\sqrt{t})}{V(0,d)} = \left(\frac{\sqrt{t}}{d}\right)^n, \tag{4.3.5}$$

此处 $V(0,d)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 d 的球的体积. 因而，如 $\sqrt{t} \leqslant d$, 则

$$V_x^{-1}(\sqrt{t}) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \leqslant C(n) \begin{cases} \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n, & t \leqslant d^2, \\ 1, & t \geqslant d^2. \end{cases}$$

任意固定 $k \geqslant 1$, 上式左端只取前 $k+1$ 项，有

$$(k+1) e^{-\mu_k t} \leqslant C(n) \begin{cases} \left(\dfrac{d}{\sqrt{t}}\right)^n, & t \leqslant d^2, \\ 1, & t \geqslant d^2. \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} k+1 &\leqslant \inf_t C(n) \begin{cases} \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t}, & t \leqslant d^2, \\ e^{\mu_k t}, & t \geqslant d^2. \end{cases} \\ &\leqslant C(n) \cdot \min\left\{ e^{\mu_k d^2},\ \inf_{0<t\leqslant d^2} \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t} \right\}. \end{aligned}$$

易见，

$$\inf \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t} = \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t}\Big|_{t=\frac{n}{2\mu_k}} = \left(\frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} (d\sqrt{\mu_k})^n,$$

因为

$$e^{\mu_k d^2} \geqslant \frac{1}{C(n)}(k+1),$$

$$\mu_k \geqslant \frac{1}{d^2}\ln\frac{k+1}{C(n)},$$

因此若 $t_0 = \frac{n}{2\mu_k} > d^2$, 即 $\frac{n}{2d^2} > \mu_k$, 这样的 μ_k 只能有有限个 (依赖于 n). 对这有限个自然可找到常数 $C'(n)$, 使

$$\mu_k \geqslant \frac{1}{d^2}\ln\frac{k+1}{C(n)} \geqslant \frac{C'(n)}{d^2}(k+1)^{\frac{2}{n}}.$$

而对其余的 μ_k, 一定有 $t_0 = \frac{n}{2\mu_k} \leqslant d^2$, 此时即有

$$\left(\frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}}(d\sqrt{\mu_k})^n \geqslant \frac{1}{C(n)}(k+1),$$

即有

$$\mu_k \geqslant C''(n)\frac{(k+1)^{\frac{2}{n}}}{d^2}.$$

对 Neumann 特征值 μ_k 的情况证完. 将 μ_k 换成 λ_k, 得类似的结果, 定理证毕.

注：同样的推理，如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -K, K \geqslant 0$, 则有

$$\lambda_k, \mu_k \geqslant C(n,k,K,d), k \geqslant 1. \tag{4.3.6}$$

$C(n,k,K,d)$ 表仅依赖于 n,k,K,d 的常数， d 为 M 的直径， $n = \dim M$.

最后，我们利用热核 估计导出对 Green 函数 的估计以结束本章.

在完备 Riemann 流形上，可以定义 Green 函数为

$$G(x,y) = \int_0^\infty H(x,y,t)\,dt, \tag{4.3.7}$$

如果右端积分收敛的话, 因为此时可以验证，$G(x,y) > 0$ 及 $\Delta G(x,y) = -\delta_x(y)$.

定理 4.13 设 M 是完备的 Riemann 流形， $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 如果 $G(x,y)$ 存在，则下列估计式成立：

$$\begin{aligned} C_1(n)\int_{r^2(x,y)}^\infty V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dt &\leqslant G(x,y) \\ &\leqslant C_2(n)\int_{r^2(x,y)}^\infty V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dt \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

以及

$$\begin{aligned}&C_1(n)\int_{r^2(x,y)}^{\infty}V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\,dt\\ \leqslant\ &G(x,y)\\ \leqslant\ &C_2(n)\int_{r^2(x,y)}^{\infty}V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\,dt,\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

其中 $V_x(\sqrt{t})=\mathrm{Vol}(B_x(\sqrt{t}))$, C_1,C_2 为仅依赖于 n 的常数.

证明 记 $r=r(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}G(x,y)&=\int_0^{\infty}H(x,y,t)\,dt\\&=\int_0^{r^2}H(x,y,t)\,dt+\int_{r^2}^{\infty}H(x,y,t)\,dt\end{aligned}$$

由定理 4.10，

$$\int_{r^2}^{\infty}H(x,y,t)\,dt\leqslant C(n)\int_{r^2}^{\infty}V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dt,$$

因此只需证明存在 $C_1(n)$ 使得

$$\int_0^{r^2}H(x,y,t)\,dt\leqslant C_1(n)\int_{r^2}^{\infty}V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dt$$

即可. 再用定理 4.10，

$$H(x,y,t)\leqslant C_1(n)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right),$$

因而

$$\int_0^{r^2}H(x,y,t)\,dt\leqslant C_1(n)\int_0^{r^2}V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right)\,dt,$$

置 $s=r^4/t$, 则 $r^2\leqslant s<+\infty$,

$$\int_0^{r^2}V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right)\,dt=\int_{r^2}^{\infty}V_x^{-1}\left(\frac{r^2}{\sqrt{s}}\right)\exp\left(-\frac{s}{5r^2}\right)\frac{r^4}{s^2}\,ds,$$

再用体积比较定理（ $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$），注意 $t=\frac{r^4}{s}\leqslant s$,

$$\frac{V_x(\sqrt{t})}{V_x(\sqrt{s})}\geqslant\frac{V(0,\sqrt{t})}{V(0,\sqrt{s})}=\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)^n=\left(\frac{r^2}{s}\right)^n,$$

所以

$$\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}\left(\frac{r^2}{s}\right)\exp\left(-\frac{s}{5r^2}\right)\frac{r^4}{s^2}\,ds \leqslant \int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{s})\left(\frac{r^2}{s}\right)^{n+2}\cdot\exp\left(\frac{-s}{5r^2}\right)ds$$
$$\leqslant C_2(n)\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{s})\,ds,$$

其中 $C_2(n)=\sup\limits_{a>0} a^{n+2}\exp\left(-\frac{a}{5}\right)<+\infty$.

至此 (4.3.8) 的右端证完，至于左端，利用定理 4.8 中 (4.2.21)，当 $t\geqslant r^2$ 时，

$$H(x,y,t)\geqslant C_3(\varepsilon,n)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right)$$
$$\geqslant C_3(\varepsilon,n)V_x^{-1}(\sqrt{t})e^{-\frac{1}{4-\varepsilon}},$$

因此，

$$G(x,y)\geqslant\int_{r^2}^{\infty}H(x,y,t)\,dt\geqslant C_3(n)\int_{r^2}^{\infty}V_x^{-1}(\sqrt{t})\,dt.$$

用同样的方法可证 (4.3.9)，至此定理全部证毕.

注 这个定理首先由 N. Varopoulos 证明，他的定理条件是：M 是完备流形，Ric $(M)\geqslant 0$, 且具有一极点 (pole) 使 $k(r)\geqslant 0$, 此处 $k(r)$ 表示沿由极点出发的测地线的径向曲率.

第五章　纯量曲率的共形形变

设 (M, g) 是一 $n \geqslant 2$ 维的光滑 Riemann 流形. 若 $\widetilde{g}$ 为 M 上的另一 Riemann 度量, 称 $\widetilde{g}$ 共形于 (又称共形或保形于)g, 如果存在 M 到自身之上的微分同胚 f 以及正值函数 $\rho \in C^\infty(M)$ 使得 $\widetilde{g} = \rho f^* g$. 在 f 是恒同映射, 即 $g = \rho g$ 的情形, 称 $\widetilde{g}$ 逐点共形 于 g, 又称 $\widetilde{g}$ 为 g 的一个共形形变 . 在 $\widetilde{g} = g$ 的情形, 即 $g = \rho f^* g$, 称 f 为 (M, g) 上的一个共形变换 . 命

$$\mathscr{C}_g = \{\rho g | \rho \in C^\infty(M), \rho > 0\}$$

为 M 上所有逐点共形于 g 的 Riemann 度量的集合. 在本章中我们研究如下的问题: 给定 (M, g) 以及函数 $K \in C^\infty(M)$, 问是否存在 $\widetilde{g} \in \mathscr{C}_g$ 使得 $\widetilde{g}$ 的纯量曲率 $\widetilde{R}$ 恰等于 K?

为了回答上述问题, 我们需要知道在度量的共形形变下, 纯量曲率的相应变化. 为此在局部坐标系下进行计算 (使用对重复指标进行求和的约定). 熟知, Ricci 曲率可表示为

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^t}{\partial x^t} - \frac{\partial \Gamma_{it}^t}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{st}^t - \Gamma_{it}^s \Gamma_{sj}^t,$$

其中

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

是关于 g 的 Christoffel 符号. 用 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ 表示关于 $\widetilde{g}=\rho g$ 的 Christoffel 符号，则直接计算可得

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k+\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^j}+\delta_{jk}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^i}-g_{ij}g^{kl}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^l}\right).$$

由此求出 $\widetilde{g}$ 的 Ricci 曲率为

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ij}\ =\ &R_{ij}-\frac{n-2}{2}(\log\rho)_{,ij}=\frac{n-2}{4}(\log\rho)_{,i}(\log\rho)_{,j}\\&-\frac{1}{2}\left(\Delta(\log\rho)+\frac{n-2}{2}|\nabla\log\rho|^2\right)g_{ij}.\end{aligned}$$

于是由 $\widetilde{R}=\widetilde{g}^{ij}\widetilde{R}_{ij}=\rho^{-1}g^{ij}\widetilde{R}_{ij}$ 即可得

$$\widetilde{R}=\rho^{-1}R-(n-1)\rho^{-2}\Delta\rho-\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\rho^{-3}|\nabla\rho|^2.$$

为了消除此式中的梯度项，我们区分以下两种情形：

情形 (i) $n=2$. 令 $\rho=e^{2u}$, 则 R 与 $\widetilde{R}$ 之间的关系化为

$$\widetilde{R}=e^{-2u}(R-2\Delta u).$$

由于在二维情形纯量曲率是两倍 Gauss 曲率（记作 K 和 $\widetilde{K}$)，因此得出

$$\Delta u-K+\widetilde{K}e^{2u}=0.\tag{5.0.1}$$

反之，如 $\widetilde{K}\in C^\infty(M)$ 是一个给定的函数，寻找 $\widetilde{g}=e^{2u}g$ 使 $\widetilde{g}$ 的纯量曲率等于 $\widetilde{K}$ 的问题就等价于求解半线性椭圆方程 (5.0.1).

情形 (ii) $n\geqslant 3$. 令 $\rho=u^{\frac{4}{n-2}}$, 经简单计算得：

$$\widetilde{R}=u^{-\frac{n+2}{n-2}}\left(Ru-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u\right).$$

这样我们的问题化为求解

$$\Delta u-\frac{n-2}{4(n-1)}Ru+\frac{n-2}{4(n-1)}\widetilde{R}u^{\frac{n+2}{n-2}}=0,\ u>0.\tag{5.0.2}$$

如果 $u\in C^\infty(M)$ 是 (5.0.2) 的一个解，则 $\widetilde{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$ 就以 $\widetilde{R}$ 为纯量曲率.

在本章中, 我们总假定 (M,g) 是一个紧致、无边的光滑 Riemann 流形. 从微分几何的角度看，最有兴趣的情形是方程 (5.0.1) 和 (5.0.2) 中 $\widetilde{K}$ 及 $\widetilde{R}$ 是常数的

情形. 这意味着我们要在每个度量的共形等价类 $\mathscr{C}_g$ 中找一个"较好的"、使得纯量曲率是常数的度量. 由复变函数论中的单值化定理 (Uniformazation Theorem) 可知, 在 $n=2$ 的情形这件事是总能办到的. 而在 $n\geqslant 3$ 的情形, 这个问题称为 Yamabe 猜想 , 它经过 Yamabe(1960 年) 、Trüdinger(1968 年) 、Aubin (1976 年) 等人的研究, 最终被 Schoen (1984 年) 所解决. 其答案也是肯定的.

Yamabe 提出他的问题原是为了解决三维情形的 Poincaré 猜测. 设 M 为一光滑流形, 则 M 上的一个 Einstein 度量 g 是满足 $\mathrm{Ric}(g)=cg$ 的 Riemann 度量, 这里 $\mathrm{Ric}(g)$ 是 g 的 Ricci 曲率 , c 为常数. 在三维的情形, Einstein 度量必具有常截曲率. 因此, 如果在任何单连通的三维紧流形上我们都能构造出 Einstein 度量, 就可以推出这样的流形微分同胚于三维球面, 从而证明 Poincaré 猜测 . 如果令 $\mathscr{M}$ 表示 M 上 Riemann 度量的全体, 可以证明 Einstein 度量 对应于 $\mathscr{M}$ 上的泛函

$$\mathcal{Q}(g)=\frac{\int_M R_g\,d\mu_g}{V_g^{1-\frac{2}{n}}}$$

的临界点, 其中 R_g 是 g 的纯量曲率, $V_g=\int_M d\mu_g$ 是体积, $n=\dim M\geqslant 3$. 在下面第 2 节中我们将看到, 如果把泛函 $\mathcal{Q}$ 限制在一个共形等价类 $\mathscr{C}_{g_0}$ 上, 则这个限制泛函的临界点是纯量曲率为常数的共形于 g_0 的度量. Yamabe 的作法是在共形等价类 $\mathscr{C}_{g_0}$ 中极小化 $\mathcal{Q}$, 即令

$$\lambda(M,g_0)=\inf_{g\in\mathscr{C}_{g_0}}\mathcal{Q}(g),$$

如果存在 $g\in\mathscr{C}_{g_0}$ 使 $\mathcal{Q}(g)=\lambda(M,g_0)$, 则 g 具有常纯量曲率. 为了获得 Einstein 度量可以进一步定义"极小 - 极大值"

$$\Lambda(M)=\sup_{g_0\in\mathscr{M}}\inf_{g\in\mathscr{C}_{g_0}}\mathcal{Q}(g).$$

可以证明: 如果存在 $g\in\mathscr{M}$, 使 $\mathcal{Q}(g)=\lambda(M,g)=\Lambda(M)$(这时称 g 达到 $\Lambda(M)$), 则 g 是 Einstein 度量. 对任何紧致 n 维流形 M 总有 $\lambda(M,g)\leqslant\lambda(S^n,g_1)$ (见引理 2.2), 这里 g_1 表示 S^n 上的标准度量, $n\geqslant 3$, 因此 S^n 的标准度量是达到 Λ 的一个例子. 另一个例子是环面 T^n 上的标准度量 g_0, 由于 T^n 上不存在具正纯量曲率的 Riemann 度量, 有 $\lambda(T^n,g)\leqslant\lambda(T^n,g_0)=0$, 即 g_0 达到了 $\Lambda(T^n)=0$. 另一种可能的例子是曲率是负常数的空间形式, (M^n,g_{-1}), 尚不清楚 $\Lambda(M^n)$ 是

否被 Poincaré 度量 g_{-1} 所达到. 如果能用上述的"极小 — 极大"步骤在一般紧致流形上获得 Einstein 度量显然是十分有意义的，本章将要讨论的 Yamabe 问题只是这个方向上的第一步.

在以下的第 1 节中我们讨论二维情形的方程 (5.0.1). 在第 2～4 节中讨论 $n \geqslant 3$ 维情形的方程 (5.0.2)，我们将限于讨论 $\widetilde{R} =$ 常数的情形，即 Yamabe 问题.

应当指出，在非紧完备的 Riemann 流形的范畴内同样可以提 Yamabe 问题. 鉴于这方面的研究还不多，本书暂不涉及这个问题.

5.1　三维情形

本节研究二维紧致无边 Riemann 流形 (M, g) 上的方程

$$\Delta u - K + \widetilde{K} e^{2u} = 0,$$

其中 K 是 Riemann 度量 g 的 Gauss 曲率，$\widetilde{K} \in C^\infty(M)$ 是给定的函数. 由 Gauss-Bonnet 公式有

$$\int_M K \, d\mu = 2\pi\chi(M), \tag{5.1.1}$$

其中 $d\mu$ 是 (M, g) 的体积元，$\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数. 因此，如 $u \in C^\infty(M)$ 是 (5.0.1) 的一个解，在 M 上积分方程 (5.0.1) 即得

$$\int_M \widetilde{K} e^{2u} \, d\mu = 2\pi\chi(M). \tag{5.1.2}$$

这正是关于 $(M, \widetilde{g})$ 的 Gauss-Bonnet 公式，其中 $\widetilde{g} = e^{2u} g$，这是因为 $\widetilde{g}$ 的体积元 $d\widetilde{\mu} = e^{2u} \, d\mu$，而其 Gauss 曲率为 $\widetilde{K}$. 显然，在 $\chi(M)$ 有不同符号的情形，(5.1.2) 要求 $\widetilde{K}$ 满足不同类型的条件. 因此我们的讨论将按照 $\chi(M) < 0, = 0, > 0$，分为三种情形.

情形 I　$\chi(M) < 0$.

虽然方程 (5.0.1) 的可解性在这种情形尚未彻底解决，但我们对问题有较好的理解. 在这种情形下，利用所谓"上、下解原理"来求解 (5.0.1) 看来是合理的. 以下命题是这一原理的一种简单情形.

命题 1.1 设 (M,g) 是一光滑、紧致、 n 维 Riemann 流形. 考虑其上的半线性椭圆方程

$$\Delta u+f(x,u)=0, \tag{5.1.3}$$

其中 $f\in C^{\infty}(M\times\mathbb{R})$. 如果存在 $\varphi,\psi\in C^2(M)$ 满足

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi+f(x,\varphi)\geqslant 0,\\&\Delta\psi+f(x,\psi)\leqslant 0\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

（分别称 φ 和 ψ 为 (5.1.3) 的下解和上解），并且 $\varphi\leqslant\psi$, 则 (5.1.3) 有解 $u\in C^{\infty}(M)$, 满足 $\varphi\leqslant u\leqslant\psi$.

证明 令 A 为一常数使得 $-A\leqslant\varphi\leqslant\psi\leqslant A$. 由 M 的紧性，总可以取足够大的正常数 c 使得函数 $F(x,t)\equiv ct+f(x,t)$ 对于每个固定的 $x\in M$, 在 $[-A,A]$ 上是 t 的上升函数. 定义 $Lu=-\Delta u+cu$. 熟知， L 作为 $C^{2,\alpha}(M)$ 到 $C^{0,\alpha}(M)(\alpha\in(0,1))$ 的椭圆算子，具有紧的逆算子 L^{-1}. 而且，由极大值原理，L 是正算子，即成立:

$$\text{如}\, Lv_1\geqslant Lv_2,\ \ \text{则}\, v_1\geqslant v_2. \tag{5.1.5}$$

现归纳地定义

$$\begin{aligned}&\varphi_0=\varphi,\quad \varphi_k=L^{-1}(F(x,\varphi_{k-1})),\ k\geqslant 1;\\&\psi_0=\psi,\quad \psi_k=L^{-1}(F(x,\psi_{k-1})),\ k\geqslant 1.\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

则有

$$L\varphi\leqslant L\varphi_1=F(x,\varphi)\leqslant F(x,\psi)=L\psi_1\leqslant L\psi,$$

其中两个等式由 (5.1.6) 得出，第一个和最后一个不等式由 (5.1.4) 给出，而中间的不等式则是由于 $F(x,t)$ 关于 t 单调上升. 因此，利用 (5.1.5) 就有

$$\varphi\leqslant\varphi_1\leqslant\psi_1\leqslant\psi.$$

仿此，用归纳法可证

$$\varphi\leqslant\varphi_{k-1}\leqslant\varphi_k\leqslant\psi_k\leqslant\psi_{k-1}\leqslant\psi,\ \forall k\geqslant 1.$$

序列 $\{\varphi_k\}$ 和 $\{\psi_k\}$ 的单调有界性保证了有逐点的收敛： $\varphi_k\to\underline{u},\psi_k\to\overline{u}$, 并且 $\varphi\leqslant\underline{u}\leqslant\overline{u}\leqslant\psi$. 现由 (5.1.6) 和 $\{\varphi_k\}$ 及 $\{\psi_k\}$ 的有界性，利用线性椭圆方程的

L^p 估计 $(p > n)$ 我们推出这两个序列在 $L_1^p(M) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(M)$ 中有界. 因此, 上面的逐点收敛实际上是 $C^{1,\alpha}$ 收敛. 从而我们可在 (5.1.6) 中令 $k \to \infty$ 而取极限, 得出

$$Lv = F(x, v), \tag{5.1.7}$$

其中 $v = \underline{u}$ 或 $\overline{u}$. 继之, 由椭圆方程的 Schauder 估计可知, $\underline{u}$ 和 $\overline{u} \in C^\infty(M)$. 最后注意由 L 和 F 的定义, (5.1.7) 与 (5.1.3) 是等价的, 命题即得证.

现回到原来的方程 (5.0.1) , 我们有

命题 1.2 设 $\chi(M) < 0$, 则 (5.0.1) 有解的一个充分条件是存在 (5.0.1) 的一个上解 $\psi \in C^2(M)$.

证明 由命题 1.1 , 我们只需找到 (5.0.1) 的一个下解 φ, 使得 $\varphi \leqslant \psi$. 令 $\varphi = f - c$, 其中 c 为正常数, f 是方程

$$\Delta f = K - K_0$$

的解, 这里 $K_0 = \frac{1}{v}\int_M K\, d\mu$ 是 K 的平均值. 自 (5.1.1) 及 $\chi(M) < 0$ 知 K_0 为负数. 注意上述方程可解是由于其右端的平均值为零. 取 c 足够大显然可使 $\varphi \leqslant \psi$ 成立. 又有

$$\Delta\varphi - K + \widetilde{K}e^{2\varphi} = -K_0 + \widetilde{K}e^{2f-2c} > 0,$$

只要 c 充分大. 因此我们可找到满足 $\varphi \leqslant \psi$ 的下解 φ. 证毕.

作为命题 1.2 的一个推论, 有以下的结果 (见 Kazdan-Warner, Ann. Math., 99(1974), 14-47).

定理 1.3 如 $\chi(M) < 0, \widetilde{K} \leqslant 0$ 但 $\widetilde{K}$ 不恒等于 0, 则 (5.0.1) 有解 $u \in C^\infty(M)$.

证明 由命题 1.2 , 我们只需找 (5.0.1) 的一个上解. 令 $\psi = af + b$, 其中 $f \in C^\infty(M)$ 满足方程

$$\Delta f = \widetilde{K}_0 - \widetilde{K}.$$

这里 $\widetilde{K}_0$ 为 $\widetilde{K}$ 的平均值, 由定理的条件 $\widetilde{K}_0 < 0$. 取正数 a 足够大, 使 $a\widetilde{K}_0 < K(x), \quad \forall x \in M$. 又取 b 充分大使 $e^{af+b} - a > 0$, 则有

$$\Delta\psi - K + \widetilde{K}e^{\psi} = a\widetilde{K}_0 - K + (e^{af+b} - a)\widetilde{K} < 0.$$

这说明 ψ 是 (5.0.1) 的上解. 证毕.

条件 (5.1.2) 说明在 $\chi(M)<0$ 的情形, $\widetilde{K}$ 必须在某些地方取负值 (5.0.1) 才可能有解. 但在 $\widetilde{K}$ 变号时 (5.0.1) 可能没有解, 在这种情形可解性的充分必要条件还不清楚.

情形 II $\chi(M)=0$.

在这种情形我们的问题获得了完全的解答. M. S. Berger 首先得到 (5.0.1) 可解的一个充分条件, 而 Kazdan-Warner 指出这个条件也是必要的.

定理 1.4 设 $\chi(M)=0$, 则 (5.0.1) 有光滑解的充分必要条件是: 或者 (i)$\widetilde{K}\equiv 0$, 或者 (ii)$\widetilde{K}$ 变号且满足

$$\int_M \widetilde{K}e^{2f}\,d\mu<0, \tag{5.1.8}$$

其中 f 是 $\Delta f=K$ 的一个解.

证明 必要性. 首先注意由 (5.1.1) 及 $\chi(M)=0$, 有 $\int_M K\,d\mu=0$. 因此存在 $f\in C^\infty(M)$ 使 $\Delta f=K$. 设 u 是 (5.0.1) 的解, 令 $v=u-f$, 则

$$\Delta v+\widetilde{K}e^{2v+2f}=0. \tag{5.1.9}$$

因而,

$$\int_M \widetilde{K}e^{2f}\,d\mu=-\int_M e^{-2v}\Delta v\,d\mu=-2\int_M e^{-2v}|\nabla v|^2\,d\mu\leqslant 0.$$

如果这积分 $=0$, 则必有 $|\nabla v|\equiv 0$, 从而 $v\equiv$ 常数, 由 (5.1.9) 即可推出 $\widetilde{K}\equiv 0$. 因此, 在 $\widetilde{K}\not\equiv 0$ 时必有 (5.1.8) 成立, 且由 (5.1.2) 可知 $\widetilde{K}$ 必须变号.

充分性. 在 $\widetilde{K}\equiv 0$ 时易见 f 即是 (5.0.1) 的解, 故设 $\widetilde{K}\not\equiv 0$. 我们用变分方法来求解 (5.0.1). 令

$$\mathscr{M}=\{u\in L_1^2(M)|\int_M u\,d\mu=\int_M \widetilde{K}e^{2u+2f}\,d\mu=0\}.$$

由于 $\widetilde{K}$ 变号, $\mathscr{M}$ 是 $L_1^2(M)$ 的非空子集. 我们考虑泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2\,d\,\mu$$

在 $\mathscr{M}$ 上的极小化问题. 设若存在 $u_0\in\mathscr{M}$ 使 $J(u_0)=\inf\limits_{u\in\mathscr{M}}J(u)$, 则由 Lagrange 乘子理论, 存在常数 α,β 使得在 $L_1^2(M)$- 弱解的意义下

$$\Delta u_0+\alpha+\beta\widetilde{K}e^{2u_0+2f}=0.$$

积分此方程可得

$$\alpha \cdot V = -\beta \int_M \widetilde{K} e^{2u_0+2f}\, d\mu = 0,$$

这是由于 $u_0 \in \mathscr{M}$. 这里 $V = \int_M d\mu$ 是 M 之体积. 因此 $\alpha = 0$. 于是

$$\beta \int_M \widetilde{K} e^{2f}\, d\mu = -\int e^{-2u_0} \Delta u_0\, d\mu < 0,$$

条件 (5.1.8) 则保证了 $\beta > 0$. 令 $v_0 = u_0 + \frac{1}{2}\log\beta$, 则 v_0 是 (5.1.9) 的一个 L_1^2- 弱解. 下面将说明, 对于任何 $u \in L_1^2(M), e^u \in L^p(M), \forall p \geqslant 1$. 因此, 由标准的椭圆正则性理论可知 $v_0 \in C^\infty(M)$, 而 $u = v_0 + f$ 即是 (5.0.1) 的光滑解.

现设 $\{u_i\} \subset \mathscr{M}$ 是 $J(u)$ 在 $\mathscr{M}$ 上的一个极小化序列, 即 $J(u_i) \to c_0 = \inf\limits_{u \in \mathscr{M}} J(u)$. 由于 $\int_M u_i\, d\mu = 0$, 故 $||u_i||_{L^2}^2 \leqslant cJ(u_i)$ (Poincaré 不等式). 所以 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中有界, 我们可设某个子序列, 仍记为 $\{u_i\}$, 在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于 u_0. 由 $J(u)$ 的弱下半连续性, $J(u_0) \leqslant c_0$. 另一方面, 由后面的引理 1.6 可以推出

$$0 = \lim_{i\to\infty} \int_M \widetilde{K} e^{2u_i+2f}\, d\mu = \int_M \widetilde{K} e^{2u_0+2f}\, d\mu.$$

由此可知 $u_0 \in \mathscr{M}$ $\left(\int_M u_0\, d\mu = 0\text{是明显的}\right)$. 从而由 c_0 的定义有 $J(u_0) \geqslant c_0$. 这证明了 $J(u_0) = c_0$, 而前面已经说明这样的 u_0 对应于 (5.0.1) 的一个光滑解. 证毕.

为了补出上述证明中一个分析事实的证明, 我们需要

引理 1.5 (Trüdinger 不等式) 设 (M, g) 为一紧致、无边、二维 Riemann 流形, 则存在 $\beta, C > 0$, 使得对所有满足 $\int_M u\, d\mu = 0, \int_M |\nabla u|^2\, d\mu \leqslant 1$ 的 $u \in L_1^2(M)$, 成立

$$\int_M e^{\beta u^2}\, d\mu \leqslant C.$$

证明 令 $U_i, \varphi_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, 为 M 的一个单位分解, 满足: 每个 U_i 都微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 上的单位圆盘 $D, \varphi_i \in C_0^\infty(U_i), 0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, 以及 $\sum_{i=1}^k \varphi_i \equiv 1$, 令 $u_i = \varphi_i u$, 则 $u = \sum_{i=1}^k u_i$. 我们先证存在常数 $c_0 > 0$, 使

$$||u_i||_p \leqslant c_0 \sqrt{p} ||\nabla u_i||_2,\ \forall p \geqslant 2, \tag{5.1.10}$$

这里 $||\cdot||_p$ 表示 $L^p(M)$ 的范数.

事实上，令 $v \in C_0^1(D)$, 我们有熟知的等式

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_D \nabla v(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \, dy,$$

因此

$$|v(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_D |\nabla v(y)| \cdot \frac{dy}{|x-y|}.$$

把被积项写为 $(|\nabla v|^2 |x-y|^{-q})^{1/p} \cdot |x-y|^{-q/2} \cdot |\nabla v|^{1-2/p}$, 由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} |v(x)| \leqslant & \frac{1}{2\pi} \left(\int_D |\nabla v(y)|^2 |x-y|^{-q} \, dy \right)^{1/p} \\ & \cdot \left(\int_D |x-y|^{-q} \, dy \right)^{1/2} \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dy \right)^{1/2-1/p}, \end{aligned}$$

其中 $q = \frac{2p}{p+2} < 2$. 注意有

$$\begin{aligned} \int_D |x-y|^{-q} \, dy &= \int_{|x-y|<1} |y|^{-q} \, dy \leqslant \int_{|y|<2} |y|^{-q} \, dy \\ &= 2\pi \int_0^2 r^{1-q} \, dr = 2^{1-q} \pi (p+2), \end{aligned}$$

因此有

$$\int_D |\nabla v|^p \, dx \leqslant c_1 (p+2)^{\frac{p}{2}+1} \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{p/2},$$

$$\left(\int_D |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant c_2 \sqrt{p} \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{5.1.11}$$

由于 $C_0^1(D)$ 在 $\mathring{L}_1^2(D)$ 中稠，故 (5.1.11) 对所有 $v \in \mathring{L}_1^2(D)$ 成立. 由于 u_i 在 U_i 中紧支， U_i 微分同胚于 D, 故知 (5.1.10) 成立. 于是

$$\begin{aligned} ||u||_p &\leqslant \sum_{i=1}^k ||u_i||_p \leqslant c_0 \sqrt{p} \sum_{i=1}^k ||\nabla u_i||_2 \\ &\leqslant c_3 \sqrt{p} (||\nabla u||_2 + ||u||_2). \end{aligned}$$

但 $\int_M u \, d\mu = 0$, 故由 Poincaré 不等式 得

$$||u||_p \leqslant c_4 \sqrt{p} ||\nabla u||_2, \ \forall p \geqslant 2.$$

现设 $||\nabla u||_2 \leqslant 1$, 则

$$\int_M \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(\beta|u|^2)^k \, du \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(2\beta c_4^2 k)^k.$$

若 β 足够小, 则右端级数当 $N \to \infty$ 时收敛. 由单调收敛定理可知 $\int_M e^{\beta u^2} \, d\mu \leqslant C$. 证毕.

引理 1.6 存在常数 $C, \eta > 0$, 使得对于 $u \in L_1^2(M)$ 有

$$\int_M e^u \, d\mu \leqslant C \exp\left(\eta ||\nabla u||_2^2 + \frac{1}{V}\int_M u \, d\mu\right). \tag{5.1.12}$$

证明 不妨设 $||\nabla u||_2 \neq 0$, 否则 $u =$ 常数,(5.1.12) 显然成立. 我们有

$$u_0 \leqslant \beta\left(\frac{u_0}{||\nabla u||_2}\right)^2 + ||\nabla u||_2^2/4\beta,$$

其中 $u_0 = u - \frac{1}{V}\int_M u \, d\mu, \beta$ 为 Trüdinger 不等式中的常数. 对上式取指数并在 M 上积分, 即可得 (5.1.12), 其中 $\eta = 1/4\beta$. 证毕.

在 (5.1.12) 中以 pu 代替 u, 即可看出 $e^u \in L^p(M), \forall p \geqslant 1$. 另一方面容易证明形如 $\int_M \widetilde{K} e^u \, d\mu$ 的泛函关于 L_1^2- 弱拓扑是连续的. 事实上, 设 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于 u, 则 u_i 在 $L^p(M)$ 中强收敛于 $u (\forall p \geqslant 1)$, 并且

$$\begin{aligned}\int_M \widetilde{K}(e^{u_i} - e^u) \, d\mu &= \int_M \widetilde{K} \int_0^1 \frac{d}{dt}(e^{u+t(u_i-u)}) \, dt \, d\mu \\ &= \int_0^1 \int_M \widetilde{K} e^{u+t(u_i-u)}(u_i - u) \, d\mu \, dt.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, (5.1.12) 及 $u_i \to u$ 在 $L^p(M)$ 中, 可知上式趋于 0.

情形 III. $\chi(M) > 0$.

在这种情形, M 或是球面 $S^2(\chi(M) = 2)$, 或是实投影平面 $\mathbb{RP}^2(\chi(M) = 1)$. 我们先讨论 (M, g) 是具有标准度量的球面 (S^2, g_0) 的情形, 这时 Gauss 曲率 $K \equiv 1$, 面积为 4π. 方程 (5.0.1) 成为

$$\Delta u - 1 + \widetilde{K} e^{2u} = 0. \tag{5.1.13}$$

条件 (5.1.2) 则为

$$\int_{S^2} \widetilde{K} e^{2u} \, d\mu = 4\pi. \tag{5.1.14}$$

这条件要求 $\widetilde{K}$ 必须在一些地方取正值. 但即使 $\widetilde{K}>0$,(5.1.13) 也可以没有解. Kazdan 和 Warner 首先注意到以下事实:

命题 1.7 令 $\varphi\in C^\infty(S^2)$ 为标准球面上的一个第一特征函数

$$\Delta\varphi+2\varphi=0. \tag{5.1.15}$$

设 $u\in C^\infty(S^2)$ 是 (5.1.13) 的一个解，则

$$\int_{S^2}\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi e^{2u}\,d\mu=0. \tag{5.1.16}$$

证明 第一特征函数 φ 的二阶协变导数满足

$$\varphi_{,ij}=-\varphi g_{ij}. \tag{5.1.17}$$

用 $\nabla u\cdot\nabla\varphi$ 乘以方程 (5.1.13) 再积分可得

$$\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\Delta u\,d\mu-\int_{S^2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,d\mu+\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\widetilde{K}e^{2u}\,d\mu=0, \tag{5.1.18}$$

利用分部积分及 (5.1.17) 有

$$\begin{aligned}\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\Delta u\,d\mu&=-\int_{S^2}\nabla(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\cdot\nabla u\,d\mu\\&=-\frac{1}{2}\int_{S^2}\nabla(|\nabla u|^2)\cdot\nabla\varphi\,d\mu+\int_{S^2}|\nabla u|^2\varphi\,d\mu\\&=\frac{1}{2}\int_{S^2}|\nabla u|^2(\Delta\varphi+2\varphi)\,d\mu=0.\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\int_{S^2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,d\mu&=-\int_{S^2}\varphi\Delta u\,d\mu=\int_{S^2}\varphi(\widetilde{K}e^{2u}-1)\,d\mu\\&=\int_{S^2}\varphi\widetilde{K}e^{2u}\,d\mu.\end{aligned}$$

另一方面，(5.1.18) 的第三项积分等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{S^2}\widetilde{K}\nabla e^{2u}\cdot\Delta\varphi\,d\mu&=\frac{1}{2}\int_{S^2}(\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi)e^{2u}\,d\mu-\frac{1}{2}\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u}\Delta\varphi\,d\mu\\&=\frac{1}{2}\int_{S^2}(\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi)e^{2u}\,d\mu+\int_{S^2}\varphi\widetilde{K}e^{2u}\,d\mu.\end{aligned}$$

综合上列计算即得 (5.1.16). 证毕.

如果取 $\widetilde{K}=1+\varepsilon\varphi$, 其中 ε 为充分小的常数, 则 $\widetilde{K}>0$, 而 (5.1.16) 变为

$$\int_{S^2}|\nabla\varphi|^2e^{2u}\,d\mu=0.$$

这显然是不可能的, 因此对于这样的 $\widetilde{K}$, (5.1.13) 不可解.

注 在标准球面 $S^n(n\geqslant 3)$ 上也有与命题 1.7 相似的结果. 设 φ 是 S^n 上的第一特征函数, 即 $\Delta\varphi+n\varphi=0$. 如果 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 的纯量曲率为 R, 这里 g_0 是 S^n 上的标准度量, 则 Kazdan 和 Warner 证明

$$\int_{S^n}\nabla\varphi\cdot\nabla Ru^{\frac{2n}{n-2}}\,d\mu_0=0 \tag{$*$}$$

S^n 的第一特征函数的梯度向量场 $X=\nabla\varphi$ 是共形向量场, 即 X 产生的单参数变换群中的每个变换都是 S^n 上的共形变换. 利用共形向量场可以导出一类微分方程的解必须满足的恒等式, 最初是由 Pohozaev (Soviet Math. Doklady, 6(1965), 1408-1411) 发现的, 他在 $\mathbb{R}^n$ 上利用 $X=r\dfrac{\partial}{\partial r}$. 上世纪 80 年代末, 作者之一证明了以下的一般性结果 (R. Schoen, Existence of weak solutions with prescribing singular behaviour for a conformally invariant scalar equations).

命题 设 (M,g) 为一具光滑边界 ∂M 的 $n(\geqslant 3)$ 维紧致 Riemann 流形, R 为其纯量曲率. 设 X 是 (M,g) 的一个共形向量场, 则成立

$$\int_M\mathscr{L}_XR\,d\mu=\frac{2n}{n-2}\int_{\partial M}\left((\mathrm{Ric}-\frac{1}{n}Rg\right)(X,\nu)\,d\sigma,$$

其中 Ric 为 Ricci 张量, $\mathscr{L}_X$ 表示 Lie 导数.

在 S^n 上取 $X=\nabla\varphi$, 则 $\mathscr{L}_XR=\nabla\varphi\cdot\nabla R$. 又注意 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 的体积元 $d\mu=u^{\frac{2n}{n-2}}\,d\mu_0$ 及 $\partial S^n=\varnothing$, 容易看出 $(*)$ 式是以上一般性恒等式的特例.

Moser 在 1973 年给出了 (5.1.13) 可解的一个充分条件, 其陈述如下.

定理 1.8 令 (S^2,g_0) 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面. 设 $\widetilde{K}\in C^\infty(S^2)$ 满足 $\widetilde{K}(-x)=\widetilde{K}(x)$, $\forall x\in S^2\subset\mathbb{R}^3$, 且 $\max\limits_{S^2}K>0$, 则方程 (5.1.13) 有解 $u\in C^\infty(S^2)$ 满足 $u(-x)=u(x)$, $\forall x\in S^2$.

这个定理的证明依赖于不等式 (5.1.12) 以及对这个不等式中的常数 η 的精确估计. Moser 证明了

引理 1.9 在标准球面上，不等式 (5.1.12) 中的常数 $\eta = 1/16\pi$. 如果不等式中的函数 u 还满足对称性条件 $u(-x) \equiv u(x)$, 则 η 可取为 $1/32\pi$.

证明请见 Indiana Univ. Math. J., 20(1971), 1077-1092.

现考虑 $L_1^2(S^2)$ 中的子空间

$$\mathscr{M} = \left\{ u \in L_1^2(S^2) \middle| \int_{S^2} u \, d\mu = 0, u(-x) = u(x) \quad \text{a.e. } x \in S^2 \right\}.$$

由引理 1.9 可知，对于 $u \in \mathscr{M}$ 成立

$$\int_{S^2} e^{2u} \, d\mu \leqslant C \exp\left(\frac{1}{8\pi} ||\nabla u||_2^2 \right). \tag{5.1.19}$$

令 $\mathscr{M}_* = \left\{ u \in \mathscr{M} \middle| \int_{S^2} \widetilde{K} e^{2u} \, d\mu > 0 \right\}$, 由于 $\max\limits_{S^2} \widetilde{K} > 0$, $\mathscr{M}_*$ 不是空集. 定义

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} ||\nabla u||_2^2 - 2\pi \log \int_{S^2} \widetilde{K} e^{2u} \, d\mu, \quad \mu \in \mathscr{M}_*, \\ c_* &= \inf\{J(u) | u \in \mathscr{M}_*\}, \end{aligned}$$

注意 (5.1.19) 保证了

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{2} ||\nabla u||_2^2 - 2\pi \left(\frac{1}{8\pi} ||\nabla u||^2 + \log C + \log(\max \widetilde{K}) \right) \\ &= \frac{1}{4} ||\nabla u||_2^2 - c_1. \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

因此 $c_* > -\infty$. 现令 $\{u_i\} \subset \mathscr{M}_*$ 为泛函 J 在 $\mathscr{M}_*$ 中的一个极小化序列，即 $J(u_i) \to c_*$ 当 $i \to \infty$. (5.1.20) 说明 $||\nabla u_i||_2$ 有界，由于 $\int_{S^2} u_i \, d\mu = 0, \{u_i\}$ 在 $L_1^2(S^2)$ 中有界. 故可设某子序列，仍记为 $\{u_i\}$, 在 $L_1^2(S^2)$ 中弱收敛于 u_0. 由情形 II 中的讨论可知，泛函 J 是弱下半连续的，因此 $J(u_0) \leqslant c_*$. 又容易验证，$u_0 \in \mathscr{M}_*$, 按 c_* 之定义有 $J(u_0) \geqslant c_*$, 故 $J(u_0) = c_*$. 由 Lagrange 乘子理论， u_0 满足 Euler-Lagrange 方程（这里要利用 $\widetilde{K}(-x) \equiv \widetilde{K}(x)$）

$$\Delta u_0 + \frac{4\pi \widetilde{K} e^{2u_0}}{\int_{S^2} \widetilde{K} e^{2u_0} \, d\mu} = \lambda,$$

其中 λ 是 Lagrange 乘子. 在 S^2 上积分此方程即得 $4\pi = 4\pi\lambda$, 即 $\lambda = 1$. 再令 $u = u_0 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \widetilde{K} e^{2u_0} \, d\mu \right)$, 则 u 是 (5.1.13) 的一个 L_1^2- 弱解. 由正则性定

理（参见情形 II 中的讨论）可知 u 是 (5.1.13) 的光滑解. 这完成了定理 1.8 的证明.

如果把 S^2 上的点 x 与其对径点 $-x$ 相等同，就得到实投影平面 $\mathbb{RP}^2$. 任何 $\widetilde{K}\in C^\infty(\mathbb{RP}^2)$ 提升到 S^2 上时，均满足 $\widetilde{K}(-x)\equiv\widetilde{K}(x)$. 因此，定理 1.8 说明：在标准度量的 $\mathbb{RP}^2$ 上，一个光滑函数是某个逐点共形于标准度量的度量的 Gauss 曲率 ，必须而且只需此函数在某处取正值. 注意必要性是由 (5.1.14) 决定的. 事实上，这个结果对于非标准度量也成立（参见 T. Aubin, J. Funct. Anal. 32(1979), 148-174).

最后我们指出：在定理 1.8 的证明中，如果不假定对称性 $(u(-x)\equiv u(x))$，$J(u)$ 仍然有有限的下界. 但是可以证明：除非 $\widetilde{K}=$ 常数， $J(u)$ 的下确界是达不到的. 因此在 $\widetilde{K}$ 不具有对称性的情形，问题更加困难，需要使用比较复杂的变分方法在一定条件下获得 $J(u)$ 的非极小的临界点.

5.2 Yamabe 问题与共形不变量 $\lambda(M)$

在本章开始我们已经解释过， Yamabe 问题就是：给定一个维数为 $n\geqslant 3$ 的紧致、无边 Riemann 流形 (M,g), 问是否存在共形度量 $\widetilde{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$, 使 $\widetilde{g}$ 的纯量曲率为常数. 这个问题等价于求解

$$\begin{aligned}\Delta u-\tfrac{n-2}{4(n-1)}Ru+\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}&=0,\\ u>0,\quad u\in C^\infty(M)&,\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

其中 R 是 (M,g) 的纯量曲率， λ 是常数. 记

$$p=\frac{2n}{n-2},\ a=\frac{n-2}{4(n-1)},\ L=-\Delta+aR.\tag{5.2.2}$$

称 L 为 (M,g) 的共形 Laplace 算子 . 方程 (5.2.1) 可写为

$$Lu=\lambda u^{p-1}.$$

Yamabe 注意到， (5.2.1) 是泛函

$$Q_0(\widetilde{g})=\frac{\int_M R_{\widetilde{g}}d\,\mu_{\widetilde{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}}$$

限制在共形等价类 $\mathscr{C}_g$ 上的 Euler-Lagrange 方程. 事实上, $\mathcal{Q}_0$ 可以写作 $\mathcal{Q}_0(\widetilde{g}) = \mathcal{Q}_0(u^{p-2}g) \triangleq a^{-1}\mathcal{Q}(u)$, 其中 $\widetilde{g} = u^{p-2}g \in \mathscr{C}_g$. 但由 (5.0.2) , $\widetilde{g}$ 的纯量曲率 $R_{\widetilde{g}} = a^{-1}u^{1-p}Lu$, 其体积元 $d\mu_{\widetilde{g}} = u^p\,d\mu$, 故

$$\mathcal{Q}(u) \triangleq a\mathcal{Q}_0(\widetilde{g}) = \frac{E(u)}{||u||_p^2},$$

其中

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_M uLu\,d\mu = \int_M (|\nabla u|^2 + aRu^2)\,d\mu, \\ ||u||_p^2 &= \left(\int_M |u|^p\,d\mu\right)^{2/p}. \end{aligned}$$

我们称 $\mathcal{Q}(u)$ 为 (M,g) 的 Yamabe 商 . 若 $u > 0, u \in C^\infty(M)$ 是 $\mathcal{Q}$ 的临界点, 即 $\frac{d}{dt}\mathcal{Q}(u+t\psi)|_{t=0} = 0, \forall\psi \in C^\infty(M)$, 则容易导出 u 满足方程 (5.2.1) , 其中常数 $\lambda = E(u)/||u||_p^p$.

现注意, 由 Hölder 不等式 有

$$\left|\int_M Ru^2\,d\mu\right| \leqslant c||u||_p^2,$$

因此 $\mathcal{Q}(u)$ 下方有界. 定义

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \inf\{a^{-1}\mathcal{Q}_0(\widetilde{g}) | \widetilde{g} \in \mathscr{C}_g\} \\ &= \inf\{\mathcal{Q}(u) | u \in C^\infty(M), u > 0\}. \end{aligned}$$

由上面的分析看出, $\lambda(M)$ 是由共形等价类 $\mathscr{C}_g$ 确定的, 而与基准度量 g 的选取无关, 因此称之为 (M,g) 的共形不变量 . 事实上, 如果另取一基准度量 $\widetilde{g} = \varphi^{p-2}g$, 其中 $\varphi > 0, \varphi \in C^\infty(M)$, 令 $\widetilde{\mathcal{Q}}$ 为关于 $\widetilde{g}$ 的 Yamabe 商 , 通过直接计算即可得出 $\widetilde{\mathcal{Q}}(u) = \mathcal{Q}(\varphi u)$, 因此 $\widetilde{\mathcal{Q}}$ 与 $\mathcal{Q}$ 有相同的下确界. 这一事实在我们以后对 $\lambda(M)$ 进行估计时将多次用到. 另一个将要用到的事实是, $\lambda(M)$ 可以等价地定义为

$$\lambda(M) = \inf\{\mathcal{Q}(u) | u \in L_1^2(M) \setminus \{0\}\}.$$

只要注意到 $||\nabla|u|\,||_2 \leqslant ||\nabla u||_2$ (因此第一个定义中 $u > 0$ 的限制并不使 $\lambda(M)$ 的值变大) 及 $C^\infty(M)$ 在 $L_1^2(M)$ 中稠, 就不难看出两种定义是相等的.

共形不变量 $\lambda(M)$ 的重要性在于有以下结果：

定理 2.1 设 (M,g) 为 n 维紧致无边 Riemann 流形. 如果 $\lambda(M)<\lambda(S^n)$, 则 Yamabe 问题在 (M,g) 上可解. 这里 S^n 表示具标准度量的 n 维球面.

在证明这个定理之前，先考察 $\lambda(S^n)$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上的 Sobolev 不等式中的最佳常数 Λ 的关系. 我们有如下的 Sobolev 不等式

$$\Lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\,dx\right)^{2/p}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx,\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

注意 $\mathbb{R}^n$ 的纯量曲率为零, 因此它的共形 Laplace 算子 就是 $-\Delta=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$. 如记 $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 Yamabe 商，则最佳常数 Λ 可定义为

$$\Lambda=\inf\{\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}(u)|u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}\}.$$

在本章的附录中将证明 Λ 可以被 $\mathbb{R}^n$ 上的一族函数

$$\varphi_{a,b}(x)=(a+b|x|^2)^{(2-n)/2},a>0,b>0 \tag{5.2.3}$$

所达到，其值为

$$\Lambda=\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}(\varphi_{a,b})=n(n-1)\omega_n^{2/n},$$

其中 ω_n 是 S^n 的体积.

现令 $P=(0,\cdots,0,1)$ 为 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的北极. 定义球极投影 $\pi:S^n\setminus\{P\}\to\mathbb{R}^n$ 为 $\pi(\xi^1,\cdots,\xi^n,\zeta)=\left(\frac{\xi^1}{1-\zeta},\cdots,\frac{\xi^n}{1-\zeta}\right)$. 容易验证 π 是共形变换 ，事实上，如记 g_0 为 S^n 上的标准度量， ds^2 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量，则有

$$(\pi^{-1})^*g_0=\frac{4}{(1+|x|^2)^2}\,ds^2\equiv\rho(x)^{p-2}\,ds^2.$$

设 $u\in C^\infty(s^n)$, 令 $\overline{u}=\rho\cdot u\circ\pi^{-1}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则由 $\mathcal{Q}$ 的共形不变性有: $\mathcal{Q}_{S^n}(u)=\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}(\overline{u})$. 另一方面，利用 $\mathbb{R}^n$ 上的截断函数容易证明（参见附录） $\overline{u}$ 可以用 $\overline{u}_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 逼近，使得 $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}(\overline{u}_i)\to\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n}(\overline{u})$. 由此可知： $\lambda(S^n)\geqslant\Lambda$. 但另一方面又有：

引理 2.2 对任何紧致无边 Riemann 流形 (M,g) 均有 $\lambda(M)\leqslant\Lambda$, 因此必有 $\lambda(S^n)=\Lambda$.

引理 2.2 只是对 $\lambda(M)$ 的一个粗略估计，由于我们在第 4 节将对 $\lambda(M)$ 作细致的估计，因此这里暂不给出引理 2.2 的证明.

下面我们开始证明定理 2.1. 首先指出, $\mathcal{Q}(u)$ 中的分母为一 L^p 积分, $p=\frac{2n}{n-2}$ 是 Sobolev 嵌入 $L_1^2(M)\hookrightarrow L^q(M)(1\leqslant q\leqslant p)$ 的临界幂次. 当 $1\leqslant q<p$ 时这个嵌入是紧嵌入, 而当 $q=p$ 时这个嵌入只是连续的, 而不是紧的. 这使得我们无法直接对 $\mathcal{Q}(u)$ 进行极小化而获得其极小临界点. Yamabe 的办法是, 先把幂次 p 减小为 $s<p$, 这时可以用极小化过程获得逼近解 u_s, 然后考察 u_s 在 $s\to p$ 时的收敛性 (Yamabe 在这后一步中犯了一个错误, Trüdinger 指出了这个错误). 确切地说, 对于 $s\in(2,p]$ 定义泛函

$$\mathcal{Q}_s(u)=\frac{E(u)}{||u||_s^2},$$

以及

$$\lambda_s=\inf\left\{\mathcal{Q}_s(u)|u\in L_1^2(M)\setminus\{0\}\right\}.$$

利用 Hölder 不等式 容易得到 λ_s 的一致下界. 又注意, λ_s 的符号是与共形 Laplace 算子 L 的第一特征值 μ_1 的符号一致的. 事实上, 当 $\mu_1\geqslant 0$ 时, $E(u)\geqslant\mu_1||u||_2^2\geqslant 0,\forall u\in L_1^2(M)$, 因此 $\lambda_s\geqslant 0$. 而当 $\mu_1<0$ 时, 取 L 的第一特征函数 φ_1, 则 $E(\varphi_1)=\mu_1||\varphi_1||_2^2<0$, 因此 $\lambda_s<0$.

引理 2.3 $\overline{\lim\limits_{s\to p}}\lambda_s\leqslant\lambda(M)$, 若 $\lambda_s\geqslant 0$, 则 $\lambda_s\to\lambda(M)$ 当 $s\to p$.

证明 注意 $\mathcal{Q}_p=\mathcal{Q}$, 所以 $\lambda_p=\lambda(M)$. 现取 $u_i\in L_1^2(M)\setminus\{0\}$ 使 $\mathcal{Q}_p(u_i)\to\lambda(M)$. 固定 u_i, 则有 $\lambda_s\leqslant\mathcal{Q}_s(u_i)\to\mathcal{Q}_p(u_i)$ 当 $s\to p$. 由此可知 $\overline{\lim}_{s\to p}\lambda_s\leqslant\lambda(M)$. 在 $\lambda_s\geqslant 0$ 时, 如上所述 $\mathcal{Q}_s(u)\geqslant 0,\forall u$, 故由 Hölder 不等式

$$\mathcal{Q}_p(u)=\mathcal{Q}_s(u)\cdot\frac{||u||_s^2}{||u||_p^2}\leqslant\mathcal{Q}_s(u)\cdot V^{2(1-\frac{s}{p})}.$$

因此 $\lambda_p=\lambda(M)\leqslant\lambda_s V^{2(1-\frac{s}{p})}$, 说明 $\underline{\lim}_{s\to p}\lambda_s\geqslant\lambda(M)$. 引理因而得证.

引理 2.4 设 $2<s<p$, 则存在 $u_s\in C^\infty(M),u_s>0,||u_s||_s=1$, 使得 $\mathcal{Q}_s(u_s)=\lambda_s$, 且满足方程

$$Lu_s=\lambda_s u_s^{s-1}. \tag{5.2.4}$$

证明 取一极小化序列 $\{u_i\}\subset L_1^2(M)\setminus\{0\}$, 使 $\mathcal{Q}_s(u_i)\to\lambda_s$. 由 $\mathcal{Q}_s(|u|)\leqslant\mathcal{Q}_s(u)$ 我们可设 $u_i\geqslant 0$. 又由 $\mathcal{Q}_s(tu)=\mathcal{Q}_s(u),\forall$ 正数 t, 我们可取 $||u_i||_s=1$. 于是 $\mathcal{Q}_s(u_i)=E(u_i)=||\nabla u_i||_2^2+a\int_M Ru_i^2\,d\mu\to\lambda_s$. 因此 $||\nabla u_i||_2^2\leqslant c_1+c_2||u_i||_2^2$. 但又有 $||u_i||_2^2\leqslant c||u_i||_s^2$ (Hölder 不等式), 可知 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中有界. 因此

我们可以假定 $\{u_i\}$（或其子列）在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于某个 u_s. 作为弱极限, $||\nabla u_s||_2 \leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty}||\nabla u_i||_2$. 由于嵌入 $L_1^2 \hookrightarrow L^r$ 当 $1 \leqslant r < p$ 时是紧的, 因此 $\int Ru_i^2\,d\mu \to \int Ru_s^2\,d\mu, ||u_i||_s \to ||u_s||_s = 1$. 所以, $\mathcal{Q}_s(u_s) \leqslant \lim_{i\to\infty}\mathcal{Q}_s(u_i) = \lambda_s$. 由 λ_s 的定义必有 $\mathcal{Q}_s(u_s) = \lambda_s$. 于是, 作为 $\mathcal{Q}_s$ 的临界点, u_s 是 Euler-Lagrange 方程 (5.2.4) 的 L_1^2- 弱解. u_s 的正则性可以用所谓靴带法（Boot-strape）得到. 由于 $Lu_s = \lambda_s u_s^{s-1} \in L^{q_1}, q_1 = \dfrac{p}{s-1}$, 由椭圆算子的 L^p 理论可知 $u_s \in L_2^{q_1}$. 而由 Sobolev 嵌入定理推出 $u_s \in L^{p_1}, p_1 = \dfrac{np}{ns-n-2p} > p$. 因此又有 $Lu_s \in L^{q_2}, q_2 > q_1$. 重复以上步骤可证 $u_s \in L_2^q, \forall q > 1$. 这样, 在 $q > n$ 时就有 $u_s \in C^{1,\alpha}$. 利用 Schauder 理论又可把正则性提高到 $u_s \in C^{2,\alpha}$（注意方程右端 $\lambda_s u_s^{s-1}$ 是 Hölder 连续的）. 最后注意, 由于 $u_i \geqslant 0, u_s \geqslant 0$, 从方程 (5.2.4) 可知存在 $c \geqslant 0$ 使 $\Delta u_s - cu_s \leqslant 0$, 因而由极大值原理推出: 若存在 $x_0 \in M$ 使 $u_s(x_0) = 0$, 则 $u_s \equiv 0$. 这不可能, 所以 $u_s > 0$. 由于当 $t > 0$ 时函数 t^{s-1} 光滑, 因此可以继续把 u_s 的正则性提到 $u_s \in C^\infty(M)$. 证毕.

现回到定理 2.1 的证明. 不难看出, 如果 $u_s (s < p)$ 有一致的上界: $u_s \leqslant c$, 则用引理 2.4 证明中的推理可以得到 u_s 在 $C^{k,\alpha}(M)$ 中的一致界, k 为任意正整数, $0 < \alpha < 1$. 因而存在子列 $\{u_{s_i}\}, s_i \to p$, 在 $C^k(M)$ 中收敛于 $u \in C^\infty(M)$, 而 u 满足

$$Lu = \lambda u^{p-1}, \quad \mathcal{Q}(u) = \lambda, \quad u > 0,$$

其中 $\lambda = \lim \lambda_{s_i}$. 在 $\lambda(M) \geqslant 0$ 的情形, 引理 2.3 说明 $\lambda = \lambda(M)$, 而在 $\lambda(M) < 0$ 的情形, $\lambda \leqslant \lambda(M)$, 从而 $\mathcal{Q}(u) \leqslant \lambda(M)$. 但由 $\lambda(M)$ 之定义, 必有 $\mathcal{Q}(u) = \lambda(M)$, u 即为所求的 $\mathcal{Q}$ 的极小解.

因此, 为证定理 2.1 只需证 u_s 有界. 假定不存在这样的界, 则存在 $s_k \to p, u_k = u_{s_k}, z_k \in M$, 使得 $u_k(z_k) = \max u_k \triangleq m_k \to +\infty$. 由于 M 紧致, 可设 $z_k \to z_0 \in M$. 取 z_0 处的一个正规坐标系, 在此坐标系中

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2), \quad \det g_{ij}(x) = 1 + O(|x|^2).$$

设 z_k 的坐标为 x_k, 则 $x_k \to 0$ 当 $k \to \infty. u_k$ 满足的方程可写为

$$\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\partial_i(\sqrt{g(x)}g^{ij}(x)\partial_i u_k) - aR(x)u_k + \lambda_k u_k^{s_k-1} = 0,$$

其中 $\lambda_k = \lambda_{s_k}$. 设此方程在 $|x| < 1$ 上定义. 现定义

$$v_k = m_k^{-1} u_k(\delta_k x + x_k),$$

其中 $\delta_k = m_k^{1-s_k/2} \to 0$, 则 v_k 在半径为 $\rho_k = (1-|x_k|)/\delta_k \to \infty$ 的球内定义, 并满足方程

$$\frac{1}{b_k}\partial_j(b_k a_k^{ij}\partial_i v_k) - c_k v_k + \lambda_k v_k^{s_k-1} = 0, \tag{5.2.5}$$

其中

$$\begin{aligned} a_k^{ij}(x) &= g^{ij}(\delta_k x + x_k) \to \delta_{ij}, \\ b_k(x) &= \sqrt{\det g(\delta_k x + x_k)} \to 1, \\ c_k(x) &= a m_k^{1-s_k} R(\delta_k x + x_k) \to 0. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

这些收敛在 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界闭域上是 C^1 一致收敛. 现注意, $0 \leqslant v_k \leqslant v_k(0) = 1$. 因此, 对 (5.2.5) 的解 v_k 进行 L^p 和 Schauder 内估计可得以下结论: 对任何 $R > 0$, 存在 $C(R) > 0$ 和 $k(R) > 0$, 使得

$$||v_k||_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_k)} \leqslant C(R), \quad \forall k \geqslant k(R).$$

取一列 $R_m \to \infty$, 用抽对角线子序列的办法可以得到子列 $\{v_m\}$, 使 $v_m \to v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 这收敛在每个 $\overline{B}_{R_m}$ 上是 C^2- 收敛. 于是由 (5.2.5) 和 (5.2.6) 可知 v 是方程

$$\Delta v + \lambda v^{p-1} = 0 \tag{5.2.7}$$

的非负解, $v(0) = 1$. 由极大值原理, $v > 0$. 由引理 2.3, 当 $\lambda(M) \geqslant 0$ 时, (5.2.7) 中的 $\lambda = \lambda(M)$, 否则 $\lambda \leqslant 0$.

现注意, 通过积分变换有

$$\begin{aligned} \int_{|x|<\frac{1}{2}\delta_k^{-1}} v_k^{s_k} b_k \, dx &= \int_{B_{\frac{1}{2}}(x_k)} u_k^{s_k}\sqrt{g}\, dx \cdot \delta_k^{\alpha_k} \\ &\leqslant ||u_k||_{s_k}^{s_k} \cdot \delta_k^{\alpha_k} = \delta_k^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_k = \dfrac{2s_k}{s_k-2} - n > 0$, 因而 $\delta_k^{\alpha_k} < 1$. 由于在任何有界集上 $v_m^{s_m} b_m$ 一致收敛于 v^p, 故由 Fatou 引理推出

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^p \, dx \leqslant 1. \tag{5.2.8}$$

类似可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \, dx < \infty.$$

令 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一截断函数， $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, 在 $B_1(0)$ 中 $\eta = 1$, 在 $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ 上 $\eta = 0$. 定义 $v_R(x) = \eta\left(\dfrac{x}{R}\right) v(x)$. 容易验证

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(v - v_R)|^2 + |v - v_R|^p) \, dx \to 0, \quad 当 R \to \infty. \tag{5.2.9}$$

用 v_R 乘以 (5.2.7) 并积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla v_R \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} v^{p-1} v_R \, dx.$$

由于 (5.2.9) 我们可以在上式中令 $R \to \infty$ 而得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} v^p \, dx. \tag{5.2.10}$$

如 $\lambda \leqslant 0$, (5.2.10) 说明 $v =$ 常数，而 (5.2.8) 说明这个常数为 0, 这显然与 $v > 0$ 矛盾. 因此 $\lambda > 0$, 此时 $\lambda = \lambda(M)$. 利用 (5.2.8), (5.2.10) 以及 Sobolev 不等式我们得出

$$\Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^p \, dx \right)^{2/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \, dx = \lambda(M) \int_{\mathbb{R}^n} v^p \, dx,$$

从而

$$\Lambda \leqslant \lambda(M) \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^p \, dx \right)^{2/n} \leqslant \lambda(M).$$

这与 $\lambda(M) < \lambda(S^n) = \Lambda$ 的假定相矛盾. 因此，在这一假定下 u_s 必有一致上界. 这完成了定理 2.1 的证明.

定理 2.1 把 Yamabe 问题的求解化为对 $\lambda(M)$ 的估计. 事实上，只要找到某个函数 φ, 使得 $Q(\varphi) < \lambda(S^n)$, 就有 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, 因而 Yamabe 问题可解. 利用这一点， Aubin（ 1976 ）证明了：如果 $n \geqslant 6$, 而 (M, g) 不是局部共形平坦的（即 Weyl 张量 $W \neq 0$ ），则 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. Schoen(1984) 则解决了所有其余的情形，他证明：如果 (M, g) 不共形等价于标准的 S^n, 则 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. 由于在 (M, g) 共形等价于 S^n 时问题显然有解（因为这时有共形微分同胚 $f : M \to S^n$, 使 $f^* g_0 = \rho g, g_0$ 为 S^n 的标准度量， $\rho \in C^\infty(M)$, 显然 ρg 是常曲率度量），Yamabe 问题获得了完全解决.

Aubin 的证明是局部性的. 假定 $n \geqslant 0$, 且存在 $P \in M$ 使 $|W(P)| \neq 0$, 这里 W 是共形不变的 Weyl 张量, 则可以构造一个在 P 的任意小邻域内紧支的试验函数 φ, 使 $\mathcal{Q}(\varphi) < \lambda(S^n)$. Schoen 的证明则利用了流形的整体几何性质. 他注意到, 共形 Laplace 算子 L 的 Green 函数 与 $\mathbb{R}^n$ 上达到 Sobolev 最佳常数的函数 (5.2.3) 可以用来构造所需的试验函数 φ, 而在 $n = 3$ 或 (M, g) 在 P 点附近局部共形平坦 的情形, Green 函数的渐近公式中的常数 A 若大于 0 即可保证 $\mathcal{Q}(\varphi) < \lambda(S^n)$. 利用广义正质量定理 可以证明, 当 (M, g) 不共形等价于 S^n 时, 常数 $A > 0$. 在 $n = 4, 5$ 时, Schoen 利用对度量作精细的扰动的办法, 也找到了适当的试验函数.

我们下面将要给出的证明, 是基于 J. Lee 和 T. Parker 最近对上述证明的改进. 他们的主要改进是找到了所谓共形正规坐标系, 并给出了 Green 函数在这种坐标系下的渐近展开 . 这样, Aubin 和 Schoen 的证明可以统一起来, 而对 $n = 4, 5$ 也不需要作特别的处理.

5.3 共形正规坐标与 Green 函数的渐近展开

我们首先证明 Lee-Parker 关于共形正规坐标系的一个结果, 然后给出在这种坐标系下共形 Laplace 算子的 Green 函数的渐近展开 公式. 以下我们称 M 为一 Riemann 流形, 总是假定在 M 上给定了某个基准度量 g_1, 称 g 为 M 上的一个共形度量则意味着 $g \in \mathscr{C}_{g_1}$.

定理 3.1 设 M 为一 Riemann 流形, $P \in M$. 对于任何 $N \geqslant 2$, 存在 M 上的一个共形度量 g, 使得在 P 点处的 g 的正规坐标系中有

$$\det(g_{ij}) = 1 + O(r^N),$$

其中 $r = |x|$, 在 $N \geqslant 5$ 时还有

$$R = O(r^2) \text{ 和 } \Delta R(P) = -\frac{1}{6}|W(P)|^2,$$

这里 R 和 W 分别为 g 的纯量曲率和 Weyl 张量 .

在证明这个定理之前需先证明一些引理.

引理 3.2 设 $P \in M, T$ 是切空间 $T_P M$ 上的一个 $(k+2)$ 阶对称张量, $k \geqslant 0$. 存在唯一的一个 $(k+2)$ 次齐次多项式 f, 使得在 g 的正规坐标系中度量

$\widetilde{g}=e^{2f}g$ 满足

$$\mathrm{Sym}(\widetilde{\nabla}^k\widetilde{R}_{ij})(P)=T, \tag{5.3.1}$$

其中 $\mathrm{Sym}(\cdot)$ 表示张量的对称化，$\widetilde{\nabla}$ 和 $\widetilde{R}_{ij}$ 分别是 $\widetilde{g}$ 的协变微分算子和 Ricci 曲率．

证明 令 $\{x^i\}$ 为 g 在 P 点处的正规坐标系，$r=|x|$. 用 $\mathscr{P}_m$ 表示 x 的 m 次齐次多项式的空间．令 $F(x)=R_{ij}(x)x^ix^j$, 则由 Taylor 公式有

$$F(x)=\sum_{m=2}^{k+2}F^{(m)}(x)+O(r^{k+3}),$$

其中

$$F^{(m)}(x)=\frac{1}{(m-2)!}\sum_{i,j,|K|=m-2}\partial_K R_{ij}(P)x^ix^jx^K\in\mathscr{P}_m.$$

这里 $K=(k_1,\cdots,k_{m-2}),x^K=x^{k_1}\cdots x^{k_{m-2}},|K|=\sum k_l$. 注意，Ricci 曲率的协变导数 $R_{i,j,K}(P)=\partial_K R_{ij}(P)+S_{ijK}$, 其中 S_{ijK} 是由 R_{ij} 的阶数小于 $|K|$ 的导数所构成的多项式．因此，如 $f\in\mathscr{P}_{k+2},\widetilde{g}=e^{2f}g$, 则对 $|K|=k$ 有 $\widetilde{S}_{ijK}=S_{ijK}$. 又注意，(5.3.1) 等价于

$$\begin{aligned}0&=\sum_{|K|=k}(\widetilde{R}_{ij,K}(P)-T_{ijK})x^ix^jx^K\\&=k!\widetilde{F}^{(k+2)}(x)+\sum_{|K|=k}(S_{ijK}-T_{ijK})x^ix^jx^K.\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

由关于齐次多项式的 Euler 公式有：$x^ix^j\partial_i\partial_jf=(x^i\partial_i)^2f-x^i\partial_if=(k+2)(k+1)f$. 又有 $\Delta f=\Delta_0f+O(r^{k+1})$, 其中 Δ_0 为欧氏 Laplace 算子．于是由 $\widetilde{R}_{ij}$ 与 R_{ij} 的关系（参见本章开始部分）可以导出

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{(k+2)}(x)&=F^{(k+2)}(x)+x^ix^j[(2-n)\partial_i\partial_jf-(\Delta_0f)\delta_{ij}]\\&=F^{(k+2)}(x)-(n-2)(k+2)(k+1)f-r^2\Delta_0f.\end{aligned}$$

下面的引理说明，算子 $r^2\Delta_0+(n-2)(k+2)(k+1)$ 在 $\mathscr{P}_{k+2}$ 上可逆，因此存在惟一的 $f\in\mathscr{P}_{k+2}$ 使 (5.3.2) 成立．证毕

引理 3.3 $r^2\Delta_0$ 在 $\mathscr{P}_m$ 上的特征值为

$$\{\lambda_j=2j(n-2+2m-2j):j=0,\cdots,[m/2]\}.$$

对应于 λ_j 的特征函数是形如 $r^{2j}\psi$ 的函数，其中 $\psi \in \mathscr{P}_{m-2j}$ 是调和多项式.

证明 对于 $m=0$ 或 1 引理显然成立. 现设 $m \geqslant 2, f \in \mathscr{P}_m$ 满足 $r^2\Delta_0 f = \lambda f$. 由 Euler 公式，$\Delta_0 f \in \mathscr{P}_{m-2}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\lambda\Delta_0 f &= \Delta_0(r^2\Delta_0 f) = \Delta_0(r^2)\Delta_0 f + 4x^i\partial_i\Delta_0 f + r^2\Delta_0^2 f \\
&= 2n\Delta_0 f + 4(m-2)\Delta_0 f + r^2\Delta_0^2 f.
\end{aligned}
$$

因此，$r^2\Delta_0(\Delta_0 f) = (\lambda - 2n - 4m + 8)\Delta_0 f$. 这说明，或者 $\Delta_0 f = 0$, 因而 $\lambda = 0$ 及 f 为调和，或者 $(\lambda - 2n - 4m + 8)$ 是 $r^2\Delta_0$ 在 $\mathscr{P}_{m-2}$ 上的特征值，对应的特征函数为 $\Delta_0 f$. 在后一种情形 f 可表示为 $f = \lambda^{-1}r^2\Delta_0 f$. 由此不难用归纳法完成证明.

引理 3.4 在 g 的正规坐标系中，$\det(g_{ij})$ 有如下的展开式：

$$
\begin{aligned}
\det(g_{ij}) = 1 &- \frac{1}{3}R_{ij}x^ix^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^ix^jx^k \\
&- \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm}\right. \\
&\left. - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\right)x^ix^jx^kx^l + O(r^5),
\end{aligned}
$$

其中系数中的曲率均取值于 P 点.

证明 令 $\{x^i\}$ 为 g 在 P 的一个邻域 U 上的正规坐标，通过这些坐标把 U 和 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集相等同，P 与坐标原点相等同. 先回忆 Jacobi 场的定义. 固定 $\tau, \xi \in \mathbb{R}^n$, 考虑映射 $\gamma : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, 定义为 $\gamma_s(t) = t(\tau + s\xi)$, 这决定了一个单参数族的从原点出发的测地线. 令 $T = \gamma_s'(t)$, 变分向量场 $X(\gamma_s(t)) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = t\xi$ 称为 Jacobi 场. 由于对每个 s, γ_s 满足测地线方程 $\Delta_T T = 0$, 又由于 $0 = \gamma_*\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = [T, X] = \nabla_T X - \nabla_X T$, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_X\nabla_T T = \nabla_T\nabla_X T + \nabla_{[X,T]}T - R(T,X)T \\
&= \nabla_T\nabla_T X - R(T,X)T.
\end{aligned}
$$

因此 X 满足 Jacobi 方程 $\nabla_T^2 X = R_T(X)$, 这里 R_T 表示曲率导出的线性映射 $R(T,\cdot)T$.

$f(t) = |X(\gamma_0(t))|^2$ 的 Taylor 级数，可以通过用 Δ_T 反复对之微分而求出.

利用 Jacobi 方程, $X(0)=0$ 以及 $\nabla_T X(0)=\xi$, 算出最初几项为:

$$\begin{aligned}\nabla_T f(0) &= 0, \quad \nabla_T^2 f(0)=2\langle\xi, \quad \xi\rangle(0), \nabla_T^3 f(0)=0,\\ \nabla_T^4 f(0) &= 8 \quad \langle R_\tau\xi,\xi\rangle(0), \nabla_T^5 f(0)=20\langle(\nabla_\tau R_\tau)\xi,\xi\rangle(0),\\ \nabla_T^6 f(0) &= 36 \quad \langle(\nabla_\tau^2 R_\tau)\xi,\xi\rangle(0)+32\langle R_\tau\xi,R_\tau\xi\rangle(0).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\langle\xi,\xi\rangle(t\tau) &= t^{-2}|X(\gamma_0(t))|^2\\ &= \langle\xi,\xi\rangle+\frac{t^2}{3}\langle R_\tau\xi,\xi\rangle+\frac{t^3}{6}\langle(\nabla_\tau R_\tau)\xi,\xi\rangle\\ &\quad+\frac{t^4}{20}\langle(\nabla_\tau^2 R_\tau)\xi,\xi\rangle+\frac{2t^4}{45}\langle R_\tau\xi,R_\tau\xi\rangle+O(t^5),\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

其中右端的内积均在原点取值. 令 $t\tau=x, \xi=\frac{\partial}{\partial x^i}\pm\frac{\partial}{\partial x^j}$, 则由 (5.3.3) 可得

$$\begin{aligned}g_{pq}(x) &= \delta_{pq}+\frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j+\frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k\\ &\quad+\left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl}+\frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)x^ix^jx^kx^l+O(r^5),\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

其中曲率项均取值于原点. 令 $(g_{pq})=\exp(A_{pq})$, 则

$$\begin{aligned}A_{pq}(x) &= \frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j+\frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k\\ &\quad+\left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl}+\frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)x^ix^jx^kx^l+O(r^5).\end{aligned}$$

由此可知, $\det(g_{pq})=\exp(\mathrm{tr}A_{pq})$ 具有引理给出的展开式. 证毕.

定理 3.1 的证明 归纳地假定 g 满足 $\det(g_{ij})=1+O(r^N), N\geqslant 2$. 容易看出, 在展开式 (5.3.3) 中每一项均取如下形式:

$$c_kt^k[\langle(\nabla_\tau^{k-2}R_\tau)\xi,\xi\rangle+B_k(\xi,\xi)],$$

其中 c_k 为常数, B 是由 R_τ 的阶数小于 $k-2$ 的导数所构成的双线性型.

因此 $\det(g_{ij})$ 的展开式可写为:

$$\det(g_{ij})=1+\sum_{|K|=N-2}c_N(R_{ij,K}-T_{ijK})x^ix^jx^K+O(r^{N+1}),\tag{5.3.5}$$

/

其中 T_{ijK} 为由曲率的小于 $N-2$ 阶的导数构成的 T_pM 上的一个对称张量 T 的分量.

由引理 3.2，可取 $f \in \mathscr{P}_N, \widetilde{g} = e^{2f}g$, 使得 $\mathrm{Sym}(\widetilde{\nabla}^{N-2}\widetilde{R}_{ij}) = T$. 注意 $\det(\widetilde{g}_{ij})$ 也满足 (5.3.5)，其中 R_{ij} 与 T 换为 $\widetilde{R}_{ij}$ 与 $\widetilde{T}$. 但在 $f \in \mathscr{P}_N$ 的情形 $\widetilde{T} = T$, 故由 $\mathrm{Sym}(\widetilde{\nabla}^{N-2}\widetilde{R}_{ij}) = \widetilde{T}$ 推出 $\det(\widetilde{g}_{ij}) = 1 + O(r^{N+1})$. 这完成了 $\det(g_{ij})$ 的渐近展开 的归纳证明.

现设 $N \geqslant 5$, 则由 $\det(g_{ij}) = 1 + O(r^5)$ 知引理 3.4 所给出的展开式中的系数为零，即在 P 点处有

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad R_{ij} = 0,\\&\text{(b)}\quad R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0,\\&\text{(c)}\quad \mathrm{Sym}\left(R_{ij,kl} + \tfrac{2}{9}R_{pijm}R_{pklm}\right) = 0.\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

由 (5.3.6)a 知 $R_{ijkl} = W_{ijkl}$ 以及

$$R_{ij,kl} - R_{ij,lk} = R^m_{ikl}R_{mj} + R^m_{jkl}R_{im} = 0,$$

因此由 (5.3.6)c 推出

$$\begin{aligned}&(R_{ij,kl} + R_{kl,ij} + 2R_{ik,jl} + 2R_{jl,ik})x^ix^j\\&+\frac{2}{9}(W_{pijm}W_{pklm} + W_{pikm}W_{pjlm}\\&+W_{pkim}W_{pjlm} + W_{pjkm}W_{plim} + W_{pkjm}W_{plim}\\&+W_{plkm}W_{pjim})x^ix^j = 0.\end{aligned}$$

现缩并指标 k, l, 注意由 Weyl 张量 的对称性有

$$W_{pikm}W_{pkjm} = \frac{1}{2}W_{pikm}(W_{pkim} - W_{pmjk}) = \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm},$$

并利用 Bianchi 恒等式 $R_{,j} = 2R^i_{j,i}$, 即得出

$$\left(3R_{,ij} + R_{ij,kk} + \frac{2}{3}W_{ipkm}W_{jpkm}\right)x^ix^j = 0.\tag{5.3.7}$$

再缩并 i, j, 得到 $\Delta R = R_{,ii} = -\frac{1}{6}|W|^2$.

最后，由 (5.3.6)a, $R(P) = R_{ii}(P) = 0$. 由 (5.3.6)b 有 $R_{,j}(P) = -2R_{ij,i}$, 与 Bianchi 恒等式相加即得 $2R_{,j}(P) = 0$. 定理 3.1 证毕.

我们称定理 3.1 给出的共形度量及其正规坐标系为共形坐标系，并且将总假定 $\det(g_{ij})=1+O(r^N)$ 中的 N 充分大. 下面讨论在 $\lambda(M)>0$ 的情形下，$L=-\Delta+R$ 的 Green 函数在共形正规坐标系 下的渐近展开 . 由熟知的结果，在 $R>0$ 的情形，存在惟一的 Green 函数 $G_P\in C^\infty(M\setminus\{P\})$ 使得

$$LG_P=\delta_P,\quad G_P>0,$$

其中 δ_P 表示 P 点处的 Dirac 测度，并且在 P 点处的正规坐标系中有：

$$G_P(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}r^{2-n}(1+o(1)).$$

事实上，在 $\lambda(M)>0$ 的条件下， $R>0$ 的限制可以去掉. 这是因为，由第 2 节的结果，对于 $2<s<p$, 存在 $u_s>0$ 满足 $Lu_s=\lambda_s u_s^{s-1}$, 其中 $\lambda_s>0$. 因此度量 $g'=u_s^{p-2}g$ 的纯量曲率 $R'=a^{-1}u_s^{1-p}Lu_s=a^{-1}\lambda_s u_s^{s-p}>0$, 所以 g' 的共形 Laplace 算子 L' 有 Green 函数 G'_P. 但直接计算可得

$$L(u_sv)=u_s^{p-1}L'v,\ \forall v\in C^2(M).$$

由此容易验证 $G_P\triangleq u_s(P)u_sG'_P$ 是 L 的 Green 函数.

以下为了计算方便，令 $G(x)=(n-2)\omega_{n-1}G_P(x), x\in M\setminus\{P\}$, 因此 $LG=(n-2)\omega_{n-1}\delta_P$, 以及 $G(x)=r^{2-n}(1+o(1))$.

定理 3.5 在共形正规坐标系下， G 有如下的渐近展开式：

(a) 在 $n=3,4,5$ 或 M 在 P 的一个邻域内共形平坦的情形，

$$G=r^{2-n}+A+\alpha(x),$$

其中 A 为常数， $\alpha=O(r)$, 除 $n=4$ 之外均有 $\alpha\in C^{2,\mu}$, 而在 $n=4$ 时，$\alpha=P_2(x)\log r+\alpha_0$, 其中 $P_2(x)$ 为 2 次齐次多项式， $\alpha_0\in C^{2,\mu}$;

(b) 在 $n=6$ 的情形，

$$G=r^{2-n}-\frac{a}{288}|W(P)|^2\log r+\alpha(x),$$

其中 $\alpha=P(x)\log r+\alpha_0, P(x)$ 为多项式， $P(0)=0,\alpha_0\in C^{2,\mu}$;

(c) 在 $n\geqslant 7$ 的情形，

$$G=r^{2-n}\Big[1+\frac{a}{12(n-4)}\Big(\frac{r^4}{12(n-6)}|W(P)|^2 -R_{,ij}(P)x^ix^jr^2\Big)\Big]+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x) = (P(x)\log r + \alpha_0)r^{2-n}, P(x)$ 为多项式， $\alpha_0 \in C^{2,\mu}$ ；

证明 我们可写 $G = r^{2-n}(1+\psi)$, 其中 $\psi = O(1)$. 注意，若函数 f 只依赖于 r, 则在正规坐标系下有

$$\Delta f = \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{\det g}}\partial_r(r^{n-1}\sqrt{\det g}\partial_r f).$$

事实上, 在极坐标 (r,ξ) 下, 其中 $\xi \in S^{n-1}, g = dr^2 + h_{ij}(r,\xi)\,d\xi^i\,d\xi^j$, 且 $\det(h_{ij}) = r^{n-1}\sqrt{\det g}$. 由于 $g^{rr} = 1, f$ 不依赖于 ξ, 故有以上表达式. 利用 $\det g = 1 + O(r^N)$, 容易算出 $\Delta r^{2-n} = \Delta_0 r^{2-n} + \theta$, 其中 Δ_0 为欧氏度量下的 Laplace 算子, $\theta \in \mathscr{C}_{N'}$. 这里及以下我们用 $\mathscr{C}_k$ 表示直到 k 阶导数均在原点为零的 C^∞ 函数的集合. 注意 N' 可以充分大，只要 N 充分大. 由于 $\Delta_0 r^{2-n} = -(n-2)\omega_{n-1}\delta_P$, 所以 $\Delta r^{2-n} = -(n-2)\omega_{n-1}\delta_P + \theta$. 于是方程 $LG = (n-2)\omega_{n-1}\delta_P$ 就化为

$$L(r^{2-n}\psi) + aRr^{2-n} = \theta. \tag{5.3.8}$$

令 $L_0 = -r^2\Delta_0 + 2(n-2)r\partial_r, K = r^2(\Delta - \Delta_0) + 2(n-2)(r\partial_r - g^{ij}x_i\partial_j)$, 则 (5.3.8) 等价于

$$L_0\psi = K\psi + aRr^2(1+\psi) + \theta. \tag{5.3.9}$$

为了求出 G 的渐近式，我们采取以下办法：先找一个 $\overline{\psi} \in C^\infty(B \setminus \{0\})$, 满足 $\overline{\psi} = o(1)$ 以及

$$L_0\overline{\psi} - K\overline{\psi} - aRr^2(1+\overline{\psi}) \in \mathscr{C}_{n-1} \oplus \mathscr{C}_{n+1}\cdot\log r, \tag{5.3.10}$$

这里 $\mathscr{C}_{n+1}\cdot\log r = \{f(x)\log r | f \in \mathscr{C}_{n+1}\}$. 容易验证 (5.3.10) 等价于

$$L(r^{2-n}\overline{\psi}) + aRr^{2-n} \in \mathscr{C}_1 \oplus \mathscr{C}_1 \cdot \log r.$$

因此，如令 $\psi - \overline{\psi} = \varphi$, 则由上式及 (5.3.8) 推出

$$L(r^{2-n}\varphi) \in C^\mu(B),$$

由此可以断定 $r^{2-n}\varphi \in C^{2,\mu}$. 事实上，令 v 为 Dirichlet 问题

$$Lv = L(r^{2-n}\varphi) \in C^\mu, \quad v|\partial B = r^{2-n}\varphi$$

的解，由椭圆正则性定理 $v \in C^{2,\mu}$. 而 $W = r^{2-n}\varphi - v$ 满足 $LW = 0, W|\partial B = 0$. 注意由于 $\varphi = o(1), W = o(r^{2-n})$, 因此对任何 $\varepsilon > 0$ 有 $\varepsilon G > W$ 在 $r = 1$ 和 r 充分小的地方，又注意在 $B\backslash\{0\}$ 上 $LG = 0$, 故由极大值原理 $\varepsilon G > W$ 在 $B\backslash\{0\}$ 上成立. 令 $\varepsilon \to 0$, 得 $W \leqslant 0$. 同理可证 $W \geqslant 0$, 从而 $W = 0$, 即 $r^{2-n}\varphi = v \in C^{2,\mu}$. 这样就有 $G = r^{2-n}(1 + \overline{\psi}) + v$, 其中 $v \in C^{2,\mu}$.

问题现归结为求适当的 $\overline{\psi}$, 使 (5.3.10) 成立. 先讨论 n 是奇数的情形. 设 $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_n$, 其中 $\psi_k \in \mathscr{C}_k$. 取 $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$. 归纳地假定已经取到 $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_{k-1}$, 使

$$L_0\overline{\psi} - K\psi - aRr^2(1 + \overline{\psi}) \in \mathscr{C}_k. \tag{5.3.11}$$

由于 $R = O(r^2), aRr^2 \in \mathscr{C}_4$, 因此在 $k \leqslant 4$ 时取 $\overline{\psi} = 0$ 可使 (5.3.11) 成立. 现将 (5.3.11) 的右端改写为 $b_k + \mathscr{C}_{k+1}$, 其中 $b_k \in \mathscr{P}_k$. 由于在 $\mathscr{P}_k$ 上 $L = -r^2\Delta_0 + 2k(n-2)$, 引理 3.3 说明在 n 是奇数时 L_0 在 $\mathscr{P}_k$ 上可逆. 取 $\psi_k = -L_0^{-1}b_k$, 则 $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_k$ 满足 k 为 $k+1$ 时的 (5.3.11). 由归纳法, 存在 $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_n$ 使 (5.3.10) 成立.

现设 n 是偶数. 以上构造对 $k < n-2$ 仍成立，但对 $k \geqslant n-2, L_0$ 在 $\mathscr{P}_k$ 上不再可逆. 注意 L_0 在 $\mathscr{P}_k$ 上关于内积 $\langle \sum a_I x^I, \sum b_I x^I \rangle = \sum a_I b_I$ 是自伴算子，因此 $\mathscr{P}_k = \mathrm{im}L_0 \oplus \ker L_0$. 在 $\ker L_0 \neq \{0\}$ 时，我们取 $\psi_k = p_k + q_k \log r$, 其中 $p_k, q_k \in \mathscr{P}_k$. 计算可得:

$$L_0(p_k + q_k \log r) = L_0 p_k + (n - 2 - 2k)q_k + (L_0 q_k)\log r. \tag{5.3.12}$$

由于任何 $b_k \in \mathscr{P}_k$ 可写为 $b_k = L_0 p_k + q_k$, 其中 $L_0 q_k = 0$, (5.3.12) 说明 $L_0\psi_k = -b_k$ 有解:

$$\psi_k = p_k + (n - 2 - 2k)^{-1} q_k \log r.$$

在 $k = n-2$ 时，引理 3.3 说明 $\ker L_0$ 由 r^{n-2} 张成. 因此,

$$\psi_{n-2} = p_{n-2} + cr^{n-2}\log r.$$

对于 $f = f(r)$, 由 K 的定义以及关于度量的渐近展开 (5.3.4) 可得

$$Kf = r^2\partial_i\left[\left(\frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l + \theta_1\right) r^{-1}x^j f'(r)\right],$$

其中 $\theta \in \mathscr{C}_3$. 但由曲率的对称性, $R_{iklj}x^kx^lx^j = 0$. 所以, 对 $f(r) = cr^{n-2}\log r$, $Kf \in \mathscr{C}_{n+1} \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r$. 因而 $K\psi_{n-2} \in \mathscr{C}_n \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r$. 取 $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_{n-2}$, 就有

$$L_0\psi - K\psi - aRr^2(1+\overline{\psi}) \in \mathscr{C}_{n-1} \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r.$$

继而, 对 $k = n-1$ 和 n, 可按同样方法解出 $\psi_k \in \mathscr{P}_k \oplus \mathscr{P}_k \cdot \log r$. 最后, 令 $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_n, \overline{\psi}$ 即满足 (5.3.10).

现设 $n = 3$, 则 $\overline{\psi} = 0$; $n = 5$, 则 $\overline{\psi} = p_4 + q_4$; $n = 4$, 则 $\overline{\psi} = \psi_4 = p_2(x)\log r$. 在这些情形易见展开式 (a) 成立.

在 M 在 P 点附近共形平坦的情形, 则可取共形度量 g 使之在 P 的邻域内与欧氏度量相同. 这时方程 (5.3.8) 成为 $\Delta_0(r^{2-n}\psi) = 0$, 即 $r^{2-n}\psi$ 调和. 由于 $\psi = o(1)$, 故知 $r^{2-n}\psi \in C^\infty$, 因此 (a) 成立.

在 $n \geqslant 6$ 的情形, $\overline{\psi} = \psi_4 + \cdots + \psi_n$, 我们只需求出首项 ψ_4. 由前面的分析可知, ψ_4 满足

$$L_0\psi_4 = -\frac{a}{2}r^2\partial_k\partial_l R(P)x^kx^l.$$

在 $n > 6$ 时, 利用 $\Delta R(P) = R_{,kk}(P) = -\frac{1}{6}|W(P)|^2$, 取 $\psi_4 = r^2 b_{kl}x^kx^l$ 的形式代入方程可算出

$$\psi_4 = \frac{a}{12(n-4)}\left[\frac{r^4}{12(n-6)}|W(P)|^2 - R_{,kl}(P)x^kx^lr^2\right].$$

由此得展开式 (c). 在 $n = 6$ 的情形, 取 $\psi_4 = r^2(b_{kl} + c_{kl}\log r)x^kx^l$ 代入方程, 则求出

$$\psi_4 = -\frac{a}{24}\left[R_{,kl}(P)x^kx^lr^2 + \frac{r^4}{12}|W(P)|^2\log r\right],$$

由此可得展开式 (b). 定理 3.5 证毕.

在下一节中我们将看到, 定理 3.5 的情形 (a) 中 G 的展开式里的常数 A, 对于构造满足 $\mathcal{Q}(\varphi) < \lambda(S^n)$ 的试验函数 φ 是非常重要的. 如果 $A > 0$, 就能找到这样的函数. 利用广义正质量定理 可以证明:

定理 3.6 设 $n = 3, 4, 5$ 或 M 在 P 点附近共形平坦, 则定理 3.5(a) 中 G 的展开式里的 $A \geqslant 0$. $A = 0$ 当且仅当 M 共形等价于标准的 S^n.

为了叙述正质量定理, 先引进 "渐近平坦" 流形 的概念. 设 (M, g) 是一光滑 Riemann 流形, 称 (M, g) 是 τ 阶渐近平坦的, 如果 $M = M_0 \cup M_\infty$, 其中

M_0 紧致, M_∞ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n \setminus B_R(R>0)$, 且在 M_∞ 上有坐标系 $\{y^i\}$ 使得 $g_{ij}=\delta_{ij}+O(|y|^{-\tau}), \partial_k g_{ij}=O(|y|^{-\tau-1}), \partial_k\partial_l g_{ij}=O(|y|^{-\tau-2})$. 称这个坐标系为渐近坐标系. 以下是广义正质量定理的一种形式:

定理 3.7 设 (M,g) 是 $(n-2)$ 阶的 n 维渐近平坦流形, 且在渐近坐标系中有

$$g_{ij}=(1+\overline{A}\rho^{2-n})\delta_{ij}+h_{ij}, \tag{5.3.13}$$

其中 $\overline{A}$ 为常数, $\rho=|y|, h_{ij}=O(\rho^{1-n}), \partial_k h_{ij}=O(\rho^{-n}), \partial_k\partial_l h_{ij}=O(\rho^{-n-1})$. 又设纯量曲率 $R\geqslant 0, R\in L^1(M,g)$, 则有 $\overline{A}\geqslant 0, \overline{A}=0$ 当且仅当 (M,g) 等距于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

我们计划在以后用专门的一章来讨论正质量定理, 这里暂不证明定理 3.7.

定理 3.6 的证明 令 $\hat{g}=G^{\frac{4}{n-2}}g$, 则 $(M\setminus\{P\},\hat{g})$ 的纯量曲率 $\hat{R}=0$, 因为在 $M\setminus\{P\}$ 上 $LG=0$. 而且, 不难看出 $(M\setminus\{P\},\hat{g})$ 是渐近平坦的. 事实上, 由 G 在共形正规坐标系下的渐近展开及 $g_{ij}=\delta_{ij}+f_{ij}$, 其中 $f_{ij}\in C^\infty, \partial_k f_{ij}(P)=0$, 可知

$$\hat{g}_{ij}(x)=r^{-4}\left(1+\frac{4}{n-2}Ar^{n-2}\right)\delta_{ij}+\beta_{ij}(x),$$

其中 $\beta=O(r^{n-5}), \partial\beta=O(r^{n-6}), \partial\partial\beta=O(r^{n-7})$. 现取渐近坐标系 $\{y^i\}$ 使 $y^i=\frac{x^i}{|x|^2}$, 则在新坐标系下 $\hat{g}_{ij}(y)=r^4\hat{g}_{ij}(x)$, 即有

$$\hat{g}_{ij}(y)=\left(1+\frac{4}{n-2}A\rho^{2-n}\right)\delta_{ij}+\overline{\beta}_{ij}(x),$$

其中 $\overline{\beta}_{ij}(x)=\rho^{-4}\beta_{ij}\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$ 满足定理 3.7 的条件. 故由定理 3.7 知 $A\geqslant 0$, 而在 $A=0$ 的情形 $(M\setminus\{P\},\hat{g})$ 等距于 $\mathbb{R}^n$. 由 $\mathbb{R}^n$ 共形等价于 $S^n\setminus\{一点\}$ 容易看出: (M,g) 必共形等价于 S^n. 证毕.

5.4 Yamabe 问题的解决

本节我们通过构造试验函数的办法来证明:

定理 4.1 设 (M,g) 为一 $n\geqslant 3$ 维紧致无边 Riemann 流形. 如果 (M,g) 不共形等价于标准的 S^n, 则 $\lambda(M)<\lambda(S^n)$.

利用定理 2.1 我们立即推出: Yamabe 问题在任何情形都是可解的. 这是本章的主要结论. 确切地说, 有以下定理.

定理 4.2 设 (M,g) 为一 $n\geqslant 3$ 维紧致无边 Riemann 流形，则存在共形度量 $\widetilde{g}=\rho g,\rho\in C^\infty(M)$ 为一正值函数，使得 $\widetilde{g}$ 的纯量曲率为常数.

以下我们证明定理 4.1. 为了构造试验函数，需利用 $\mathbb{R}^n$ 上达到最佳 Sobolev 常数的函数 (5.2.3) 中的一个单参数族

$$u_\varepsilon(x)=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}},\varepsilon>0.$$

容易验证 u_ε 满足 $\mathbb{R}^n$ 上的椭圆方程

$$\Delta u_\varepsilon+n(n-2)u_\varepsilon^{p-1}=0, \tag{5.4.1}$$

其中 $p=\frac{2n}{n-2}$. 用 u_ε 乘以 (5.4.1) 再在 $\mathbb{R}^n$ 上积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx=n(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}u_\varepsilon^p\,dx.$$

因此有

$$\lambda(S^n)=\varLambda=\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}u_\varepsilon^p\,dx\right)^{2/p}}=n(n-2)\left(\int_{\mathbb{R}^n}u_\varepsilon^p\,dx\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{5.4.2}$$

我们分几种情形证明定理 4.1.

情形 (1) $n\geqslant 6,(M,g)$ 不是局部共形平坦流形 .

在这一情形，存在 $P\in M$, 使 Weyl 张量 在 P 点不为零，即 $|W(P)|\neq 0$. 取 P 点处的共形正规坐标系 $\{x^i\}$, 利用这坐标系定义截断函数 $\eta\in C^\infty(M)$, 使 $0\leqslant\eta\leqslant 1,\eta=\eta(r),\eta$ 在 $B_\rho=B_\rho(0)$ 上等于 1, 在 $M\setminus B_{2\rho}$ 上等于 0. 这里 ρ 是一个充分小的正数. 此外，我们可设 $|\nabla\eta|\leqslant c\rho^{-1},c$ 为常数. 定义 $\varphi=\eta u_\varepsilon$, 将证明当 ε 充分小时有 $\mathcal{Q}(\varphi)<\lambda(S^n)$. 由于 φ 只依赖于 r, 我们有（参见定理 3.5 的证明）

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla\varphi|^2\,d\mu&=\int_{B_{2\rho}}|\partial_r\varphi|^2\sqrt{g}\,dx\\&\leqslant\int_{B_{2\rho}}|\partial_r\varphi|^2(1+cr^N)\,dx\\&=\int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+c\int_{B_\rho}r^N|u_\varepsilon|^2\,dx+\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho}|\nabla(\eta u_\varepsilon)|^2(1+cr^N)\,dx,\end{aligned}$$

其中 N 充分大. 利用 u_ε 的表达式及 η 的性质，可估计上式右端第二项积分 $= O(\varepsilon^N)$, 第三项积分 $= O(\varepsilon^{n-2})$. 注意，我们总假定 $\varepsilon \ll \rho$. 对第一项积分，利用方程 (5.4.1) 可得

$$\int_{B_\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx = n(n-2) \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx + \int_{\partial B_\rho} u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \, ds.$$

注意 $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} < 0$ 以及 (5.4.2) 就有

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx &< n(n-2) \left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx \right)^{2/n} \left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx \right)^{2/p} \\ &< \lambda(S^n) \left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx \right)^{2/p}.\end{aligned}$$

所以

$$\int_M |\nabla \varphi|^2 \, d\mu < \lambda(S^n) \left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx \right)^{2/p} + c\varepsilon^{n-2}. \tag{5.4.3}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_M \varphi^p \, d\mu &= \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \sqrt{g} \, dx + \int_{B_{2\rho} \setminus B_\rho} (\eta u_\varepsilon)^p \sqrt{g} \, dx \\ &\geqslant \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx - c \int_{B_\rho} r^N u_\varepsilon^p \, dx - \int_{B_{2\rho} \setminus B_\rho} u_\varepsilon^p (1 + cr^N) \, dx \\ &\geqslant \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \, dx - c\varepsilon^n.\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

又注意在共形正规坐标系下，$R = O(r^2), \Delta R(P) = -\frac{1}{6}|W(P)|^2$, 因此

$$\begin{aligned}\int_M R\varphi^2 \, d\mu &= \int_{B_{2\rho}} \left[\frac{1}{2} \partial_i \partial_j R(P) x^i x^j + O(r^3) \right] \eta^2 u_\varepsilon^2 \, dx \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{B_{2\rho}} \partial_i \partial_j R(P) x^i x^j \eta^2 u_\varepsilon^2 \, dx + c \int_{B_\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 \, dr \cdot \int_{|x|=r} \partial_i \partial_j R(P) x^i x^j \, ds + c \int_{B_{2\rho}} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^3 \, dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega_{n-1}}{2n}\Delta R(P)\int_0^{2\rho}\eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+1}\,dr + c\omega_{n-1}\int_0^{2\rho}\eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+2}\,dr \\
&\leqslant -c_1|W(P)|^2\int_0^{2\rho}\eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+1}\,dr \\
&< -c_1|W(P)|^2\int_0^{\rho} u_\varepsilon^2 r^{n+1}\,dr,
\end{aligned}
$$

其中 c_1 为适当的正常数. 现有

$$
\begin{aligned}
\int_0^\rho u_\varepsilon^2 r^{n+1}\,dr &= \int_0^\rho \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+r^2}\right)^{n-2} r^{n+1}\,dr \ (\text{令} r=\varepsilon t) \\
&= \varepsilon^4\int_0^{\rho/\varepsilon}\frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^{n-2}}\,dt.
\end{aligned}
$$

由此可知,

$$
\int_M R\varphi^2\,d\mu \leqslant \begin{cases} -c|W(P)|^2\varepsilon^4|\log\varepsilon|, & \text{如} n=6, \\ -c|W(P)|^2\varepsilon^4, & \text{如} n>6. \end{cases}
$$

综合 (5.4.3), (5.4.4) 即得出

$$
\begin{aligned}
E(\varphi) &= \int_M|\nabla\varphi|^2\,d\mu + a\int_M R\varphi^2\,d\mu \\
&\leqslant \begin{cases} \lambda(S^n)||\varphi||_p^2 - c|W(P)|^2\varepsilon^4|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^4), & \text{如} n=6, \\ \lambda(S^n)||\varphi||_p^2 - c|W(P)|^2\varepsilon^4 + O(\varepsilon^{n-2}), & \text{如} n>6. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由于 $|W(P)|>0$, 显然有 $\mathcal{Q}(\varphi)=E(\varphi)/||\varphi||_p^2<\lambda(S^n)$, 只要 ε 充分小.

情形 (2) $n\geqslant 6, (M,g)$ 局部共形平坦.

设 $P\in M$. 由于 M 局部共形平坦, 可取 P 点处的共形正规坐标系 $\{x^i\}$, 使在此坐标系下 $g_{ij}=\delta_{ij}$. 由定理 3.5 , 我们有 $G=r^{2-n}+A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha\in C^\infty, \alpha(x)=O(r)$. 取 ρ 充分小, η 为情形 (1) 中定义的截断函数. 定义如下试验函数:

$$
\varphi(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{当} r\leqslant\rho, \\ \varepsilon_0(G(x)-\eta(x)\alpha(x)), & \text{当} \rho\leqslant r\leqslant 2\rho, \\ \varepsilon_0 G(x), & \text{当} x\in M\setminus B_{2\rho}. \end{cases}
$$

这里 $\varepsilon_0>0, \varepsilon_0\ll\rho$, 并且以下关系成立

$$
\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{5.4.5}
$$

由于 (5.4.5)， $\varphi(x)$ 在 $|x|=\rho$ 处连续，因此 φ 是 M 上的 Lipschitz 函数，可作为试验函数．注意在 $B_{2\rho}$ 上 $R=0$, 我们有

$$\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)\,d\mu=\int_{M\setminus B_\rho}\varepsilon_0^2(|\nabla G|^2+aRG^2)\,d\mu$$
$$+\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho}\varepsilon_0^2(|\nabla(\eta\alpha)|^2-2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha))\,dx.$$

由于 $\alpha=O(r),\nabla\alpha=O(1)$, 有 $|\nabla(\eta\alpha)|\leqslant C$. 故由 $|\nabla G|\leqslant cr^{1-n}$ 易见上式最后一项积分的绝对值 $\leqslant c\rho\varepsilon_0^2$. 利用 G 在 $M\setminus\{P\}$ 上满足 $LG=-\Delta G+aRG=0$, 由分部积分可得

$$\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)\,d\mu\leqslant-\varepsilon_0^2\int_{\partial B_\rho}G\frac{\partial G}{\partial r}\,ds+c\rho\varepsilon_0^2.\tag{5.4.6}$$

另一方面，与情形 (1) 类似，有

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)\,d\mu&=\int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\\&=n(n-2)\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p\,dx+\int_{\partial B_\rho}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\,ds\\&\leqslant\lambda(S^n)\left(\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p\,dx\right)^{2/p}+\int_{\partial B_\rho}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\,ds.\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

又有

$$\int_M\varphi^p d\mu\geqslant\int_{B_\rho}\varphi^p\,d\mu=\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p\,dx.$$

因此，由 (5.4.6), (5.4.7) 得

$$E(\varphi)\leqslant\lambda(S^n)||\varphi||_p^2+c\rho\varepsilon_0^2+\int_{\partial B_\rho}\left(u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}-\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}\right)\,ds.\tag{5.4.8}$$

但在 $r=\rho$ 处有

$$\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}=-(n-2)\varepsilon_0^2(\rho^{3-2n}+A\rho^{1-n}+O(\rho^{2-n})).$$

利用 (5.4.5) 可得

$$u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}=-(n-2)\varepsilon_0^2(\rho^{3-2n}+2A\rho^{1-n}+O(\rho^{-1})).$$

因此 (5.4.8) 中最后一项积分 $\leqslant -(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2 + c\rho\varepsilon_0^2$, 即有

$$E(\varphi) \leqslant \lambda(S^n)||\varphi||_p^2 - (n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2 + c\rho\varepsilon_0^2. \tag{5.4.9}$$

由于 (M,g) 不共形等价于 $S^n, A>0$ (定理 3.6), 又因为 ρ 充分小, (5.4.9) 说明 $\mathcal{Q}(\varphi) < \lambda(S^n)$.

情形 (3) $n=3,4$ 或 5.

任取 $P \in M$ 及 P 处的共形正规坐标系 $\{x^i\}$. 由定理 3.5 , $G = r^{2-n} + A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha = O(r), \nabla\alpha = O(1)$. 我们仍取情形 (2) 中定义的 φ 作为试验函数. 但注意现在没有 M 局部共形平坦的假定, 因此 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 不再成立. 在共形正规坐标系中有

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2), \quad \det g = 1 + O(r^N) \text{ 及 } R = O(r^2). \tag{5.4.10}$$

我们需要在 (5.4.10) 的条件下对情形 (2) 中的估计加以修正. 首先有

$$\begin{aligned}
&\int_{M\backslash B_\rho} (|\nabla\varphi|^2 + aR\varphi^2)\,d\mu \\
=& \int_{M\backslash B_\rho} \varepsilon_0^2(|\nabla G|^2 + aRG^2)\,d\mu \\
&+\varepsilon_0^2 \int_{B_{2\rho}\backslash B_\rho} [|\nabla(\eta\alpha)|^2 - 2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha) \\
&+aR(\eta^2\alpha^2 - 2\eta\alpha G)]\,d\mu \\
\leqslant& \varepsilon_0^2 \int_{M\backslash B_\rho} (|\nabla G|^2 + aRG^2)\,d\mu + c\rho\varepsilon_0^2.
\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

利用 $\nabla G + aRG = 0$ 作分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_{M\backslash B_\rho} (|\nabla G|^2 + aRG^2)\,d\mu \\
=& -\int_{\partial B_\rho} G\sqrt{g}g^{ij}\partial_i G n_j\,ds \\
=& -\int_{\partial B_\rho} G\frac{\partial G_0}{\partial r}\sqrt{g}\,d\mu - \int_{\partial B_\rho} G\sqrt{g}g^{ij}\partial_i\alpha n_j\,ds,
\end{aligned}$$

其中 $G_0 = r^{2-n} + A$ 只依赖于 r, n_j 是 ∂B_ρ 的单位外法向量. 于是, 利用 (5.4.10) 即可由 (5.4.11) 推出

$$\int_{M\backslash B_\rho} (|\nabla\varphi|^2 + aR\varphi^2)\,d\mu \leqslant -\varepsilon_0^2 \int_{\partial B_\rho} G\frac{\partial G}{\partial r}\,ds + c\rho\varepsilon_0^2.$$

这个估计与 (5.4.6) 相同. 其次, 由于 u_ε 只依赖于 r, 有

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)\,d\mu &= \int_{B_\rho}(|\nabla u_\varepsilon|^2+aRu_\varepsilon^2)\sqrt{g}\,dx\\ &\leqslant \int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+c\rho^{6-n}\varepsilon_0^2,\end{aligned}$$

这里我们利用了 (5.4.10). 于是, 由类似于情形 (2) 中的推理可得

$$E(\varphi)\leqslant\lambda(S^n)||\varphi||_p^2+c\rho\varepsilon_0^2+\int_{\partial B_\rho}\left(u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}-\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}\right)ds.$$

由此, 与情形 (2) 的证明完全相同, 我们得出 (5.4.9). 因而在 ε_0 充分小的时候有 $\mathcal{Q}(\varphi)<\lambda(S^n)$.

综上所述, 在任何情形我们都可找到 φ 使 $\mathcal{Q}(\varphi)<\lambda(S^n)$. 这说明 $\lambda(M)<\lambda(S^n)$. 定理 4.1 证毕.

附录 Sobolev 不等式中的最佳常数

Sobolev 定理指出: 对于 $n\geqslant 3, p=\frac{2n}{n-2}$, 存在只依赖于 n 的常数 Λ, 使得

$$\Lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\,dx\right)^{2/p}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx\quad \forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{A.1}$$

事实上, 不等式 (A.1) 对于更广的一类函数也成立, 这类函数的空间是

$$X=\{u\in L^2_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n);\ ||u||\stackrel{\triangle}{=}||u||_p+||\nabla u||_2<\infty\}.$$

这里 $||\cdot||_q$ 表示 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的范数. 不难验证, 以 $||\cdot||$ 为范数的 X 是 Banach 空间, 并且 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 X 中稠. 因此 (A.1) 对于 $u\in X$ 成立. 最佳常数 Λ 于是可定义为

$$\Lambda=\inf\{\mathcal{Q}_0(u)|u\in X\setminus\{0\}\},$$

其中

$$\mathcal{Q}_0(u)=\frac{||\nabla u||_2^2}{||u||_p^2}.$$

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的有界开集，我们将把 $\mathring{L}_1^2(\Omega)$ 当作 X 的子空间. 事实上，$\mathring{L}_1^2(\Omega)$ 中的任何函数 u 可以自然地扩张为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，只要在 $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ 上定义 $u=0$. 这样扩张后的 u 满足

$$||u||=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega|u|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty,$$

因而 $u\in X$. 定义

$$\Lambda(\Omega)=\inf\{\mathcal{Q}_0(u)|u\in\mathring{L}_1^2(\Omega)\setminus\{0\}\}.$$

引理 A.1 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开集，则 $\Lambda(\Omega)=\Lambda$.

证明 不难看出 $\Lambda(\Omega)$ 具有以下性质：如 Ω' 与 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 中只差一个平移，则 $\Lambda(\Omega')=\Lambda(\Omega)$；如 $\Omega'\subset\Omega$, 因而 $\mathring{L}_1^2(\Omega')\subset\mathring{L}_1^2(\Omega)$，则 $\Lambda(\Omega')\geqslant\Lambda(\Omega)$. 通过平移我们总可假定 $B_{r_1}\subset\Omega\subset B_{r_2}$, 其中 $B_r=\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x|<r\}, 0<r_1<r_2$. 因此，$\Lambda(B_{r_1})\geqslant\Lambda(\Omega)\geqslant\Lambda(B_{r_2})$. 另一方面，可证 $\Lambda(B_r)$ 是不依赖于 $r>0$ 的常数，记为 Λ_0, 因此 $\Lambda(\Omega)=\Lambda_0$. 事实上，设 $u\in\mathring{L}_1^2(B_r)$，定义 $\widetilde{u}(x)=u(rx)$, 则 $\widetilde{u}\in\mathring{L}_1^2(B_1)$，并且容易验证 $\mathcal{Q}_0(\widetilde{u})=\mathcal{Q}_0(u)$, 由此可知 $\Lambda(B_r)=\Lambda(B_1)=\Lambda_0$. 我们只需证 $\Lambda_0=\Lambda$. 为此注意 $\bigcup\limits_{r>0}\mathring{L}_1^2(B_r)$，在 X 中稠，因此存在 $u_i\in\mathring{L}_1^2(B_{r_i})$ 使 $\mathcal{Q}_0(u_i)\to\Lambda$. 由 $\mathcal{Q}_0(u_i)\geqslant\Lambda_0$ 可知 $\Lambda\geqslant\Lambda_0$. 但 $\Lambda_0\geqslant\Lambda$ 是明显的，因此 $\Lambda=\Lambda_0$. 证毕.

引理 A.1 说明我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界开集 Ω 上计算 Λ. 我们取 $\Omega=B$, 这里 $B=B_1$、为 $\mathbb{R}^n$ 的单位球. 类似于定理 2.1 的证明，对于 $s\in(2,p]$ 定义 $\mathring{L}_1^2(B)\setminus\{0\}$ 上的泛函

$$\mathcal{Q}_s(u)=\frac{||\nabla u||_2^2}{||u||_s^2}.$$

又令

$$\Lambda_s=\inf\{\mathcal{Q}_s(u)|u\in\mathring{L}_1^2(B)\setminus\{0\}\}.$$

如同引理 2.3，我们可以证明当 $s\to p$ 时 $\Lambda_s\to\Lambda$. 又和引理 2.4 完全相似，可以证明：当 $s<p$ 时存在 $u_s\in C^2(\overline{B}), u_s>0, ||u_s||_s=1$, 使得 $\mathcal{Q}_s(u_s)=\Lambda_s$, 且 u_s 满足

$$\begin{cases}\Delta u_s+\Lambda_s u_s^{s-1}=0, \text{ 在} B \text{中},\\ u_s|\partial B_s=0.\end{cases}\tag{A.2}$$

引理 A.2 当 $s \to p$ 时, $\max_B u_s \to +\infty$.

证明 设不然, 则存在 $s_i \to p$ 及常数 $\overline{C}$ 使得 $0 \leqslant u_i \leqslant \overline{C}$. 由于 u_{s_i} 是 (A.2) 的解, 利用椭圆方程的 L^p- 估计和 Schauder- 估计可得 $||u_{s_i}||C^{2,\alpha}(\overline{B}) \leqslant C$, 其中常数 C 只依赖于 $\overline{C}$. 因此存在子列, 仍记作 $\{u_{s_i}\}$, 在 $C^2(\overline{B})$ 中收敛于 u. 易见 u 满足

$$\begin{cases}\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0, \text{ 在} B \text{中}, \\ u|\partial B = 0,\end{cases}$$

且 $\mathcal{Q}_0(u) = \Lambda$. 现扩充定义 u 在 B 外等于 0, 则 u 可以作为 $\overset{\circ}{L}{}_1^2(B_2)$ 中的元素, 并且由引理 A.1 知 u 达到 $\mathcal{Q}_0$ 在 $\overset{\circ}{L}{}_1^2(B_2)\setminus\{0\}$ 中的下确界. 因此 u 在 B_2 中满足方程 $\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0$, 且因为 u 有界由椭圆正则性理论 $u \in C^2(\overline{B}_2)$. 但 u 在 $\overline{B}_2 \setminus B_1$ 中等于 0, 由极大值原理 u 必在 $\overline{B}_2$ 中恒等于 0. 这显然与 u 在 B_1 中不等于 0 矛盾. 证毕.

引理 A.3 u_s 是球面对称函数, 即 $u_s = u_s(|x|)$. 并且 $u_s(r)$ 在 $[0,1]$ 上单调下降.

引理 A.3 可以分别作为两个已知结果的推论. 第一个结果属于 Gidas, Ni 和 Nirenberg (见 Comm. Math. Phys., 68(1979), 209-243), 他们证明:

定理 设 $f \in C(\mathbb{R}), u \in C^2(\overline{B})$ 满足

$$\begin{cases}\Delta u + f(u) = 0, \ u > 0, \text{在} B \text{内}, \\ u|_{\partial B} = 0,\end{cases}$$

则 $u = u(|x|)$, 且 $u(r)$ 在 $[0,1]$ 上递减.

这个定理是用极大值原理和移动平行平面的方法证明的. 显然, 引理 A.3 是此定理的直接推论.

第二个结果是关于函数的球面对称重排 的, 它有更为广泛的应用. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 令 Ω^* 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的开球, Ω^* 与 Ω 有相同体积 (在 Ω 的体积为无穷时 $\Omega^* = \mathbb{R}^n$). 对于 Ω 上的任何 C^1 函数 u, 定义 u 的球面对称重排为 Ω^* 上的一个函数 u^*, 满足 $\mathrm{Vol}\{x \in \Omega^* | u^*(x) > t\} = \mathrm{Vol}\{x \in \Omega | u(x) > t\}, \forall t \in \mathbb{R}$. 容易看出 u^* 被 u 所惟一决定, u^* 是球面对称函数, 且 $u^*(r)$ 是 r 的递减函数. 利用等周不等式及关于积分的 Co-Area 公式 可以证明:

定理

(i) 对于 $p \geqslant 1$,

$$\int_{\Omega^*} |u^*|^p \, dx = \int_{\Omega} |u|^p \, dx;$$

(ii) 对于 $q \geqslant 1$,

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^q \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^q \, dx,$$

其中等号仅当 $\Omega = \Omega^*, u = u^*$（可以相差一个平移）时成立.

其证明请见 Talenti, Ann. Math. Pure. Appl., 110(1976), 353-372, 又可看本书第三章第 1 节 Faber-Krahn 定理 的证明. 由这个结果可知 $u_s = u_s^*$, 因而引理 A.3 成立. 事实上，如 $u_s \neq u_s^*$, 则以上定理说明 $Q_s(u_s) > Q_s(u_s^*)$, 这与 u_s 达到 Q_s 的下确界矛盾.（注意，由 $u_s \geqslant 0$ 及 $u_s|\partial B = 0$ 可知 $u_s^* \in \overset{\circ}{L}{}_1^2(B)$.）

由引理 A.2 和 A.3， $u_s(0) = \max\limits_{B} u_s \to +\infty$, 当 $s \to p$. 我们可以利用定理 2.1 证明中的技巧来获得方程

$$\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0, \quad u > 0, \quad \text{在}\,\mathbb{R}^n\text{上} \tag{A.3}$$

的解. 具体作法为：令 $v_s(x) = m_s^{-1} u_s(m_s^{1-\frac{s}{2}} x)$, 其中 $m_s = a_0^{-1} u_s(0), a_0 > 0$ 为常数，则 u_s 满足

$$\begin{cases} \Delta v_s + \Lambda_s v_s^{s-1} = 0, & \text{在}\, B_{r_s}\,\text{中}, \\ 0 < v_s \leqslant v_s(0) = a_0, \end{cases}$$

其中 $r_s = m_s^{\frac{s}{2}-1} \to \infty$当$s \to p$. 如定理 2.1 的证明一样，我们可以证明：存在 $\{v_s\}$ 的一个子序列 $\{v_{s_i}\}$, 当 $i \to \infty$ 时， $s_i \to p$, 而 v_{s_i} 在 $\mathbb{R}^n$ 的每个闭球 $\overline{B}_r$ 上 C^2 收敛于某个 $\overline{v} \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 满足 (A.3)， $\overline{v} \in X$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{v}^p \, dx \leqslant 1. \tag{A.4}$$

另一方面，由 (A.3) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}|^2 \, dx = \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \overline{v}^p \, dx. \tag{A.5}$$

因此由不等式 (A.1),

$$\Lambda ||\overline{v}||_p^2 \leqslant ||\nabla \overline{v}||_2^2 = \Lambda ||\overline{v}||_p^p,$$

即 $||\overline{v}||_p \geqslant 1$. 结合 (A.4) 即有 $||\overline{v}||_p = 1$. 由 (A.5) 可知, $\mathcal{Q}_0(\overline{v}) = \Lambda$, 即最佳常数 Λ 被 $\overline{v}$ 所达到.

现注意每个 v_s 是球面对称的, 因此 $\overline{v}$ 也是. 记 $\overline{v}(x) = \alpha\varphi(|x|)$, 其中 $\alpha = \Lambda^{\frac{1}{p-2}}$, 则 $\varphi(r)$ 是以下常微分方程的初值问题的解:

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi' + \varphi^{p-1} = 0, \quad r \geqslant 0, \\ \varphi(0) = a_1, \quad \varphi'(0) = 0, \end{cases} \tag{A.6}$$

其中 $a_1 = \alpha^{-1}a_0$. 这个初值问题的解是惟一的, 这是因为 (A.6) 等价于积分方程

$$\varphi(r) = a_1 + \int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \varphi^{p-1}(s)\, ds\, dt,$$

利用压缩映象原理可证这积分方程在 $[0, \varepsilon]$ 上解的惟一性. 又注意当 $r > 0$ 时 (A.6) 是正则的常微分方程, 所以其解在 $[0, \infty)$ 上惟一. 取 $\varphi = (a + br^2)^k$ 的形式代入 (A.6), 经计算得出

$$\varphi(r) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2 + r^2}\right)^{(n-2)/2}, \quad a > 0,$$

最后, 由于 $\mathcal{Q}_0(u) = \mathcal{Q}_0(\lambda u), \forall \lambda > 0, u \in X$, 最佳常数 Λ 被所有形如 $\varphi(x) = (a + b|x|^2)^{(2-n)/2}$ 的函数所达到, 直接计算可得 $\Lambda = n(n-1)\omega_n^{2/n}$. 这样我们就证明了:

定理 A.4 Sobolev 不等式 (A.1) 中的最佳常数 $\Lambda = n(n-1)\omega_n^{2/n}$. 这个常数被函数 $\varphi(x) = (a + b|x|^2)^{(2-n)/2}$ 所达到, 其中 a, b 为任意正常数.

以上证明加以必要的修饰可用来获得 Sobolev 不等式 $c||u||_p \leqslant ||\nabla u||_q, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的最佳常数及达到此常数的极值函数, 这里 $q < n, p = \frac{nq}{n-q}$. 我们的证明与原有的证明 (如 Talenti[31] 的证明) 不同.

第六章　局部共形平坦流形

高维 Riemann 流形上的共形平坦结构 ，是 Riemann 曲面上共形结构的一种自然推广. 这类流形的大范围性质的研究起源于 N. H. Kuiper，他用 Abel 基本群对紧的局部共形平坦 流形进行分类. 在高维情形，并非每个流形都有共形平坦结构，而且要对共形平坦流形给出一种好的分类也是一个困难的问题.

本章的主要目的是寻求一大类局部共形平坦流形 M, 它能共形嵌入球面 S^n. 类似于 Riemann 曲面，有高维 Klein 群 Γ, 同构于该流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$, 并使得 $M\cong\Omega/\Gamma$, 其中 Ω 为 Γ 的不连续区域.

本章第 1 节介绍局部共形平坦流形以及共形变换群 的基本概念及其主要性质. 第 2 节引进共形不变量 $Q(M)$（已在第五章讨论过），研究共形平坦流形上的最小正 Green 函数 及其在 ∞ 处的可积幂次 $p(M)$, 第 3 节研究局部共形平坦流形到 S^n 的浸没，特别对具非负数量曲率的局部共形平坦流形，构造了这种浸没. 第 4 节研究局部共形平坦流形的拓扑. 最后第 5 节将以上的讨论与 S^n 的子区域上 Yamabe 方程的弱解联系起来.

6.1　共形变换与局部共形平坦流形

设 (M_1,g_1) 与 (M_2,g_2) 为两个连通的 Riemann 流形. 微分同胚 $\Phi:M_1\to M_2$ 称为是共形的，是指存在 M_1 上的正值函数 ρ, 使得 $\Phi^*g_2=\rho g_1$, 特别，当

$(M_1, g_1) = (M_2, g_2) = (M, g)$ 时，这样的微分同胚称为共形变换．本章主要研究 S^n 上的共形变换群．首先考虑 $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 且配备欧氏度量．我们之所以在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上加 ∞，是为了使 $\hat{\mathbb{R}}^n$ 共形同胚于 S^n.（通过球极投影，$\mathbb{R}^n$ 共形同胚于 $S^n \setminus \{P\}$，其中 P 为北极．）注意，欧氏度量在 ∞ 处奇异，因此对共形因子 ρ，令 $\rho(\infty) = 0$. 我们有以下重要的

定理 1.1 (Liouville) 设 $n \geqslant 3$，则 $\hat{\mathbb{R}}^n$ 上的共形变换群由平移、旋转、相似以及反演 所生成.

证明 设 $\Phi : \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ 为共形变换，于是可假设 $\Phi^* dx^2 = u^{-2} dx^2$，其中 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上正的光滑函数．因度量 $u^{-2} dx^2$ 等距于欧氏度量 dx^2，故其数量曲率与 Ricci 曲率 均为 0，由第五章关于 Ricci 曲率的计算公式，即得

$$u\,(u_{,ii} + u_{,jj}) = \sum_{k=1}^{n} u_{,k}^2, \quad i \neq j, \tag{6.1.1}$$

$$uu_{,ij} = 0, \qquad i \neq j. \tag{6.1.2}$$

由于 $u > 0$，(6.1.2) 导致 $u_{,ij} \equiv 0 (i \neq j)$．这样 $u_{,i}$ 是仅依赖于 x_i 的函数，即 $u_{,i} = h_i(x_i)$，其中 h_i 是 $\mathbb{R}$ 上的函数.

现设 $l \neq i, j$，对 (6.1.1) 两边施行 $\frac{\partial}{\partial x_l}$，再用 (6.1.2) 即得

$$u_{,l}(u_{,ii} + u_{,jj} - 2u_{,ll}) = 0. \tag{6.1.3}$$

对 (6.1.3) 两边施行 $\frac{\partial}{\partial x_i}$，由 (6.1.2) 再次可得

$$u_{,l}u_{,iii} = 0.\ (i \neq l) \tag{6.1.4}$$

我们断言或者 (1) $h_l \equiv 0, \forall 1 \leqslant l \leqslant n$；或者 (2) $h_l(t) = a_0 t + b_l, \forall 1 \leqslant l \leqslant n$，其中 a_0, b_l 均为常数．事实上，若 (1) 不成立，则必有某 l，不妨认为 $l = 1$，以及某 $t_0 \in \mathbb{R}^1$，使得 $h_l(t_0) \neq 0$．由 (6.1.4)，对 $i \neq 1, h_i(t)$ 必为线性函数，即 $h_i(t) = a_i t + b_i$．于是在 (6.1.4) 和 (6.1.1) 中令 $l = 2, i = 1$，即得 $h_i(t) = a_i t + b_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$．最后从 (6.1.3) 可知一切 a_i 均相等，这就导致情形 (2).

现考虑情形 (1)，此时 $u \equiv$ 常数．这表示 $\Phi^* dx^2 = c\,dx^2$ 对某正数 c 成立．在此情形，Φ 显然为差一常数因子下的等距变换，故定理正确．对情形 (2)，

我们有

$$u(x)=\frac{a_0}{2}|x|^2+\sum b_i x_i+c,$$

将此代入 (6.1.1)，得 $c=\sum b_i^2/2a_0$, 故

$$u(x)=\frac{1}{2a_0}\sum(a_0x_i+b_i)^2.$$

由此可知，Φ 为差一常数因子下的等距变换与反演的复合，所以定理 1.1 在任何情形下都成立.

注 上面的证明实际上具有局部性. 故若 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中某区域 Ω 上的共形映射，那么 ψ 必为 $\hat{\mathbb{R}}^n$ 上某整体共形变换在 Ω 上的限制.

因为 $\hat{\mathbb{R}}^n$ 共形等价于 S^n, 定理 1.1 给出了 S^n 上的共形变换群 C_n.C_n 的元素通常称为 Möbius 变换 . 群 C_n 也可用以下方法刻画. 设 B^{n+1} 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球. B^{n+1} 上的 Poincaré 度量由

$$ds^2=\frac{4\,dy^2}{(1-|y|^2)^2}$$

给出: (B^{n+1},ds^2) 的等距变换群，记为 I_{n+1}, 由以下的变换生成.

对任意 $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{B}^{n+1}$, 用 $S(\xi)$ 表示以 ξ 为心且与单位球面 $S^n=\partial B^{n+1}$ 正交的 n 维球面(故其半径为 $\sqrt{|\xi|^2-1}$). 又令 T_ξ 表示关于球面 $S(\xi)$ 的反演，即

$$T_\xi(y)=\xi+\frac{(|\xi|^2-1)(y-\xi)}{|y-\xi|^2}.$$

可以验证，T_ξ 将 B^{n+1} 与 S^n 分别映上 B^{n+1} 与 S^n, 且为 (B^{n+1},ds^2) 的一个等距变换. 其次，对任意 $\zeta\in S^n$, 令 R_ζ 表示关于垂直于 ζ 的子空间的反射. 那么 (B^{n+1},ds^2) 的等距变换群 I_{n+1} 由所有的 T_ξ 与 R_ζ 所组成. 此外，还可以证明，$\{T_\xi|S^n,R_\zeta|S^n:\forall\xi\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{B}^{n+1},\forall\zeta\in S^n\}$ 生成 S^n 上的共形变换群 C_n. 对任意 $\phi\in C_n$, 必有惟一的 $\widetilde{\phi}\in I_{n+1}$ 使得 $\widetilde{\phi}|S^n=\phi$, 而且容易见到，对应 $\phi\to\widetilde{\phi}$ 实际上就是两个变换群之间的同胚映射.

现在利用 C_n 的上述刻画，给出 S^n 上共形变换的三种不同类型.

定义 1.2 设 $\phi\in C_n$. 若 $\widetilde{\phi}\in I_{n+1}$, 在 B^{n+1} 内有一不动点，则称 ϕ 是椭圆的 . 若 $\widetilde{\phi}$ 在 B^{n+1} 内无不动点，但 ϕ 恰有一不动点在 S^n 上，则称 ϕ 为抛物 的. 若 $\widetilde{\phi}$ 在 B^{n+1} 内无不动点，而 ϕ 在 S^n 上恰有两个不动点，则称 ϕ 为双曲的 .

可以证明，每个 $\phi \in C_n$ 必属于以上三种类型变换之一，而且在共轭之下保持不变. 现在简单地讨论一下以上三种类型变换的若干性质.

(i) ϕ 是椭圆的，当且仅当 $\widetilde{\phi} \in I_{n+1}$ 共轭于 $O(n+1)$ (可以看成 I_{n+1} 的子群) 的某元.

(ii) 若 ϕ 为抛物的，而 $P \in S^n$ 为其惟一的不动点，则关于 P 的球极投影将 ϕ 共轭变换于 $\mathbb{R}^n$ 上共形变换 $\widetilde{\phi}$, 使 $\widetilde{\phi}(x) = Ax + b$, 其中 $b \in \mathbb{R}^n, A \in O(n)$ 且有 1 为其特征值.

(iii) 若 ϕ 为双曲的，则类似于 (ii) 所得的球极投影，将 ϕ 对应于 $\hat{\phi}$, 后者具有 $\hat{\phi}(x) = \lambda Ax + b$ 的形式，但或者 $\lambda \neq 1$, 或者 $\lambda = 1$, 而 1 不是 A 的特征值.

下面开始讨论局部共形平坦流形.

定义 1.3 设 M 为 n 维微分流形. M 称为是局部共形平坦的，是指它有一个坐标覆盖族 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, 其中 $\phi_\alpha : U_\alpha \to S^n$, 使得当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ 时，坐标变换 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是共形微分同胚. 这样的坐标覆盖族 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ 称为 M 的局部共形平坦结构.

注意当 $n \geqslant 3$ 时，变换 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 在 $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 的任一连通分支上，是一个 Möbius 变换 的限制，这从 Liouville 定理 及其后面的注即可明白.

定义 1.4 设 M 为局部共形平坦流形，$\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ 为其局部共形平坦结构. 我们说度量 g 在 M 上与其局部共形平坦结构是相容的，或简单地说 g 为相容度量，如果 $\forall \alpha, \phi_\alpha : (U_\alpha, g) \to (S^n, g_0)$ 是共形映射，其中 g_0 是 S^n 上的标准度量. 这时，又称 (M, g) 是局部共形平坦的 Riemann 流形.

命题 1.5 设 M 为仿紧的局部共形平坦流形，则 M 上必有一个相容的 Riemann 度量.

证明 设 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ 为 M 上的局部共形平坦结构. 如果需要，作其局部有限加细覆盖. 可以认为，存在单位分解 $\{\eta_\alpha \in C^\infty(M)\}$ 使得 $\sum\limits_\alpha \eta_\alpha = 1$, 且在 $M \setminus U_\alpha$ 上，$\eta_\alpha = 0$. 令

$$g = \sum_\alpha \eta_\alpha \phi_\alpha^* g_0,$$

其中 g_0 为 S^n 的标准度量. 于是容易验证，g 是相容度量.

注 设 (M, g) 为 Riemann 流形，则不难验证，(M, g) 关于 M 上的某局部共形平坦结构是局部共形平坦的，当且仅当 M 上存在坐标覆盖族 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ 使

得对任意 α,

$$(\psi_\alpha^{-1})^* g = \rho_\alpha \, dx^2,$$

其中 dx^2 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量，而 ρ_α 为 $\mathbb{R}^n$ 上的正函数. 局部地，存在这样一族坐标覆盖族，等价于在维数 $n \geqslant 4$ 时，其 Weyl 张量为 0 ；而在维数 $n=3$ 时，等价于 Bak 张量等于 0 ；当维数 $n=2$ 时，如所熟知，这样的坐标覆盖族总是存在的. Weyl 张量 由下式给出,

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}\delta_{jl} - R_{jk}\delta_{il} + R_{jl}\delta_{ik} - R_{il}\delta_{jk}\right) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}\right), \end{aligned}$$

当维数 $n=3$ 时， Weyl 张量为 0. Bak 张量 定义为

$$B_{ijk} = \frac{1}{n-2}(R_{ij,k} - R_{ik,j}) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\left(\delta_{ij}R_{,k} - \delta_{ik}R_{,j}\right).$$

通过直接计算可知，若 $\widetilde{g} = e^{2\rho} g$, 则:

$$\text{当}\, n \geqslant 4\,\text{时}, \quad e^{2\rho}\widetilde{W}_{ijkl} = W_{ijkl};$$

$$\text{当}\, n = 3\,\text{时}, \quad e^{3\rho}\widetilde{B}_{ijk} = B_{ijk}.$$

关于局部共形平坦流形，有下列最简单的例子. 比如欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 标准球面 S^n, 标准环面 T^n, 具有 Poincaré 度量的球 B^n. 通过这些简单例子，还可以构造出更多的局部共形平坦流形. 事实上，有如下的结果:

(i) 球面空间形式与双曲流形之乘积是局部共形平坦的.

(ii) 若 $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ 是两个同维数的局部共形平坦流形，则在其联结和 (connected sum)$M_1 \sharp M_2$ 上，必存在局部共形平坦的度量.

(iii) 设 $\varGamma \subset C_n$ 是 S^n 上共形变换群 C_n 的有限子群，且 $\varGamma$ 在 S^n 上的作用是自由的，则商流形 $S^n/\varGamma$ 是局部共形平坦流形.

(iv) 设 M 为 n 维光滑流形，且有浸没 $\varPhi: M \to S^n$, 则 $\varPhi$ 在 M 上生成一个局部共形平坦结构，且 $\varPhi^* g_0$ 是与之相容的度量.

联系 (iv) ，现在有如下的反问题：给定一个局部共形平坦的 n 维流形 M, 是否存在浸没 $\varPhi: M \to S^n$ 使其局部共形平坦结构是由 $\varPhi$ 诱导出来的？下面的定理回答了这个问题.

定理 1.6 设 M 为单连通(不必紧)的局部共形平坦流形，其维数 $n \geqslant 3$，则必存在浸没 $\Phi : M \to S^n$，使得 M 上的局部共形平坦结构是由 Φ 诱导出来的.

证明 设 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ 为 M 上的局部共形平坦结构. 首先注意，若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则由 Liouville 定理 ，存在 Möbius 变换 $\psi(\alpha,\beta) \in C_n$ 使得

$$\psi(\alpha,\beta)|_{\phi(U_\alpha \cap U_\beta)} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}.$$

显然

$$\psi(\alpha,\beta) \circ \psi(\beta,\alpha) = \mathrm{id}, \tag{6.1.5}$$

其中 id 表示 S^n 上的恒等映射. 类似地，若 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$，则

$$\psi(\alpha,\beta) \circ \psi(\beta,\gamma) \circ \psi(\gamma,\alpha) = \mathrm{id}. \tag{6.1.6}$$

现定义 $\Phi : M \to S^n$ 如下：从任意的 $\{U_{\alpha_0}, \phi_{\alpha_0}\}$ 出发，定义

$$\Phi = \phi_{\alpha_0}，\quad 在U_{\alpha_0}上.$$

对任意 U_α，总存在 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k} = U_\alpha$ 使得

$$U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}} \neq \varnothing, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1,$$

然后定义

$$\Phi = \psi(\alpha_0, \alpha_1) \circ \psi(\alpha_1, \alpha_2) \circ \cdots \circ \psi(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \circ \phi_{\alpha_k}，\quad 在U_{\alpha_k} = U_\alpha上.$$

为此需验证定义的合理性. 设集 $\mathscr{U} = \{U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k}\}$ 满足

$$U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}} \neq \varnothing, \quad i = 1, \cdots, k 而 U_{k+1} = U_1,$$

则称 $\mathscr{U}$ 是长为 k 的一个循环 . 不难见到，如能证明，对任意循环 $\mathscr{U}$，

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) \circ \psi(\alpha_2, \alpha_3) \circ \cdots \circ \psi(\alpha_k, \alpha_1) = \mathrm{id} \tag{6.1.7}$$

成立，那么 Φ 的定义是合理的.

现在，称两个循环 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 是连贯的 (consecutive) 是指，将 $\mathscr{U}_1$ 重排为 $\mathscr{U}_1 = \{U_0, U_1, \cdots, U_k\}$ 之后， $\mathscr{U}_2$ 必属以下三种情形：

(i) $\mathscr{U}_2 = \{U_1, \cdots, U_k\}$ 且 $U_0 \cap U_1 \cap U_k \neq \varnothing$;

(ii) $\mathscr{U}_2 = \{U_0', U_1, \cdots, U_k\}$ 且 $U_0' \cap U_0 \cap U_1 \neq \varnothing$;

(iii) $\mathscr{U}_2 = \{U_{-1}, U_0, \cdots, U_k\}$ 且 $U_{-1} \cap U_0 \cap U_k \neq \varnothing$.

我们断言，若 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 是连贯的，且 $\mathscr{U}_1$ 满足 (6.1.7)，则 $\mathscr{U}_2$ 也满足 (6.1.7). 为此只需验证在 (i) 的情形下断言成立，因为情形 (ii) 与 (iii) 是完全类似的. 由于 $\mathscr{U}_1$ 满足 (6.1.7)，故

$$\psi(0,1) \circ \cdots \circ \psi(k,0) = \mathrm{id},$$

而由 (6.1.6)， $U_0 \cap U_1 \cap U_k \neq \varnothing$ 推出

$$\psi(0,1) \circ \psi(1,k) \circ \psi(k,0) = \mathrm{id}.$$

结合以上两恒等式，即得

$$\psi(0,k) \circ \psi(k,1) \circ \psi(1,2) \circ \cdots \circ \psi(k,0) = \mathrm{id}$$

由 (6.1.5),

$$\psi(k,1) \circ \psi(1,2) \circ \cdots \circ \psi(k-1,k) = \mathrm{id},$$

再由 (6.1.5), 它等价于

$$\psi(1,2) \circ \psi(2,3) \circ \cdots \circ \psi(k,1) = \mathrm{id}$$

这表明 $\mathscr{U}_2$ 也满足 (6.1.7).

最后，因 M 是单连通的，对任意循环 $\mathscr{U}$, 总存在循环 $\mathscr{U}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ 使得 $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$, 而 $\mathscr{U}_i$ 与 $\mathscr{U}_{i+1}$ 是连贯的. 此外， $\mathscr{U}_k = \{U_\alpha\}$ 只含有一个 U_α (请读者自行验证). 由于 $\mathscr{U}_k$ 显然满足 (6.1.7)，故每个 $\mathscr{U}_i$, 特别是 $\mathscr{U} = \mathscr{U}_0$ 也满足 (6.1.7). 这就证明了 Φ 定义的合理性. 不难验证 Φ 诱导了 M 的共形结构.

注 对于一个局部共形平坦流形 M, 如果存在浸没 $\Phi: M \to S^n$, 它诱导出 M 上原来的局部共形平坦结构，则称 Φ 为 M 的展开映射 (developing map). 定理 1.6 指出若 M 为单连通，则它必有展开映射. 在相差一个 S^n 的共形变换的意义下，展开映射是惟一的. 事实上，若 $\Phi_1, \Phi_2 : M \to S^n$ 是任意的两个展开映射，则局部地， $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ 是 S^n 上某区域的共形变换. 由 Liouville 定理，存在 $\psi \in C_n$ 使 $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ 在该区域上与 ψ 重合. 再用定理 1.6 的证明方法，可证 $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} = \psi$ 或者 $\Phi_1 = \psi \circ \Phi_2$ 整体成立.

现在用 $\widetilde{M}$ 表示 M 的万有覆盖, 则 $\widetilde{M}$ 通过覆盖映射 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 诱导出 $\widetilde{M}$ 上的一个局部共形平坦结构. 因为 $\widetilde{M}$ 是单连通的, 故它有展开映射 $\widetilde{\Phi}:\widetilde{M}\to S^n$. 考虑 $\widetilde{M}$ 上的 deck 变换群, 它可以看成基本群 $\pi_1(M)$. 每个 deck 变换 $\gamma\in\pi_1(M)$ 都是 $\widetilde{M}$ 的共形变换, 但无不动点. 现在, 若 $\widetilde{\Phi}:\widetilde{M}\to S^n$ 是给定的展开映射, 则 $\widetilde{\Phi}\circ\gamma$ 也是展开映射, 由上面的注, 存在惟一的 $\rho(\gamma)\in C_n$ 使

$$\rho(\gamma)\circ\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Phi}\circ\gamma.$$

这就给出了一个同态 $\rho:\pi_1(M)\to C_n$, 称为 $\pi_1(M)$ 在 C_n 上的和乐表示 (holonomy representation). ρ 的核 $\ker\rho$ 是 $\pi_1(M)$ 的正规子群. 由此可知, $\hat{M}=\widetilde{M}/\ker\rho$ 是 M 的一个覆盖空间, 具有 deck 变换 $\pi_1(M)/\ker\rho$. 称 $\hat{M}$ 为 M 的和乐覆盖. 注意, 对 $\hat{M}$, 和乐表示 $\hat{\rho}:\pi_1(\hat{M})\to C_n$ 为单射, 故 $\widetilde{M}$ 上的展开映射诱导出 $\hat{M}$ 上的展开映射. 以后, 我们经常利用和乐覆盖 $\hat{M}$ 的展开映射代替万有覆盖 $\widetilde{M}$.

6.2 共形不变量

在第五章已引进共形 Laplace 算子 , 以及对紧 Riemann 流形 (M,g) 有关的共形不变量 $Q(M)$. 这些概念也可定义在非紧流形上. 请回忆

$$L=-\Delta+aR,\quad\left(a=\frac{n-2}{4(n-1)}\right)$$

是共形 Laplace 算子 , 其中 R 为 (M,g) 的数量曲率. 利用共形 Laplace 算子, 可以定义 Yamabe 商

$$Q(u)=\frac{E(u)}{||u||_p^2},$$

其中

$$\begin{aligned}E(u)&=\int_M uLu\,dv=\int_M(|\nabla u|^2+aRu^2)\,dv,\ \forall v\in C_0^\infty(M),\\ ||u||_p^p&=\int_M|u|^p\,dv,\quad p=\frac{2n}{n-2}.\end{aligned}$$

设 $\widetilde{g}=u^{p-2}g$ 为共形于 g 的度量, 其中 $u\in C^\infty(M)$ 为正函数. 现用 $\widetilde{R}$ 与 $\widetilde{L}$ 分别表示相应于 $\widetilde{g}$ 的数量曲率与共形 Laplace 算子, 于是有 (见第五章方程

(5.0.2))

$$Lu = a\widetilde{R}u^{p-1}. \tag{6.2.1}$$

此外，直接计算可得

$$\widetilde{L}v = u^{1-p}L(uv), \quad \forall v \in C^\infty(M). \tag{6.2.2}$$

由 (6.2.2)，

$$\begin{aligned} E_{\widetilde{g}}(v) &= \int_M v\widetilde{L}v\, d\widetilde{v} = \int_M vu^{1-p}L(uv)\cdot u^p\, dv \\ &= \int_M (uv)L(uv)\, dv = E_g(uv). \end{aligned}$$

但

$$\int_M |v^p|\, dv_{\widetilde{g}} = \int_M |v|^p \cdot u^p\, dv = \int_M |uv|^p\, dv,$$

可得

$$Q_{\widetilde{g}}(v) = Q_g(uv), \quad \forall v \in C_0^\infty(M). \tag{6.2.3}$$

现定义共形不变量 $Q(M)$ 为

$$Q(M) = \inf\{Q(u) : u \in C_0^\infty(M) \setminus \{0\}\}.$$

由 (6.2.3) 可知，$Q(M)$ 是共形不变的，即它不依赖于 Yamabe 商 Q 中 Riemann 度量的选取.

引理 2.1 设 M 为紧的局部共形平坦的流形. 则为了 $Q(M) > 0(< 0$或$= 0)$ 必须且仅需存在与之相容的度量 $\widetilde{g}$, 使得 $R_{\widetilde{g}} > 0(< 0$或$= 0)$.

证明 设 $\widetilde{g} = u^{p-2}g$ 为 Yamabe 问题之解. 于是 $\widetilde{g}$ 具常数数量曲率，其符号与 $Q(M)$ 相同. 另一方面，我们知道 $Q(M)$ 与共形 Laplace 算子的第一特征值 λ_0 有相同的符号，由此可得，若 $R_{\widetilde{g}}$ 的符号不变，则 λ_0 的符号与 $R_{\widetilde{g}}$ 的符号一致.

对于紧 Riemann 流形，第五章已证明，$Q(M) \leqslant Q(S^n)$, 而且 $Q(M) = Q(S^n)$ 当且仅当 M 共形等价于 S^n. 下面考虑 M 不是紧的情形.

定理 2.2 设 (M,g) 是 Riemann 流形. 假设存在 $\Phi : (M,g) \to (S^n, g_0)$ 为共形映射，其中 g_0 为 S^n 的标准度量，则 $Q(M) = Q(S^n)$.

证明 首先注意，若 Ω 为 S^n 的开子集，则 $Q(\Omega)=Q(S^n)$. 这等价于第五章引理 A.1, 因为 $S^n\setminus\{P\}$ 共形等价于 $\mathbb{R}^n$. 现因 Φ 是浸没，故可找到开集 $U\subset M$ 使 $\Phi:U\to\Phi(U)$ 为微分同胚. 于是可得到 $Q(U)=Q(\Phi(U))=Q(S^n)$. 这就证明了 $Q(M)\leqslant Q(U)=Q(S^n)$.

剩下要证明 $Q(M)\geqslant Q(S^n)$. 设 $\{U_i\}$ 为 M 的一列子区域，具有光滑边界以及紧闭包使得 $U_i\subset U_{i+1},\forall i$ 且 $\cup_{i\geqslant 1}U_i=M$. 易见， $\lim\limits_{i\to\infty}Q(U_i)=Q(M)$. 于是只需证明， $Q(U)\geqslant Q(S^n)$ 对任意具有光滑边界 ∂U 以及紧闭包 $\overline{U}$ 的任意子区域 U 成立. 现假设对某个这样的子区域 U, 不等式不成立，于是 $Q(U)<Q(S^n)$, 由第五章定理 2.1 的证明方法，同样可证，存在 $u\in C^\infty(\overline{U})$ 适合

$$\begin{cases}Lu=Q(u)u^{p-1},\quad u>0\,在\,U\,上,\\ u|_{\partial U}=0,\\ \int_U u^p\,dv=1.\end{cases}$$

在 U 外，补充定义 u 为 0，那么对任意的 $\phi\in C_0^\infty(M)$ 以及 $\phi\geqslant 0$, 下式成立:

$$\begin{aligned}\int_M uL\phi\,dv&=\int_U uL\phi\,dv=\int_U\phi Lu\,dv+\int_{\partial U}\phi\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\\ &\leqslant\int_U\phi Lu\,dv=Q(U)\int_M u^p\phi\,dv,\end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示 ∂U 的外法线矢量场. 注意 $u\geqslant 0$ 且 $u|_{\partial U}=0$ 蕴含 $\frac{\partial u}{\partial n}\leqslant 0$. 故上述不等式表示，在分布意义下，

$$Lu\leqslant Q(U)u^{p-1},\quad 在\,M\,上.$$

现定义 S^n 上的函数 v 如下:

$$v(y)=\begin{cases}0, & 在\,S^n\setminus\Phi(\overline{U})\,上,\\ \max\left\{|\Phi'(x)|^{-\frac{n-2}{2}}u(x):x\in\Phi^{-1}(y)\cap\overline{U}\right\}, & 在\,\Phi(\overline{U})\,上,\end{cases}$$

其中 $|\Phi'(x)|^2$ 为 Φ 的共形因子，即

$$\Phi^*g_0=|\Phi'|^2g.$$

因 Φ 为浸没， $\Phi^{-1}(y)\cap\overline{U}$ 为有限集，对此集中的每个点 x, 存在 x 的一个邻域 V_x, 使得 Φ 是 V_x 映至 $\Phi(V_x)$ 的微分同胚，而 $\Phi(V_x)$ 是 y 的一个邻域. 现设 Φ_x^{-1}

表示此局部微分同胚之逆，注意在 $\Phi(V_x)$ 上定义的函数

$$v_x(y_1)=\left\{|(\Phi_x^{-1})'|^{\frac{n-2}{2}}u(\Phi_x^{-1}(y_1))\right\}$$

在 $\Phi(V_x)$ 上满足 $L_0v_x\leqslant Q(U)v_x^{p-1}$, 其中 L_0 为 S^n 上的共形 Laplace 算子 . 这由共形 Laplace 算子的共形不变性可得 (参见 (6.2.2)). 这样，我们见到， v 是 S^n 上的非负 Lipschitz 函数，且在 S^n 上满足 $L_0v\leqslant Q(U)v^{p-1}$. 再由共形不变性，可得

$$\int_{\Phi(V_x)}v_x^p\,dv_0=\int_{V_x}u^p\,dv,$$

从而 $\int_{S^n}v^p\,dv_0\leqslant 1$, 对 v 所满足的微分不等式进行积分，即得

$$E_0(v)\equiv\int_{S^n}vL_0v\,dv_0\leqslant Q(U)\int_{S^n}v^p\,dv_0.$$

从 $\int_{S^n}v^pd\,v_0\leqslant 1$, 即得 $Q(S^n)\leqslant Q(U)$, 从而矛盾！这就完全证明了定理 2.2.

推论 2.3 设 (M,g) 为单连通的局部共形平坦流形, 维数 $n\geqslant 3$, 则 $Q(M)=Q(S^n)$.

现在考虑在局部共形平坦流形上共形 Laplace 算子的 Green 函数 .

命题 2.4 设 (M,g) 为维数 $n\geqslant 3$ 的局部共形平坦的 Riemann 流形，又设 $\hat{M}$ 为 M 的和乐覆盖，那么 $\hat{M}$ 上的共形 Laplace 算子 L 具有最小正 Green 函数 .

证明 设 $x_0\in\hat{M},\Phi:\hat{M}\to S^n$ 为展开映射 ， $y_0=\Phi(x_0)$. 以 G_0 表示 S^n 上共形 Laplace 算子 L_0 的以 y_0 为极点的 Green 函数，即 $L_0G_0=\delta_{y_0}$. 在 $\hat{M}$ 上，我们有 $\Phi^*(g_0)=|\Phi'|^2\hat{g}$. 若 $H=|\Phi'|^{\frac{n-2}{2}}G_0\circ\Phi$, 则从 (6.2.2),

$$LH=\sum_{P\in\Phi^{-1}(y_0)}|\Phi'(P)|^{\frac{n+2}{2}}\delta_P.$$

于是可利用 H 证明存在最小正 Green 函数 G 使 $LG=\delta_{x_0}$. 事实上，设 $\{U_i\}$ 为 $\hat{M}$ 的一列子区域，具有光滑边界 ∂U_i, 且 $U_i\subset U_{i+1},\overline{U}_i$ 为紧集以及 $\cup_iU_i=\hat{M}$. 设 G_i 为 U_i 上的 Green 函数，满足

$$LG_i=\delta_{x_0},\quad 在\,U_i\,上,\quad G_i|_{\partial U_i}=0.$$

因为从推论 2.3 ， $\lim Q(U_i)=Q(\hat{M})=Q(S^n)>0$, 故 L 在 U_i 上关于 Dirichlet 边值问题的第一特征值 $\lambda_0(U_i)$ 是正的 (至少对充分大的 i). 于是应用极大值原

理，可知

$$G_i(x) \leqslant G_{i+1}(x) \leqslant H(x), \quad \forall x \in U_i \setminus \{x_0\}, \tag{6.2.4}$$

这表明

$$G(x) = \lim_{i\to\infty} G_i(x)$$

存在，且为 $\hat{M}$ 上以 x_0 为极点的最小正 Green 函数.（参见第二章附录中定理 A1～A3 的证明）.

命题 2.5 设 (M,g) 为局部共形平坦流形，又设存在共形变换 $\Phi : M \to S^n$. 那么对于以 P 为极点的 Green 函数 G, 不等式

$$\int_{M\setminus\mathscr{O}} G^{\frac{2n}{n-2}}\, dv < \infty$$

成立，其中 $\mathscr{O}$ 为包含 P 的任意开集，

证明 对任意开集 $U \subseteq M$ 以及 $\phi \in C^\infty(U)$, 令

$$E_U(\phi) = \int_U (|\nabla\phi|^2 + aR\phi^2)\, dv.$$

令 $\{U_i\}$ 与 G_i 为命题 2.4 中的区域及其上的 Green 函数. 可以认为 $\mathscr{O} \subset U_1$. 设 ζ 为光滑函数，它在 U_1 内有紧支，且在 $\mathscr{O}$ 上，$\zeta \equiv 1$. 注意，G_i 使能量 E_{U_i} 在 $U_i\setminus\mathscr{O}$ 上关于其边值达到最小，故有 $E_{U_i\setminus\mathscr{O}}(G_i) \leqslant E_{U_i\setminus\mathscr{O}}(\zeta G_i)$. 从而可知对某个与 i 无关的常数 C, $E_{U_i\setminus\mathscr{O}}(G_i) \leqslant C$. 于是存在某个常数 C', 使 $E_{U_i}((1-\zeta)G_i) \leqslant C'$. 再由推论 2.3 可知

$$\int_{U_i} ((1-\zeta)G_i)^{2n/(n-2)}\, dv$$

一致有界，从而获得了命题 2.5 的结论.

对于局部共形平坦的 Riemann 流形 (M,g), 定义数 $p(M)$ 如下：

$$p(M) \equiv \inf\left\{q > 0 : \int_{\hat{M}\setminus\mathscr{O}} G^q\, dv < \infty,\ \forall \text{包含}\, G\, \text{的极点的}\, \mathscr{O}\right\}.$$

其中 G 是 M 的和乐覆盖 $\hat{M}$ 上任意的最小正 Green 函数. 注意，上述定义与最小 Green 函数的选取无关. 事实上，若 G, G' 分别为以 P 和 P' 为极点的两个最小 Green 函数，由定义，$G = \lim G_i$ 以及 $G' = \lim G_i'$, 其中 G_i 与 G_i' 分别为

U_i 上极点为 P 与 P' 的 Green 函数. 假若 $\mathscr{O}$ 为包含 P 与 P' 的有界开集, 容易见到, 存在数 $C_0>1$ 使 $C_0^{-1}G'|_{\partial\mathscr{O}}<G|_{\partial\mathscr{O}}<C_0G'|_{\partial\mathscr{O}}$. 从而对充分大的 i, 也有

$$C_0^{-1}G_i'|_{\partial\mathscr{O}}<G_i|_{\partial\mathscr{O}}<C_0G_i'|_{\partial\mathscr{O}}.$$

由于 $G_i|_{\partial U_i}=G_i'|_{\partial U_i}=0$, 故从极大值原理可得, 在 $U_i\setminus\mathscr{O}$ 上, $C_0^{-1}G_i'<G_i<C_0G_i'$. 令 $i\to\infty$, 即得

$$C_0^{-1}G'\leqslant G\leqslant C_0G', \text{ 在}\hat{M}\setminus\mathscr{O}\text{上}.$$

这就证明了定义的合理性.

现在定义

$$d(M)=\frac{n-2}{2}p(M).$$

从命题 2.5 可知, $p(M)\leqslant\frac{2n}{n-2}$ 以及 $d(M)\leqslant n$ 对任意的局部共形平坦流形 M 都成立.

命题 2.6 设 (M,g) 为局部共形平坦的 Riemann 流形, 那么 $d(M)$ 仅与 M 的共形平坦结构有关, 而与给定的共形类中度量的选取无关.

证明 设 $\overline{g}$ 是逐点共形于 g 的一个度量, 则在 $\hat{M}$ 上存在某有界正函数 u 使 $\overline{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$. 若以 G 和 $\overline{G}$ 分别表示 g 与 $\overline{g}$ 以 P 为极点的 Green 函数, 则 $\overline{G}=u(P)^{p-1}u^{-1}G$. 于是很显然, 在 $M\setminus\mathscr{O}$ 上, $\overline{G}$ 属于 L^q 当且仅当 G 属于 L^q.

定理 2.7 设 (M,g) 为局部共形平坦的 Riemann 流形, 假若数量曲率 $R\geqslant R_0>0$ 对某个 R_0 成立, 则 $d(M)\leqslant\frac{n-2}{2}$.

证明 只需证明

$$\int_{\hat{M}\setminus\mathscr{O}}G\,dv<\infty, \tag{6.2.5}$$

这里 G 是以 $P\in\hat{M}$ 为极点的最小正 Green 函数. 设 $\{U_i\}$ 与 G_i 如命题 2.4 所示. 若 v_i 为下述问题

$$Lv_i=1, \text{ 在}U_i\text{上}, \quad v_i|_{\partial U_i}=0$$

的解, 则

$$v_i(P)=\int_{U_i}v_iLG_i\,dv=\int_{U_i}G_iLv_i\,dv=\int_{U_i}G_i\,dv.$$

因为 $R \geqslant R_0 > 0$, 极大值原理蕴含

$$\max_{U_i} v_i \leqslant (aR_0)^{-1}.$$

所以 $v_i(P)$ 关于 i 有界, (6.2.5) 成立.

在较弱的假设 $R \geqslant 0$ 下, 我们有

定理 2.8 设 (M,g) 为局部共形平坦流形, $R \geqslant 0$. 以 $\lambda_0(\hat{M})$ 表示在 M 的和乐覆盖上共形 Laplace 算子 的第一特征值. 则

(a) 若 $\lambda_0(\hat{M}) > 0$, 那么 $d(M) \leqslant (n-2)/2$;

(b) 若 $\lambda_0(\hat{M}) = 0$, 那么 $d(M) \leqslant n/2$.

证明 因 $R \geqslant 0$, 故

$$\Delta G_i \geqslant 0, \quad 在U_i \setminus \mathscr{O}上.$$

上式乘以 $G_i^\varepsilon (\varepsilon > 0)$, 分部积分给出

$$\begin{aligned}
&\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} |\nabla G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2\, dv \\
= &-\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \Delta G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\, dv + \int_{\partial\mathscr{O}} G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \frac{\partial}{\partial n} G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\, dv \\
= &-\frac{1+\varepsilon}{2}\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G_i^{2}\Delta G_i + \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} |\nabla G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2 + \int_{\partial\mathscr{O}} G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \frac{\partial}{\partial n} G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

由此可知存在与 i 无关的常数 C, 使得

$$\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} |\nabla G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2\, dv + \frac{1+\varepsilon}{2}\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G_i^\varepsilon \Delta G_i\, dv \leqslant C, \tag{6.2.6}$$

上式左边两项均为非负, 故每项均不大于 C.

在情形 (a) , $\lambda_0(\hat{M}) > 0$, 可用 Poincaré 不等式 得到

$$\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G_i^{1+\varepsilon}\, dv \leqslant C_\varepsilon,$$

由 ε 之任意性, 可知 $d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}$.

再考虑情形 (b) , 此时 $\lambda_0(\hat{M}) = 0$. 我们有

$$\left(\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G_i^{\frac{(1+\varepsilon)p}{2}}\, dv\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant Q(U_i\setminus\mathscr{O}) E_{U_i\setminus\mathscr{O}}\left(G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right). \tag{6.2.7}$$

由定理 2.2， $Q(U_i \setminus \mathscr{O}) = Q(S^n)$. 另一方面，

$$E_{U_i\setminus\mathscr{O}}\left(G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right) = \int_{U_i\setminus\mathscr{O}} |\nabla G_i^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2\,dv + a\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} RG_i^{1+\varepsilon}\,dv.$$

由 (6.2.6)，上式右方第一项被 C_ε 所控制. 对于第二项，利用在 $U_i \setminus \mathscr{O}$ 上，$LG_i = 0$, 即得

$$a\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} RG_i^{1+\varepsilon}\,dv = \int_{U_i\setminus\mathscr{O}} G^\varepsilon \Delta G_i\,dv,$$

后者由 (6.2.6) 也是有界的，故从 (6.2.7) 可得 $d(M) \leqslant (1+\varepsilon)\frac{n}{2}$. 由 ε 之任意性，即得 $d(M) \leqslant n/2$.

定理 2.9 设对某个 $R_0, R \geqslant R_0 > 0$. 又假设 $|R|$ 与 $|\nabla R|$ 均有界，且存在常数 $b_0 > 0$ 使得 $\mathrm{Ric}\,(g) \geqslant -b_0 g$. 那么存在 $\varepsilon_0 \in (0,1)$ 使 $d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}(1-\varepsilon_0)$.

证明 由定理 2.5，

$$\int_{\hat{M}\setminus\mathscr{O}} G\,dv < \infty.$$

为此需要利用曲率条件以改进此估计. 令 $B_r = B_r(P), B_b = B_b(P)$, 这里 $0 < r < b$. 构造两个切割函数 ϕ 与 $\eta \in C_0^\infty(\hat{M})$ 如下：

$$\phi \equiv 0 \text{ 在 } \hat{M} \setminus B_{2b} \text{ 上，} \quad \phi \equiv 1 \text{ 在 } B_b \text{ 上，} 0 \leqslant \phi \leqslant 1, \text{ 且 } |\nabla\phi| \leqslant 2b^{-1},$$
$$\eta \equiv 1 \text{ 在 } M \setminus B_{r+1} \text{ 上，} \eta \equiv 0 \text{ 在 } B_r \text{ 上，} 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \text{ 且 } |\nabla\eta| \leqslant 2.$$

于是有

$$\int_{B_{2b}\setminus B_{r+1}} G\,dv \leqslant \int_{\hat{M}\setminus B_r} \phi\eta G\,dv.$$

因在 $\hat{M} \setminus B_r$ 上， $\Delta G - aRG = 0$, 故

$$\begin{aligned} aR_0 \int_{\hat{M}\setminus B_r} \phi\eta G\,dv &= \int_{\hat{M}\setminus B_r} \phi\eta\Delta G\,dv \\ &= \int_{\hat{M}\setminus B_r} (\phi\nabla\eta + \eta\nabla\phi)\cdot\nabla G\,dv \\ &\leqslant 2C\left(\int_{B_{r+1}\setminus B_r} G\,dv + b^{-1}\int_{B_{2b}\setminus B_b} G\,dv\right), \end{aligned}$$

其中我们用了在第一章推导过的梯度估计 $|\nabla G| \leqslant CG$. 注意，调和函数的梯度估计在 $|R|$ 以及 $|\nabla R|$ 均为有界的条件下，可以推广到 $Lu \equiv -\Delta u + aRu = 0$ 的

解 u 上. 现在, 让上面不等式中的 $b\to\infty$, 即得

$$\int_{\hat{M}\setminus B_r} G\,dv \leqslant C_1\int_{B_{r+1}\setminus B_r} G\,dv,$$

其中 C_1 是与 r 无关的常数. 由此可得

$$\int_{\hat{M}\setminus B_{r+1}} G\,dv \leqslant \frac{C_1}{C_1+1}\int_{\hat{M}\setminus B_r} G\,dv.$$

由此即知

$$\int_{\hat{M}\setminus B_N} G\,dv \leqslant \lambda^{N-1}\int_{\hat{M}\setminus B_1} G\,dv,$$

其中 $\lambda=C_1(1+C_1)^{-1}<1$, 而 N 为任意的正整数. 此外再注意, 在条件 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant -b_0g$ 下, 对于第一章命题 4.3 的证明加以适当修改, 可以推得

$$\mathrm{Vol}\,(B_N)\leqslant C_2N^ne^{cN},$$

其中 $c=(b_0+1)/2$, 而 C_2 是与 N 无关的常数. 应用 Hölder 不等式即得

$$\begin{aligned}\int_{\hat{M}\setminus B_1} G^{1-\varepsilon_0} &= \sum_{N=2}^{\infty}\int_{B_N\setminus B_{N-1}} G^{1-\varepsilon_0}\,dv\\ &\leqslant \sum_{N=2}^{\infty}\left(\int_{\hat{M}\setminus B_{N-1}} G\,dv\right)^{1-\varepsilon_0}\mathrm{Vol}\,(B_N\setminus B_{N-1})^{\varepsilon_0}\\ &< C_3\sum_{N=2}^{\infty}\lambda^{(N-2)(1-\varepsilon_0)}N^{n\varepsilon_0}e^{cN\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

令 ε_0 充分小使级数收敛, 即知定理 2.9 成立.

下面将考虑 $M\subset S^n$ 为 n 维球面的某一区域的情形. 将用 $d(M)$ 来估计 M 的边界 ∂M 的 Hausdorff 维数. 为此, 需要 $\mathbb{R}^n$ 中子集的 Hausdorff 测度以及容度的概念.

设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 对 $d\in[0,n]$, 令

$$H_d(A)\equiv C_d\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left\{\sum r_i^d : A\subset B_{r_i}(x_i), r_i<\varepsilon\right\}.$$

这里 $C_d=\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$, 而 $B_r(x)$ 表示中心为 x 、半径为 r 的开球. $H_d(A)$ 称为 A 的 d 维 Hausdorff 测度 . 从定义可见, 若 A 为 Lebesgue 可测, 则 $H_n(A)$

就是 A 的 Lebesgue 测度. A 的 Hausdorff 维数 定义为

$$\dim(A) = \inf\{d \geqslant 0 : H_d(A) = 0\}.$$

下面介绍 $\mathbb{R}^n$ 中紧集 K 的容度的概念. 对 $q > 1$, K 的 q- 容度 $C_q(K)$ 定义为

$$C_q(K) \equiv \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^q \, dv : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \phi \text{在} K \text{的某个邻域上} \equiv 1\right\}.$$

当 $q = 2$ 时, $C_2(K)$ 称为 K 的 Newton 容度 .$\mathbb{R}^n$ 中紧集的 Hausdorff 测度与它的 q- 容度之间存在以下的关系 (见 D. R. Adams 与 N. G. Meyers 的论文, Indiana Univ. Math. J., 22(1973), 873-905.)

定理 2.10 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集, $1 < q \leqslant n$. 则有

(1) 若 $H_{n-q}(K) < \infty$, 那么 $C_q(K) = 0$;

(2) 若 $H_{n-q+\varepsilon}(K) > 0$ 对某 $\varepsilon > 0$ 成立, 则 $C_q(K) > 0$.

今设 M 是 S^n 的一个区域, $g = u^{p-2}g_0$ 为 M 的共形度量, 则可定义 M 上的以 P 为极点的 " Green 函数 " $\overline{G}$ 如下:

$$\overline{G} \equiv u(P)^{p-1}u^{-1}G_0, \tag{6.2.8}$$

其中 G_0 是以 P 为极点的关于 S^n 上的标准度量 g_0 的共形 Laplace 算子 的 Green 函数.

定理 2.11 设 M 为 S^n 的子区域, $g = u^{p-2}g_0$ 为 M 上完备的共形度量. 又设 G 是以 P 为极点的关于 g 的共形 Laplace 算子的最小正 Green 函数 , 且 $G = \overline{G}$, 其中 $\overline{G}$ 定义如前. 那么 $C_2(\partial M) = 0$, 且 $d(M) \geqslant \dim(\partial M)$.

证明 可以认为 P 是 S^n 的北极. 设 $\Psi : S^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n$ 为球极投影 . 为证 $C_2(\partial M) = 0$, 只需证 $C_2(\Psi(\partial M)) = 0$. 由于 G 为最小小正 Green 函数, 故 $G = \lim G_k$, 而 G_k 满足

$$\begin{cases} LG_k = \delta_P, & \text{在} U_k \text{上}, \\ G_k|_{\partial U_k} = 0, & k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

其中 U_k 为 M 的一列穷举有界区域. 设 $\hat{G}_k = |\Psi'|^{-\frac{n+2}{2}} G_k \circ \Psi^{-1}$ 为 $\Psi(U_k) \backslash \{P_k\} \equiv$

Ω_k 上关于 $\mathbb{R}^n$ 的欧氏度量的 Green 函数，则有

$$\begin{cases} \Delta \hat{G}_k = 0, & \text{在}\Omega_k\text{上}, \\ \hat{G}_k|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \hat{G}_k(\infty) = C_n, \end{cases}$$

这里 C_n 是仅与 n 有关的正常数. 上述最后一个等式的成立是因为有 (6.2.8)，在北极的邻域内，下面的渐近展开 式成立：

$$G = C_n(1 - x^{n+1})^{-\frac{n+2}{2}} + O(1 - x^{n+1}),$$

其中 x^{n+1} 是 $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的第 $n+1$ 个坐标. 直接计算可得

$$\hat{G} = |\Psi'|^{-\frac{n+2}{2}} G_0 \circ \Psi^{-1} = a + O(r^{1-n}), \tag{6.2.9}$$

$$|\nabla \hat{G}| = O(r^{-n}), \quad (r \to \infty). \tag{6.2.10}$$

现在补充定义函数 $\hat{G}_k$ 在 U_k 之外的值为 0. 令 η 为如下光滑的切割函数：$\eta \equiv 1$ 在 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 上，$\eta \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus B_2$ 上，且 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. 对 $R \gg 1$, 定义

$$\phi_{R,k}(x) \equiv \eta\left(\frac{x}{R}\right)[1 - C_n^{-1}\hat{G}_k(x)],$$

可知在 $\Psi(\partial M)$ 的一个邻域上，$\phi_{R,k} \equiv 1$. 此外，

$$\begin{aligned} &\lim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi_{R,k}|^2 \, dx \\ =& \int_{B_{2R} \setminus B_R} R^{-2} |\nabla \eta|^2 \left(\frac{x}{R}\right)(1 - C_n^{-1}\hat{G})^2 + C_n^{-2} \int_{B_{2R}} \eta^2 \left(\frac{x}{R}\right) |\nabla \hat{G}|^2 \\ &-2C_n^{-1}R^{-1} \int_{B_{2R} \setminus B_R} \eta(1 - C_n^{-1}\hat{G}) \nabla \eta \left(\frac{x}{R}\right) \cdot \nabla \hat{G}. \end{aligned}$$

根据 (6.2.9), (6.2.10), 上式右方第一和第三个积分在 $R \to \infty$ 时的阶为 $O(R^{1-n})$. 另一方面，第二个积分不超过

$$C_n^{-2} \int_{B_{2R}} |\nabla \hat{G}|^2 \, dx = C_n^{-2} \int_{\partial B_{2R}} \hat{G} \frac{\partial \hat{G}}{\partial r} \, ds = O(R^{-1}).$$

选取 $R_k \to \infty$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi_{R_k,k}|^2 \, dx \to 0,$$

这就证明了 $C_2(\partial M)=0$.

由于 $C_2(\partial M)=0$, 定理 2.10 断言 $\dim(\partial M)\leqslant n-2$. 令 $q>\frac{2}{n-2}d(M)$, 于是 $\int_{M\setminus\mathscr{O}}G^q\,dv_g<\infty$. 因为 $G=\overline{G}$, 这等价于

$$\int_M u^{p-q}\,dv_0<\infty,$$

这里 $p=2n/(n-2)$, 而 dv_0 表示 g_0 的体积元. 现以 $\eta_R(x)$ 表示 M 上的一族切割函数, 使得 $\eta_R\equiv 1$ 在 $B_R(P)$ 上, $\eta_R\equiv 0$ 在 $M\setminus B_{2R}(P)$ 上, 这里 $B_R(P)$ 表示中心在 P, 半径为 R 的关于度量 g 的测地球. 我们还要求 $|\nabla\eta_R|\leqslant 2R^{-1}$. 以 $\nabla_0\eta$ 表示 η_R 关于度量 g_0 的梯度, 于是

$$|\nabla_0\eta_R|=u^{\frac{2}{n-2}}|\nabla\eta_R|.$$

令 $s=n-\frac{n-2}{2}q$, 于是当 $R\to\infty$ 时, 我们有

$$\int_M|\nabla_0\eta_R|^2\,dv_0\leqslant(2R^{-1})^s\int_M u^{p-q}\,dv_0\to 0.$$

这里已经用到 M 是完备流形这一条件. 现在注意, $1-\eta_R$ 可以用来估计 ∂M 的 S- 容度, 从而 $C_S(\partial M)=0$. 再由定理 2.10 , $\dim(\partial M)\leqslant n-s=\frac{n-2}{2}q$. 令 $q\to p(M)$, 即得 $\dim\,(\partial M)\leqslant d(M)$, 这就证明了定理 2.11.

定理 2.12 设 M 为 S^n 的子区域, $g=u^{p-2}g_0$ 为 M 上完备的共形度量, 使得曲率有界, 并且数量曲率 R_g 关于 g 具有有界的梯度. 令 $\delta(x)=\mathrm{dist}(x,\partial M)$, 这儿的距离由 g_0 所诱导. 那么存在某常数 $C>0$ 使得

$$u(x)\geqslant C\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}},\quad\forall x\in M.$$

证明 设 $P\in M$. 因 $S^n\setminus\{P\}$ 共形于 $\mathbb{R}^n$, 通过球极投影 , 可以将度量拉回到 $\mathbb{R}^n$, 使得在欧氏坐标系下,

$$g_{ij}=v^{p-2}\delta_{ij}.$$

注意, $v^{-(p-2)}g$ 正好是欧氏度量, 特别地, 它的数量曲率为 0. 于是 $L_g v^{-1}=0$, 这里 L_g 为 g 的共形 Laplace 算子 , 因 (M,g) 完备, 且有有界的曲率, 此外 R_g 的梯度也为有界, 我们仿照第一章中关于正调和函数梯度估计的证明方法, 类似地证明

$$|\nabla_g\log v|\leqslant C.$$

如关于欧氏度量求 v 的梯度，即得

$$|\nabla_0 v| = v|\nabla_0 \log v| = v^{\frac{n}{n-2}}|\nabla_g v| \leqslant Cv^{\frac{n}{n-2}}.$$

这样就得到 $|\nabla_0(v^{-\frac{2}{n-2}})| \leqslant C$. 现在，对任意 $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, 用 γ 表示连接 x 与 ∂M 的线段 (这里将 M 等同于在球极投影 下 M 的象). 上述梯度估计给出，对任意点 $y \in \gamma$,

$$v(x)^{-\frac{2}{n-2}} \leqslant C\delta(x) + v(y)^{-\frac{2}{n-2}}.$$

由 g 的完备性，即得

$$\gamma \text{的} g\text{- 长度} = \int_\gamma v^{\frac{2}{n-2}}\, dt = +\infty.$$

所以存在一列 $y_i \in \gamma$ 使得 $v(y_i) \to \infty$, 由上面不等式，即知

$$v(x) \geqslant C\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

最后注意 $g = v^{p-2}\, dx^2 = u^{p-2}g_0$, 与 dx^2 在 ∂M 邻域内等价. 因此也有

$$u(x) \geqslant C\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

这就证明了定理.

6.3　局部共形平坦流形在 S^n 上的嵌入

本节证明相当一大类局部共形平坦流形等价于 S^n 上的区域. 建立这个结论所需的主要条件是，要求在上节引进的不变量 $d(M)$ 充分地小. 结论如下:

定理 3.1　设 (M, g) 为 n 维完备 Riemann 流形， $\Phi: M \to S^n$ 为共形映射. 假设对 $n \geqslant 5$, 数量曲率 $R_g \geqslant -C$ ；而当 $n = 3, 4$ 时， $|R_g| \leqslant C$. 若

$$d(M) < \frac{(n-2)^2}{n},$$

那么 Φ 是 M 与 $\Phi(M) \subset S^n$ 之间的一个共形微分同胚. 此外，$\partial\Phi(M)$ 的 Newton 容度 为 0.

显然要证 Φ 为微分同胚，只需证明它是单射. 注意，共形映射 Φ 的存在性已经蕴含 (M, g) 上最小正 Green 函数的存在性. 这可从命题 2.4 的证明过程中

见到. 现设 $P \in M$, G 表示以 P 为极点的共形 Laplace 算子 L 的最小正 Green 函数 ，如命题 2.4 的证明，定义

$$\overline{G} = |\Phi'|^{\frac{n-2}{2}} G_0 \circ \Phi,$$

其中 G_0 是 S^n 上共形 Laplace 算子 L_0 的以 $y = \Phi(P)$ 为极点的 Green 函数. 已经知道 $\overline{G}$ 满足

$$L\overline{G} = \sum_{Q \in \Phi^{-1}(y)} |\Phi'(Q)|^{\frac{n+2}{2}} \delta_Q, \tag{6.3.1}$$

因此为证 Φ 为单射，只要证 $G = \overline{G}$.

证明 $G = \overline{G}$ 的途径是考虑函数 $v \equiv G/\overline{G}$, 然后证明 $v \equiv 1$. 为此，先注意如下事实.

引理 3.2 函数 $v \equiv G/\overline{G}$ 关于度量 $\overline{g} = \overline{G}^{p-2} g$ 是正调和函数，在以 P 为心的法坐标下,

$$v(x) = 1 + h(x), \quad h \in C^\infty \text{ 且 } h = O(|x|^{n-2}).$$

此外， $\overline{g}$ 是平坦度量.

证明 先证 $\overline{g}$ 是平坦度量. 注意 $G_0^{p-2} g_0$ 是 $S^n \setminus \{y\}$ 上的平坦度量. 事实上，若 $\pi : S^n \setminus \{y\} \to \mathbb{R}^n$ 为球极投影，则

$$\pi^*(dx^2) = G_0^{p-2} g_0.$$

这表示 $G_0^{p-2} g_0$ 等距于 $\mathbb{R}^n$ 的欧氏度量. 此事实留给读者自己验证. 现在

$$\begin{aligned}
\Phi^* \circ \pi^*(dx^2) &= \Phi^*(G_0^{p-2} g_0) \\
&= (G_0 \circ \Phi)^{p-2} \Phi^* g_0 = (G_0 \circ \Phi)^{p-2} |\Phi'|^2 g \\
&= \overline{G}^{p-2} g \equiv \overline{g},
\end{aligned}$$

因此通过映射 $\pi \circ \Phi$, $\overline{g}$ 局部等距于欧氏度量.

其次要证明 v 是调和的，即

$$L_{\overline{g}} v = \Delta_{\overline{g}} v = 0.$$

事实上，我们有 $\bar{g} = \overline{G}^{p-2} g = \left(\frac{G}{v}\right)^{p-2} g$, 故由共形 Laplace 算子的共形不变性（见 (6.2.2)），在 $M \setminus \{P\}$ 上，

$$L_{\bar{g}} v = L_g G = 0.$$

另一方面，由最小 Green 函数 G 的结构（见命题 2.4 的证明）可得 $G \leqslant \overline{G}$, 故 $0 \leqslant v \leqslant 1$, 这表示 v 在 P 点光滑，且在整个 M 上是调和的.

注意，通过共形形变，如果需要的话，可以假设，在 P 的邻近，$R_g \geqslant 0$, 从而对 L 可应用极大值原理. 根据极大值原理，以及在 P 点邻域 G 与 $\overline{G}$ 的性质，可知在 P 的邻域，$\overline{G} \leqslant (1+\varepsilon)G$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立（见第二章附录 (A.1)). 于是

$$v(P) = \lim_{x \to 0} G(x)/\overline{G}(x) = 1.$$

现在，若 $v = 1 + h$, 则 $\overline{G} - G = hG$, 且 $L(hG) = 0$ 在 $B_\delta(P) \setminus \{P\}$ 上成立. 但 $hG = O(|x|)G = O(|x|^{3-n})$, 故 P 为可去奇点（见第五章定理 3.5 的证明）. 这表明 hG 实际上是光滑的，从而 $h = O(|x|^{n-2})$.

引理 3.3 设 (M, g) 是完备的，$\Phi : M \to S^n$ 为共形映射，又设 $R_g \geqslant -C$ 对某个常数 C 成立，则

$$\lim_{\sigma \to \infty} (\sup\{G(x) : \rho(x, P) \geqslant \sigma\}) = 0,$$

其中 $\rho(\cdot, \cdot)$ 表示 g- 距离.

证明 由命题 2.5，$\int_{M \setminus \mathscr{O}} G^p \, dv < \infty$, 故

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{\{x : \rho(x,P) \geqslant \sigma\}} G^p \, dv = 0.$$

因此定理的证明归结为建立如下的估计：

$$G(x) \leqslant C \left(\int_{B_1(x)} G^p \, dv \right)^{1/p}, \quad \forall x \in M \setminus B_2(P). \tag{6.3.2}$$

首先注意，由 Sobolev 不等式（见定理 2.2），对任意 $\phi \in C_0^\infty(M \setminus B_1(P))$, 有

$$\left(\int_M |\phi|^p \, dv \right)^{2/p} \leqslant Q(S^n)^{-1} \int_M (|\nabla \phi|^2 + a R_+ \phi^2) \, dv, \tag{6.3.3}$$

其中 R_+ 表示 R 的正部. G 所满足的方程以及 R 的下界可以推出，存在某个常数 C, 使

$$\Delta G - aR_+G \geqslant -CG.$$

设 $q \geqslant 2n/(n-2) = p$ 为常数，上述不等式乘以 $G^{q-1}\phi^2$, 再进行分部积分，就得到

$$\begin{aligned}&(q-1)\int_M \phi^2 G^{q-2}|\nabla G|^2\,dv + a\int_M \phi^2 G^q R_+\,dv\\ \leqslant\ & 2\int_M \phi G^{q-1}|\nabla\phi||\nabla G|\,dv + C\int_M G^q\phi^2\,dv.\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

注意，对任意 $\alpha > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}2\int_M \phi G^{q-1}|\nabla\phi||\nabla G|\,dv \leqslant\ & \alpha\int_M \phi^2 G^{q-2}|\nabla G|^2\,dv\\ &+\frac{1}{2}\int_M |\nabla\phi|^2 G^q\,dv.\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

在 (6.3.5) 中令 $\alpha = q-2$, 联合 (6.3.4) 即得

$$\begin{aligned}&\int_M \left(\phi^2 G^{q-2}|\nabla G|^2 + aR_+\phi^2 G^q\right)dv\\ \leqslant\ & \frac{1}{q-2}\int_M |\nabla\phi|^2 G^q\,dv + C\int_M \phi^2 G^q\,dv.\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

在 (6.3.5) 中令 $\alpha = 1$, 再由 (6.3.6)，就有

$$\begin{aligned}&2\int_M \phi G^{q-1}|\nabla\phi||\nabla G|\,dv\\ \leqslant\ & \frac{q-1}{q-2}\int_M |\nabla\phi|^2 G^q\,dv + C\int_M \phi^2 G^q\,dv.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}&\int_M \left[|\nabla(\phi G^{q/2})|^2 + aR_+\phi^2 G^q\right]dv\\ \leqslant\ & \int_M \left(|\nabla\phi|^2 G^q + q|\nabla\phi||\nabla G|\phi G^{q-1} + \frac{q^2}{4}\phi^2 G^{q-2}|\nabla G|^2 + aR_+\phi^2 G^q\right)dv\\ \leqslant\ & aq^2\int_M \left(|\nabla\phi|^2 + \phi^2\right)G^q\,dv.\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

应用 Sobolev 不等式 (6.3.3)，我们有

$$\left[\int_M \left(\phi Q^{q/2}\right)^p dv\right]^{2/p} \leqslant Cq^2 \int_M G^q \left(|\nabla\phi|^2 + \phi^2\right) dv, \tag{6.3.8}$$

其中 C 是与 q 无关的常数. 下面将按如下的方式,

$$q_0 = p = 2r,\ q_k = q_0 r^k,\ \text{其中} r = \frac{n}{n-2},$$

重复应用 (6.3.8).

定义一列切割函数如下. 置 $a_0 = 1, a_k = 1 - \sum_{i=1}^k 3^{-i} (k \geqslant 1)$. 对每个 k, 要求函数 $\phi_k \in C_0^\infty(M)$ 满足

$$\phi_k = \begin{cases} 1, & y \in B_{a_k}(x), \\ 0, & y \notin B_{a_{k-1}}(x), \end{cases}$$

$$0 \leqslant \phi_k \leqslant 1,\quad |\nabla\phi_k| \leqslant 2\cdot 3^k.$$

反复应用 (6.3.8)，即有

$$\begin{aligned} &\left(\int_{B_{a_{k+1}}} G^{q_{k+1}}\, dv\right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \\ \leqslant &\left(Cq_k^2\right)^{1/q_k} \left(4\cdot 3^{2k+2} + 1\right)^{1/q_k} \left(\int_{B_k} C^{q_k}\right)^{1/q_k} \\ \leqslant &\prod_{j=1}^k (Cr^{2j})^{1/pr^j} \left(\int_{B_1} G^p\, dv\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时，上述乘积收敛，故得

$$\sup_{y\in B_{\frac{1}{2}}(x)} C(y) \leqslant C\left(\int_{B_1(x)} G^p\, dv\right)^{1/p}.$$

这就完成了证明.

引理 3.4 存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \{P\})$,

$$\int_M \phi^2 |\nabla \log \overline{G}|^2\, dv \leqslant C \int_M \left(\phi^2 |\nabla \log G|^2 + |\nabla\phi|^2\right) dv.$$

证明 除极点外，我们有

$$\begin{aligned}\Delta \log \overline{G} &= \overline{G}^{-1}\Delta\overline{G} - |\nabla \log \overline{G}|^2 \\ &= aR_g - |\nabla \log \overline{G}|^2 \\ &= G^{-1}\Delta G - |\nabla \log \overline{G}|^2 \\ &= \Delta \log G + |\nabla \log G|^2 - |\nabla \log \overline{G}|^2.\end{aligned}$$

上式乘以 ϕ^2, 再分部积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_M \phi^2 |\nabla \log \overline{G}|^2\, dv \\ \leqslant& \int_M \phi^2 |\nabla \log G|^2\, dv + 2\int_M \phi\nabla\phi \cdot \nabla\left(\log\overline{G} - \log G\right)\, dv.\end{aligned}$$

应用 Schwarz 不等式，我们见到，存在 $C>0$ 使得

$$\int_M \phi^2|\nabla \log \overline{G}|^2\, dv \leqslant C\int_M \left(\phi^2|\nabla \log G|^2 + |\nabla\phi|^2\right)\, dv. \tag{6.3.9}$$

定理 3.1 的证明 我们只需证明 $v = G/\overline{G} \equiv 1$. 以下我们在某个量或某个算子上方加上短划“ - ”，表示它们是关于度量 $\overline{g} = \overline{G}^{p-2} g$ 的量或算子，这里的度量 $\overline{g}$ 就是引理 3.2 的平坦度量.

令 $q = 2(n-2)/n$. 先证存在常数 C, 对任意 $\phi \in C_0^\infty(M)$, 成立

$$\int_M \phi^2 |\overline{\nabla} v|^{q-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2\, dv_{\overline{g}} \leqslant C\int_M |\overline{\nabla}\phi|^2 \overline{G}^q |\overline{\nabla} v|^q\, dv_{\overline{g}}. \tag{6.3.10}$$

由于 $\overline{g}$ 平坦且 $\overline{\Delta} v = 0$, 直接计算表明

$$\overline{\Delta}|\overline{\nabla} v|^2 = 2|\overline{\nabla}\,\overline{\nabla} v|^2. \tag{6.3.11}$$

再注意

$$|\overline{\nabla}\overline{\nabla} v|^2 \geqslant \frac{n}{n-1}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2,$$

故对任意 $q>0$, 由 (6.3.11) 可得

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} v|^q &= \frac{q}{2}|\overline{\nabla} v|^{q-2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} v|^2 + \frac{q(q-2)}{4}|\overline{\nabla} v|^{q-4}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v|^2|^2 \\ &\geqslant q\left(\frac{n}{n-1} + q - 2\right)|\overline{\nabla} v|^{q-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2,\end{aligned}$$

故若 $q > (n-2)/(n-1)$, 我们得到

$$\overline{\Delta}|\overline{\nabla} v|^q \geqslant C_q |\overline{\nabla} v|^{q-2} |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2$$

首先考虑 $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \{P\})$ 的情形，对上式乘以 ϕ^2, 再分部积分，就有

$$\begin{aligned}
&\int_M \phi^2 |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2 |\overline{\nabla} v|^{q-2}\, dv_{\overline{g}} \\
\leqslant\ & C_q^{-1} \int_M \phi^2 \overline{\Delta} |\overline{\nabla} v|^q\, dv_{\overline{g}} \\
\leqslant\ & 2q C_q^{-1} \int_M |\phi| \overline{\nabla}\phi| |\overline{\nabla} v|^{q-1} |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||\, dv_{\overline{g}}.
\end{aligned}$$

应用 Schwarz 不等式，即得

$$\int_M \phi^2 |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2 |\overline{\nabla} v|^{q-2}\, dv_{\overline{g}} \leqslant C_q' \int_M |\overline{\nabla}\phi|^2 |\overline{\nabla} v|^q\, dv_{\overline{g}}.$$

再把右方积分变换为关于度量 g 的相应积分，于是对 $q = 2(n-2)/n$ ($\geqslant (n-2)/(n-1)$ 当 $n \geqslant 3$ 时)，即得相应不等式 (6.3.10).

现在注意，对 $\phi \in C_0^\infty(M)$, (6.3.10) 对 $\psi_r \phi$ 成立，其中 ψ_r 是切割函数使得在 $B_r(P)$ 上， $\psi_r \equiv 0$, 而在 $M \setminus B_{2r}(P)$ 上， $\psi_r \equiv 1$, 且 $0 \leqslant \psi_r \leqslant 1$. 此外还满足 $|\nabla \psi_r| \leqslant 2r^{-1}$. 这里 $r > 0$ 充分小使得 $B_r(P)$ 关于 g 是半径为 r 的测地球. 对 $\psi_r \phi$ 应用 (6.3.10)，即有

$$\begin{aligned}
&\int_M \psi_r^2 \phi^2 |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2 |\overline{\nabla} v|^{q-2}\, dv_{\overline{g}} \\
\leqslant\ & C_1 \int_M |\nabla\phi|^2 |\nabla v|^q \overline{G}^q\, dv + C_2 \int_M \phi^2 |\nabla \psi_r|^2 |\nabla v|^q \overline{G}^q\, dv.
\end{aligned}$$

当 $r \to 0$ 时，最后的积分有阶 $O(r^{n-2-q}) \to 0$, 故 (6.3.10) 对任意的 $\phi \in C_0^\infty(M)$ 成立.

下面将证明，

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(P)} |\overline{\nabla} v|^{q-2} |\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2\, dv_{\overline{g}} \\
\leqslant\ & C\rho^{-2} \int_{B_{4\rho}(P) \setminus B_{\rho/2}(P)} G^q \left(1 + |\nabla \log G|^2\right) dv, \qquad (6.3.12)
\end{aligned}$$

其中 $\rho>0$ 充分大, C 为某常数. 我们将利用 (6.3.10). 注意

$$\begin{aligned}\overline{G}^q|\nabla v|^q &= |\nabla G - G\overline{G}^{-1}\nabla\overline{G}|^q \\ &\leqslant C\left(|\nabla G|^q + G^q|\nabla\log\overline{G}|^q\right).\end{aligned}$$

故若取 $\phi\in C_0^\infty(M)$ 使 $\phi\equiv1$ 在 $B_\rho(P)$ 上, $\phi\equiv0$ 在 $M\setminus B_{2\rho}(P)$ 上, $0\leqslant\phi\leqslant1$ 且 $|\nabla\phi|\leqslant2\rho^{-1}$, 则 (6.3.10) 右方被

$$C\rho^{-2}\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho}\left(|\nabla G|^q + G^q|\nabla\log\overline{G}|^q\right)dv$$

所控制. 由于 $q\leqslant2$,

$$|\nabla G|^q\leqslant C\left(G^q+G^{q-2}|\nabla G|^2\right)=CG^q\left(1+|\nabla\log G|^2\right).$$

故从 (6.3.11) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho(P)}|\overline{\nabla}v|^{q-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^2\,dv_{\overline{g}} \\ \leqslant\ & C\rho^{-2}\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho}G^q\left(1+|\nabla\log\overline{G}|^2+|\nabla\log\overline{G}|^2\right)dv.\end{aligned}$$

为证 (6.3.12), 在引理 3.4 中令 $\phi=\psi G^{q/2}$, 这里 $\psi\in C_0^\infty(M\setminus\{P\})$. 于是即得

$$\begin{aligned}&\int_M\psi^2G^q|\nabla\log\overline{G}|^2\,dv \\ \leqslant\ & C\int_M\left(\psi^2G^q|\nabla\log G|^2+|\nabla\left(G^{q/2}\psi\right)|^2\right)dv \\ \leqslant\ & C\int_M\left(\psi^2|\nabla\log G|^2+|\nabla\psi|^2\right)G^q\,dv.\end{aligned}$$

适当选取切割函数 ψ, 我们就容易从以上两不等式导出 (6.3.12).

下面一步要证明估计

$$\int_{B_\rho}|\overline{\nabla}v|^{q-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^2\,dv\leqslant C\rho^{-2}\int_{M\setminus B_{\rho/4}}G^{q_1}\,dv, \tag{6.3.13}$$

其中 $q_1=q=2(n-2)/n\ (n\neq4), q_1\in(\frac{1}{3},1)(n=4)$.

首先考虑 $n \geqslant 5$ 的情形. 此时 $q > 1$, 再由 $R_g \geqslant -C$ 可得

$$\Delta G \geqslant -aCG, \quad 在M \setminus \{P\}上.$$

将此式乘以 $\phi^2 G^{q-1}$, 而 $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \{P\})$, 再由分部积分法可得

$$\int_M G^{q-2}|\nabla G|^2 \phi^2 \, dv \leqslant aC \int_M G^q \left(|\nabla \phi|^2 + \phi^2\right) \, dv.$$

适当选取 ϕ 并利用 (6.3.12)，这就证明了 (6.3.13).

再考虑 $n = 3$ 的情形, 其中 $g = 2/3$. 因 $|R_g| \leqslant C$,

$$\Delta G \leqslant aCG, \quad 在M \setminus \{P\}上.$$

再乘以适当的 $\phi^2 G^{q-1}$ 后，分部积分给出

$$\begin{aligned}&(1-q)\int_M \phi^2 G^{q-2}|\nabla G|^2 \, dv \\ \leqslant\ & 2\int_M \phi G^{q-1}|\nabla \phi||\Delta G| \, dv + aC\int_M G^q \phi^2 \, dv,\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

同样可得 (6.3.13).

对 $n = 4$ 的情形， $q = 1$ 此时不能用 (6.3.14). 但可取 $q_1 < 1$, 再应用引理 3.3，可知 G 在 $M \setminus B_1(P)$ 上有界. 注意，以 q_1 代替 q, (6.3.12) 仍然成立. 因此以 q_1 代替 (6.3.14) 中的 q, 我们仍然能导出 (6.3.13)，这就建立了 (6.3.13).

现在可以证明 $v \equiv 1$ 了. 由假设

$$p(M) = \frac{2}{n-2}d(M) < \frac{2(n-2)}{n} = q,$$

故存在 $q_i > p(M)$ 以及 $q_i \to p(M)$ 使得

$$\int_{M \setminus B_1(P)} G^{q_i} \, dv < \infty.$$

令 i 充分大使 $q_i < q$. 再由引理 3.3，即得

$$\int_{M \setminus B_1(P)} G^q \, dv \leqslant C^{q-q_i} \int_{M \setminus B_1(P)} G^{q_i} \, dv < \infty, \tag{6.3.15}$$

其中 C 为 G 在 $M \setminus B_1(P)$ 上的最大值. 结合 (6.3.13) 与 (6.3.15)，再令 $\rho \to \infty$, 可得

$$|\nabla \overline{v}| = \text{const}.$$

又因

$$|\overline{\nabla}v|(P)=\overline{G}^{-1}|\nabla G-v\nabla\overline{G}|(P)=0,$$

故 $\overline{\nabla}v=0$, 即 $v=$ 常数. 但 $v(P)=1$, 故 $v\equiv 1$, 这就证明了 Φ 为共形微分同胚.

最后, $C_2(\partial\Phi(M))=0$ 是定理 2.11 的推论, 从而我们完全证明了定理 3.1.

假如我们在定理 3.1 中假设 $R_g\geqslant 0$, 那么条件 $d(M)\leqslant(n-2)^2/n$ 并非必要. 但要得到这样的结果, 还必须利用以下形式的正质量定理.

正质量定理 设 (M,g) 为完备的 Riemann 流形, 满足 $R_g\geqslant 0$, 又设 $M=M_0\cup M_\infty$, 其中 M_0 是完备流形, M_∞ 是一个阶为 $n-2$ 的渐近平坦的末端, 且在渐近坐标系下,

$$\begin{aligned}&g_{ij}=\left(1+A|y|^{2-n}\right)\delta_{ij}+h_{ij},\\&h_{ij}=O\left(|y|^{1-n}\right),\ \partial h_{ij}=O\left(|y|^{-n}\right),\ \partial^2h_{ij}=O\left(|y|^{-n-1}\right).\end{aligned}$$

那么 $A\geqslant 0$.

注 与第五章定理 3.7 的假设相比较, 此处的差别是, M_0 的条件是以完备代替紧性.

定理 3.5 设 (M,g) 为完备的 Riemann 流形, 满足 $R_g\geqslant 0$. 如果 $\Phi:M\to S^n$ 为共形映射, 那么 Φ 为单射且 $\partial\Phi(M)$ 的 Newton 容度为 0.

证明 类似于定理 3.1 的证明, 只需证明 $G=\overline{G}$, 此处 G 是以 $P\in M$ 为极点的最小正 Green 函数, 而 $\overline{G}$ 是 S^n 上 (以 $\Phi(P)$ 为极点) 的 Green 函数的拉回. 在引理 3.2 中已证 $\overline{g}=\Phi^*\circ\pi(dx^2)$.

注意, 度量 $\overline{g}$ 未必完备, 因为 G 在无穷远处趋于 0. 所以不能将正质量定理直接应用于 $\overline{g}$, 而代之以 $\overline{g}_\varepsilon=(G+\varepsilon)^{p-2}g$, 后者当 $\varepsilon>0$ 时显然是完备的, $\overline{g}_\varepsilon$ 的数量曲率是

$$\begin{aligned}R_\varepsilon&=a^{-1}(G+\varepsilon)^{p-1}L(G+\varepsilon)\\&=a^{-1}(G+\varepsilon)^{p-1}\varepsilon R_g\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

这样对 $\varepsilon > 0$, 正质量定理可以应用于 $\overline{g}_\varepsilon$. 现在

$$\begin{aligned}\overline{g}_\varepsilon &= [(G+\varepsilon)/\overline{G}]^{p-2}\overline{g}\\ &= \left(v+\varepsilon\overline{G}^{-1}\right)^{p-2}\Phi^*\circ\pi^2(dx^2)\\ &= \Phi^*\circ\pi^*\left(v_\varepsilon^{p-2}\,dx^2\right),\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

此处 $v = G/\overline{G}$ 由引理 3.2 是光滑的, 而 v_ε 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 无穷远的某个邻域内, 满足

$$\Phi^*\circ\pi^*(v_\varepsilon) = v+\varepsilon\overline{G}^{-1}.$$

但由引理 3.2 , $v(x) = 1+h(x), h\in C^\infty, h(x) = O(|x|^{n-2})$, 故从 (6.3.16) , 在由 $\pi\circ\Phi : B_\delta(P)\setminus\{P\}\to\mathbb{R}^n\setminus B_R$ 定义的坐标系, 度量 g_ε 满足

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\varepsilon ij} &= v_\varepsilon^{p-2}\delta_{ij}\\ &= \left(1+A_\varepsilon|y|^{2-n}\right)\delta_{ij}+h_{ij},\end{aligned}$$

其中 $h_\varepsilon = O(|y|^{1-n}), \partial h_\varepsilon = O(|y|^{-n}), \partial^2 h_\varepsilon = O(|y|^{-n-1})$. 故从正质量定理, $A_\varepsilon \geqslant 0(\varepsilon > 0)$. 令 $\varepsilon\to 0$, 得

$$\overline{g}_{ij} = v^{p-2}\delta_{ij} = \left(1+A|y|^{2-n}\right)\delta_{ij}+h_{ij}, \tag{6.3.17}$$

而 $A\geqslant 0$.

现在回忆, 在新的渐近平坦坐标内, $v(y)\leqslant 1 = \lim\limits_{y\to\infty} v(y)$, 且 $v(y)$ 关于欧氏度量为调和函数. 因此可比较函数 $1-v(y)$ 与 $|y|^{-n}$, 它们在球 B_R 之外均为调和函数, 由此可知

$$1-h(y)\geqslant \min_{\partial B_R}(1-v)\left|\frac{y}{R}\right|^{2-n}.$$

但这与 (6.3.17) 矛盾, 除非 $v(y)\equiv 1$, 至此我们证明了 $v\equiv 1$, 或等价地, $G\equiv\overline{G}$, 从而证明了定理 3.5.

6.4 局部共形平坦流形的拓扑

我们先介绍 Klein 群的概念. 设 $\Gamma\subset C_n$ 为 S^n 的共形变换群 的子群. Γ 称为在点 $P\in S^n$ 是真不连续的 (properly discontinuous) , 如果以下条件均被满足:

(i) 迷向子群 $\Gamma_P = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(P) = P\}$ 是有限的;

(ii) 存在 P 的一个邻域 U, 使得 $\gamma(U) = U, \forall\gamma \in \Gamma_P$, 以及 $\gamma(U) \cap U = \varnothing, \forall\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_P$;

(iii) 对于不在同一条 Γ- 轨道的任意两点 x 与 y, 存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V, 使得 $U \cap \Gamma(V) = \varnothing$.

我们把 $\Omega(\Gamma) = \{P \in S^n : \Gamma \text{在} P \text{是真不连续的}\}$ 称为 Γ 的不连续区域. 显然, $\Omega(\Gamma)$ 是 S^n 上的 Γ 不变 的开集.

定义 4.1 设 Γ 为 C_n 的子集，若 $\Omega(\Gamma) \neq 0$, 则 Γ 称为 Klein 群.

不难证明，任何 Klein 群总是离散的，且至多是可数的. 其次，我们定义

$$\Lambda(\Gamma) = \{x \in S^n : \exists\gamma_k \in \Gamma \text{及} y \in S^n \text{使得} \gamma_k(y) \to x\}$$

为 Γ 的极限集. 它是 Γ 的极小闭不变子集. 若 Γ 是 Klein 群，且 $\Lambda(\Gamma)$ 不超过两个点，则 Γ 称为基本群 (elementary group).

现若 Γ 自由作用在 $\Omega(\Gamma)$ 上，即 Γ 在 $\Omega(\Gamma)$ 内无不动点，则 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 便是一个局部共形平坦流形 (可能不连通). 下面的结果表明，有一大类局部共形平坦流形就是 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 的形式，其中 Γ 为 Klein 群.

定理 4.1 设 (M, g) 是 n 维完备局部共形平坦流形, 满足以下两条件之一:

(1) 当 $n \geqslant 5$ 时， R_g 有下界；而当 $n = 3, 4$ 时， $|R_g|$ 有界且 $d(M) \leqslant (n-2)^2/n$;

(2) $R_g \geqslant 0$.

那么， $\hat{M} = \widetilde{M}$ (即和乐覆盖正好是万有覆盖), 展开映射 $\Phi : \widetilde{M} \to S^n$ 为单射，和乐表示 $\rho : \pi_1(M) = C_n$ 为 1–1 表示，且 $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ 为 C_n 的离散子群. 若 M 为紧流形，则 $\Omega = \Phi(\widetilde{M})$ 为 Γ 的不连续区域 且 $M = \Omega/\Gamma$.

证明 对 $\widetilde{M}$ 应用定理 3.1 或者定理 3.5 , 可知展开映射 $\Phi : \widetilde{M} \to S^n$ 为单射，这表示和乐覆盖 $\hat{M}$ 就是万有覆盖 $\widetilde{M}$, 因此 ρ 为单射. 令 $\Omega = \Phi(\widetilde{M})$, 注意 $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ 在 Ω 上的作用是真不连续的，这是因为在映射 Φ 之下， Γ 的作用共轭于 $\pi_1(M)$ 在 $\widetilde{M}$ 上的作用，而 $\pi_1(M)$ 在 $\widetilde{M}$ 上的作用是真不连续的. 这就证明了 Γ 是 Klein 群，从而它为 C_n 的离散子群.

因为 $\partial\Omega (= S^n \setminus \Omega)$ 在 Γ 下是不变的闭子集, 故 $\Lambda(\Gamma) \subset \partial\Omega$, 从而 $\Omega(\Gamma) \subset \Omega$. 若 M 紧， $x \in \partial\Omega$, 则 x 的任意邻域必与一个紧的基本区域 $F \subset \Omega$ 的无穷多个

平移相交，从而 $\partial\Omega \subset \Lambda(\Gamma)$. 因此 $\partial\Omega = \Lambda(\Gamma)$, 且 $\Omega = \Omega(\Gamma)$. 又因 $\Omega = \Phi(\widetilde{M})$, 而 Φ 为共形微分同胚，显然有 $M = \Omega/\Gamma$. 这就完成了定理 4.1 的证明.

对 Klein 群 Γ, 现引入指标为 $\delta > 0$ 的 Poincaré 级数 如下：

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma'(x)|^{\delta},$$

再定义

$$\delta(\Gamma) = \inf\{\delta > 0 : \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma'(x)|^{\delta} < \infty,\ \forall x \in S^n\}.$$

下面是 Patterson 与 Sullivan 的结果.

定理 设 $d(\Lambda) = \dim\Lambda(\Gamma)$ 为 Klein 群 Γ 的极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 的维数. 若 Γ 不是基本的，则

$$\delta(\Gamma) = d(\Lambda).$$

由此定理可得

定理 4.2 设 (M, g) 为紧的局部共形平坦流形，又设展开映射 $\Phi : \widetilde{M} \to S^n$ 和 $\rho : \pi_1(M) \to C_n$ 均为单射，且 $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ 不是基本的，那么 $d(M) = d(\Lambda)$.

证明 只要证 $d(M) = \delta(\Gamma)$. 注意，在定理的假设下，可以认为 $\widetilde{M}$ 为 S^n 的一个区域，而 $g = u^{p-2}g_0$, 其中 u 为 Γ- 不变的正函数.

设 $P \in \widetilde{M}$, 而 $\mathscr{O}$ 为 P 的开邻域，又设对某个 $q > 0$,

$$\int_{\widetilde{M}\setminus\mathscr{O}} G^q\, dv < \infty,$$

这里 G 是 $\widetilde{M}$ 上以 P 为极点的最小正 Green 函数， 而 $F \subset \widetilde{M}$ 是基本区域且 $\mathscr{O} \subset F$. 于是有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma,\gamma\neq \mathrm{id}} \int_F G^q(\gamma(x))\, dv < \infty. \tag{6.4.1}$$

回忆 Γ 的作用是等距的，故 $G(\gamma(x)) = G_\gamma(x)$, 此处 $G_\gamma(x)$ 为以 $\gamma^{-1}(P)$ 为极点的 $\widetilde{M}$ 上的最小正 Green 函数 . 此外，又因 F 是紧的，且不含 G_γ 的极点 ($\gamma \neq \mathrm{id}$)，故由 Harnack 不等式， 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\max_F G_\gamma \leqslant C \min_F G_\gamma,\quad \forall\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}.$$

这表明 (6.4.1) 等价于

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} G_\gamma^q(x)<\infty,\quad \forall x\in F.$$

今若以 $\overline{G}$ 表示 (S^n,g_0) 上以 P 为极点的共形 Laplace 算子 的 Green 函数，则 $G(x)=u(P)^{p-1}u(x)^{-1}\overline{G}(x)$. 于是 (6.4.1) 也等价于

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} u(\gamma(x))^{-q}<\infty,$$

这是因为 $\overline{G}$ 在 S^n 上的下界是正的. 由于 γ 是关于 g 的等距，我们有

$$\begin{aligned} u^{p-2}g_0&=g\gamma^*g=\gamma^*(u^{p-2}g_0)\\ &=u(\gamma(x))^{p-2}|\gamma'|^2g_0,\\ u(\gamma(x))&=u(x)|\gamma'(x)|^{\frac{2-n}{2}}, \end{aligned}$$

从而 (6.4.1) 等价于

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma'(x)|^{\frac{(n-2)q}{2}}<\infty,$$

这就给出了 $d(M)=\delta(\Gamma)$.

定理 4.3 设 Γ 为 Klein 群，不连续区域 为 Ω. 又设 $M=\Omega/\Gamma$ 是紧的. 那么存在相容的度量 g 且 $R_g\geqslant 0$ 的充分且必要的条件为 $d(\Lambda)\leqslant\frac{n-2}{2}$.

证明 先设 $R_g\geqslant 0$. 由定理 2.8， $d(M)\leqslant\frac{n-2}{2}$, 除非 $\lambda_0(\widetilde{M})=0$. Brooks 的一个定理（见 Comm. Math. Helv., 56(1981), 581-598 ）指出， $\lambda_0(\widetilde{M})=0$ 只可能发生在 $\pi_1(M)$ 为顺从群的情形，这样， $\pi_1(M)$ 不能含有非 Abel 自由子群. 但任意非基本的 Klein 群必含有一非 Abel 自由子群, 故 $\gamma\cong\pi_1(M)$ 必为基本的. 换句话说，极限集 Λ 含有一或二点，所以 $d(\Lambda)=0<\frac{n-2}{2}$.

反之，设 $d(\Lambda)\leqslant\frac{n-2}{2}$, 我们要证明存在相容度量 g 且 $R_g\geqslant 0$. 由于 M 的紧性，由引理 2.1 ，可以找到相容度量 g 使得在 M 上有 $R_g\geqslant 0$ 或 $R_g<0$. 在后一情况，必有常数 $C>0$, 使 $R_g\leqslant -C$. 将 g 提升到 Ω, 仍记为 g. 那么它是 Ω 上的完备度量，且 $R_g\leqslant -C$. 令 G 为以 $P\in\Omega$ 为极点的 (Ω,g) 上最小 Green 函数，又令 $\mathscr{O}=\{x\in\Omega:G(x)>1\}$, 则 $\mathscr{O}$ 是 P 的一个开邻域，由引理 3.3 ，它有紧的闭包. 现 $LG=0$, 此处 L 为 (Ω,g) 的共形 Laplace 算子，故

$$\Delta G\leqslant -CG.$$

设 $\delta>0$, 直接计算可知

$$\Delta G^{1+\delta}\leqslant -(1+\delta)CG^{1+\delta}+\delta(1+\delta)G^{-1+\delta}|\nabla G|^2.$$

由于 g 是从紧流形 M 上提升得到的，故 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant -C$ 对某常数 C 成立．应用第一章梯度估计即得在 $\Omega\setminus\mathscr{O}$ 上,

$$|\nabla G|^2\leqslant CG^2. \tag{6.4.2}$$

这样，若 δ 足够小，在 $\Omega\setminus\mathscr{O}$ 上将有

$$\Delta G^{1+\delta}\leqslant -CG^{1+\delta}.$$

现在我们断言

$$\int_{M\setminus\mathscr{O}}G^{1+\delta}\,dv=\infty. \tag{6.4.3}$$

若此式不成立，则必有一列半径 $\rho_i\to\infty$ 使

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\partial B_{\rho_i}}G^{1+\delta}\,d\sigma=0, \tag{6.4.4}$$

其中 B_ρ 表示以 P 为中心， ρ 为半径的测地球，而 $d\sigma$ 为从 g 诱导的 ∂B_ρ 的面积元．将上面式子在 $B_{\rho_i}\setminus\mathscr{O}$ 上积分，应用 Stokes 定理以及法导数 $\frac{\partial G}{\partial n}\geqslant 0$ 在 $\partial\mathscr{O}$ 上成立，即得

$$\int_{\partial B_{\rho_i}}\frac{\partial}{\partial n}G^{1+\delta}\,d\sigma\leqslant -C\int_{B_{\rho_i}\setminus\mathscr{O}}G^{1+\delta}\,dv.$$

由 (6.4.2)，我们有

$$|\frac{\partial}{\partial n}G^{1+\delta}|\leqslant CG^{1+\delta}.$$

故令 $i\to\infty$, 即知与 (6.4.4) 矛盾．这样 (6.4.3) 必须成立，且有 $d(M)>\frac{n-2}{2}$. 若 Γ 不是基本的，则由定理 4.2， $d(\Lambda)=d(M)$, 故证明完成.

现若 Γ 是基本的，那么将有以下三种情形： (1) $\Lambda(\Gamma)$ 为空集； (2) $\Lambda(\Gamma)$ 仅含一个点； (3)$\Lambda(\Gamma)$ 含有两个点．在情形 (1)， Γ 有限，且 $M=S^n\setminus\Gamma$ 有标准度量，其曲率为正．在情形 (2)， Γ 仅有的无穷阶元素必为抛物的，故必有相容的平坦度量 g, 当然有 $R_g=0$. 在情形 (3)， Γ 仅有的两个无穷阶元素必为

双曲的，从而 $M \cong S^1 \times S^{n-1}$，此时必存在相容的度量使数量曲率为正常数．这就完全证明了定理 4.3.

定理 4.4 设 (M,g) 为 n 维完备的局部共形平坦流形，又设存在正整数 $2 \leqslant k < n$ 使得

$$d(M) < \min\left\{n-k-1, \frac{(n-2)^2}{n}\right\}.$$

假如当 $n \geqslant 5$ 时，$R_g \geqslant -C$，而当 $n=3,4$ 时，$|R_g| \leqslant C$，其中 C 为某正常数，那么对 $i=2,3,\cdots,k$，

$$\pi_1(M)=0. \tag{6.4.5}$$

证明 由定理 3.1，通过展开映射，M 的万有覆盖 $\widetilde{M}$ 可以看成 S^n 的一个区域．而定理 2.11 指出，$\dim(\partial\Omega) \leqslant d(M) < n-k-1$．为证 (6.4.5)，只需证明，对任意连续映射 $f_0 : S^i \to \Omega$，它必同伦于常值映射，或等价地，存在连续映射 $f : B^{i+1} \to \Omega$ 且 $f|_{\partial B^{i+1}} = f_0$，此处我们已将 S^i 视为单位球 B^{i+1} 的边界.

由一小的扰动，不妨认为 f_0 是浸没（注意 $i \leqslant k < n$）．由于 $f_0(S^i) \subset \Omega$，而 Ω 为 S^n 的子区域，可以延拓 f_0 成为浸没 $F_0 : B^{i+1} \to S^n$ 使 $F_0|_{S^i} = f_0$．这样，可以再延拓 F_0 成为浸没 $F : B^{i+1} \times B^{n-i-1} \to S^n$，满足

$$F(s,t) = f_0(s), \quad \forall s \in S^i, t \in B^{n-i-1},$$
$$F(x,0) = F_0(x), \quad \forall x \in B^{i+1}.$$

对任意 $t \in B^{n-i-1}$，令 $B_t^{i+1} = B^{i+1} \times \{t\}$．利用 Hausdorff 测度 的可加性，知存在常数 C 使

$$\int_{B^{n-i-1}} H_0\left[F^{-1}(\partial\Omega) \cap B_t^{i+1}\right] dt \leqslant C H_{n-i-1}(\partial\Omega),$$

其中 $H_j(\cdot)$ 表示 j 维 Hausdorff 测度．因 $\dim(\partial\Omega) < n-k-1$ 且 $i \leqslant k$，故 $H_{n-i-1}(\partial\Omega) = 0$，从而必有 $t_0 \in B^{n-i-1}$ 使

$$H_0\left[F^{-1}(\partial\Omega) \cap B_{t_0}^{i+1}\right] = 0,$$

这表示

$$F^{-1}(\partial\Omega) \cap B_{t_0}^{i+1} = \varnothing,$$

或 $F\left(B_{t_0}^{i+1}\right) \subset \Omega$. 由于 $F|_{S^i \times \{t_0\}} = f_0$, 可见 $F|_{B_{t_0}^{i+1}}$ 即为所求的映射，这就证明了定理 4.4.

定理 4.5 设 (M, g) 为 n 维局部共形平坦流形, 且对某正常数, $R_g \geqslant C > 0$, 那么对 $i = 2, \cdots, [\frac{n}{2}] - 1$,

$$\pi_i(M) = 0.$$

此外，假如 $|R_g|, |\nabla R_g|$ 有界， Ric (g) 有下界，则

$$\pi_i(M) = 0, \quad i = 2, \cdots, [\frac{n}{2}].$$

证明基本上类似于定理 4.4 的证明，为要得到 $d(M)$ 的上界，应当用定理 2.7 与 2.9.

以下我们要讨论在局部共形平坦流形上，调和形式的消灭定理，作为这些结果的推论，我们将得到这些流形的拓扑限制.

对于 Riemann 流形 (M, g), 我们用 $\Lambda^p(M)$ 表示 M 上光滑的 p- 形式. 回忆度量 g 决定了 Hodge 的 $*$ 算子: $\Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M)$, 其中 n 为 M 的维数. 若 $d: \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$ 为一外微分算子，则 $\delta = (-1)^{n(p-1)+1} * d* : \Lambda^{p+1}(M) \to \Lambda^p(M)$ 是 d 的关于形式的内积的伴随算子，该内积由度量 g 诱导. 调和形式 w 是方程

$$dw = 0, \quad \delta w = 0$$

的解. 若 M 的维数 $n = 2m$, 则 $*$ 算子在中间维是共形不变的，即 $*: \Lambda^m(M) \to \Lambda^m(M)$ 对一切共形度量 $\overline{g} = \rho g$ 是相同的，其中 $\rho \in C^\infty(M), \rho > 0$. 这就说明对 $w \in \Lambda^m(M)$, 方程 $\delta w = 0$ 是共形不变的. 所以，若 $w \in \Lambda^m$ 关于度量 g 为调和形式，那么它对 $\widetilde{g} = \rho g$ 也是调和形式.

今设 $\omega \in \Lambda^p(M)$, 在局部坐标下，我们有

$$\omega = \alpha_{i_1, \cdots, i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

于是有以下的 Weitzenböck 公式 (见 H. Wu)

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + pF(\omega), \tag{6.4.6}$$

其中 $\Delta, \nabla, |\cdot|$ 都是对 M 的 Riemann 度量 g 而言的，而

$$F(\omega) = R_{ij}\alpha^{ii_2\cdots i_p}\alpha^j_{i_2\cdots i_p} + \frac{p-1}{2}R_{ijkl}\alpha^{iji_3\cdots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\cdots i_p}.$$

若 g 为共形平坦度量，则 Weyl 张量为 0 ，而

$$
\begin{aligned}
R^i_{jkl} = & \frac{1}{n-2}\left(R_{jk}\delta^i_l - R_{jl}\delta^i_k - g_{ik}R^i_l - g_{jl}R^i_k\right) \\
& -\frac{1}{(n-1)(n-2)}R_g\left(g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k\right).
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
F(\omega) = \frac{n-2p}{n-2}R_{ij}\alpha^{ii_2\cdots i_p}\alpha^j_{i_2\cdots i_p} + \frac{p!(p-1)}{(n-1)(n-2)}R_g|\omega|^2. \tag{6.4.7}
$$

从 (6.4.7) 可以导出 Boarguignon 的下述结果.

定理 4.6 设 (M,g) 为 $2n$ 维紧的局部共形平坦流形，且 $R_g>0$. 那么 M 没有非零的调和 m- 形式，因此 m- 阶 Betti 数 $b_m=0$.

证明 若在 (6.4.7) 中 $p=m=n/2$, 则含有 Ricci 曲率 的那项为 0 ，从而

$$
F(\omega) = \frac{m!(m-1)}{(2m-1)(2m-2)}R_g|\omega|^2 \geqslant 0.
$$

于是从 (6.4.6) ，

$$
\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \frac{m\cdot m!}{2(2m-1)}R_g|\omega|^2 \geqslant 0.
$$

由于 M 是紧的，故 $|\omega|^2=$const ，又因 $R_g>0$, 故此常数必为 0 ，即 $\omega=0$.

下面给出上述结果的一般化.

定理 4.7 设 (M,g) 为 $2m$ 维完备的局部共形平坦流形，且对某个 C 有 $R_g\geqslant C>0$. 又设 $R_g, |\nabla R_g|$ 均有界，且 Ric(g) 有下界，则在 M 上任意的有界调和 m- 形式必恒为 0.

证明 通过提升至万有覆盖，可以认为 M 是单连通的. 由定理 3.1 ，还可以认为 M 是 S^n 的一个区域，而 $g=u^{p-2}g_0$, 其中 g_0 为 S^n 的标准度量.

今设 ω 为 (M,g) 的调和 m- 形式. 根据对中间维数的调和性的共形不变性，ω 关于度量 g_0 也是调和的，所以只需证明 ω 在 (S^n,g_0) 上是弱的调和形式（即它在弱意义下满足 $d\omega=0, \delta\omega=0$）. 因为由椭圆方程的正则性理论，$\omega$ 可以光滑地延拓到整个 S^n 而成为 (S^n,g_0) 上真正的调和形式. 因为 $H^m(S^n)=0$, 或应用定理 4.6 ，即得 $\omega=0$.

为证 ω 在 S^n 上为弱调和，需要一些估计．首先注意

$$\omega \wedge *\omega = |\omega|_g^2 \, dv_g = |\omega|_{g_0}^2 \, dv_{g_0},$$

其中

$$|\omega|_{g_0}^2 = |\omega|_g^2 \cdot u^p \leqslant C u^p.$$

ω 的弱调和性等价于下式成立：

$$\int_{S^n} d\eta \wedge \omega = \int_{S^n} \delta\xi \wedge \omega, \quad \forall \eta \in \Lambda^{m-1}(M), \xi \in \Lambda^{m+1}(M). \tag{6.4.8}$$

今设 $\phi \in C_0^\infty(M)$ 为任意切割函数，使得在 ∂M 的一个邻域外， $\phi \equiv 1$. 于是由 ω 在 M 上的调和性，可知

$$0 = \int_{S^n} d(\phi\eta) \wedge \omega = \int_{S^n} d\phi \wedge \eta \wedge \omega + \int_{S^n} \phi d\eta \wedge \omega. \tag{6.4.9}$$

但

$$\begin{aligned}\int_{S^n} d\phi \wedge \eta \wedge \omega &\leqslant C(\eta) \int_{S^n} |d\phi|_{g_0} \cdot |\omega|_{g_0} \, dv_{g_0} \\ &\leqslant C \int_{S^n} |d\phi|_{g_0} u^p \, dv_{g_0} \\ &\leqslant C \left(\int_{S^n} |d\phi|^{\frac{n+2}{2}} \, dv_{g_0} \right)^{\frac{2}{n+2}} \left(\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} \, dv_{g_0} \right)^{\frac{2}{n+2}},\end{aligned}$$

另一方面，定理 2.7 指出

$$\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} \, dv_{g_0} < \infty.$$

对充分小的正数 ε, 我们从定理 2.9 知， $d(M) \leqslant (1-\varepsilon)(n-2)/2$, 于是由定理 2.12， $\dim \partial M \leqslant (1-\varepsilon)(n-2)/2$, 从而

$$C_{\frac{n+2}{2}}(\partial M) = 0.$$

这意味着，存在 $\phi_k \in C_0^\infty(M)$, 在 M 的任意紧子集上， ϕ_k 一致地趋于 1，使得

$$\int_{S^n} |d\phi_k|^{\frac{n+2}{2}} \, dv_{g_0} \to 0.$$

现在，在 (6.4.9) 中以 $\phi = \phi_k$ 代入，且令 $k \to \infty$, 即有

$$\int_{S^n} d\eta \wedge \omega = 0.$$

同理可证 (6.4.8) 的第二式成立. 这就证明了 ω 是弱性调和的, 从而也完成了定理 4.7 的证明.

6.5 与偏微分方程的关系

本节将讨论下面两问题之间的关系:

(1) 在区域 $\Omega \subset S^n$ 上具有正常数曲率完备共形度量的构造的几何问题;

(2) 方程

$$L_0 u = u^{p-1}, \quad u > 0 \tag{6.5.1}$$

弱解研究的偏微分方程问题, 其中 L_0 是关于 S^n 上标准度量 g_0 的共形度量, 而 $p = 2n/(n-2)$.

我们要研究方程 (6.5.1) 的 L^{p-1}- 弱解, 所谓 L^{p-1}- 弱解 u 是指 $u \in L^{p-1}(S^n)$ 且满足

$$\int_{S^n} \left(u L_0 \phi - u^{p-1}\phi\right) dv = 0, \quad \forall \phi \in C^\infty(S^n).$$

此外, 我们还要考虑微分不等式

$$L_0 u \geqslant u^{p-1}, \quad u \geqslant 0. \tag{6.5.2}$$

的 L^{p-1}- 弱解, 这是指 $u \geqslant 0, u \in L^{p-1}(S^n)$ 且满足

$$\int_{S^n} \left(u L_0 \phi - u^{p-1}\phi\right) dv \geqslant 0, \quad \forall \phi \in C^\infty(S^n), \phi \geqslant 0. \tag{6.5.3}$$

本节主要结果如下:

定理 5.1 设 Ω 为 S^n 的一个子区域, $g = u^{p-2}g_0$ 为 Ω 上完备的共形度量使 $R_g \geqslant 1$. 那么 $\dim(S^n \setminus \Omega) \leqslant \frac{n-2}{2}, u \in L^{p-1}(S^n)$, 且存在常数 $\lambda > 0$ 使得 $v = \lambda u$ 满足 (6.5.3). 若 g 有有界的曲率且 $R_g \equiv 1$, 那么存在常数 $\lambda > 0$, 使得 $v = \lambda u$ 为 (6.5.1) 的 L^{p-1}- 弱解.

证明 有关 $\dim(S^n \setminus \Omega) \leqslant \frac{n-2}{2}$ 的结论, 从定理 2.11 和定理 3.5 即得.

为证 (6.3.5) , 首先注意在 Ω 上,

$$L_0 u = a R_g u^{p-1} \geqslant a u^{p-1}.$$

显然，对适当的 $\lambda > 0, v = \lambda u$ 在 Ω 满足

$$L_0 v \geqslant v^{p-1}. \tag{6.5.4}$$

现设 $\eta_\alpha(t)$ 为 $\mathbb{R}^1$ 上满足以下条件的光滑函数，其中 $\alpha > 0$ 为参数使得 $\eta_\alpha(t) = t$（当 $t \leqslant \alpha$ 时）， $\eta_\alpha(t) \equiv \frac{3}{2}\alpha$ （当 $t \geqslant 2\alpha$ 时），此外 $\eta'_\alpha(t) \geqslant 0, \eta''_\alpha(t) \leqslant 0, \forall t$. 于是，我们有

$$L_0(\eta_\alpha(v)) \geqslant \alpha\eta_\alpha(v) - \eta'_\alpha(v)\Delta_0 v.$$

故从 (6.5.4)，在 Ω 上

$$L_0(L\eta_\alpha(v)) \geqslant a\left(\eta_\alpha(v) - \eta'_\alpha(v)v\right) + \eta'_\alpha(v)v^{p-1}. \tag{6.5.5}$$

现在断言， $\eta_\alpha(v)$ 可以光滑地延拓到整个 S^n 上，使得延拓后的 $\eta_\alpha(v)$ 在 S^n 上满足 (6.5.5)，因为 $S^n = \overline{\Omega}$, 事实上，若 G 为以 $P \in \Omega$ 为极点的 (Ω, g) 上的最小 Green 函数，而 G_0 是 (S^n, g_0) 的 Green 函数，则由 (6.2.8)，

$$G = \lambda^{2-p} v^{p-1}(P) v^{-1} G_0.$$

引理 3.3 指出，当 $x \to \partial\Omega$ 时， $G(x) \to 0$, 所以当 $x \to \partial\Omega$ 时， $v(x) \to \infty$. 这表明， $\eta_\alpha(v)$ 在 $\partial\Omega$ 的附近为常数，所以可光滑地延拓.

其次证明 $v \in L^{p-1}(S^n)$. 由定理 2.7，

$$\int_{\Omega\setminus\mathscr{O}} G\, dv_g < \infty,$$

其中 $\mathscr{O}$ 为 P 的一个有界邻域. 将度量改变为 g_0, 即得

$$\int_\Omega v^{p-1}\, dv_{g_0} < \infty,$$

此即 $v \in L^{p-1}(S^n)$.

现将 (6.5.5) 乘以 $\phi \in C^\infty(S^n), \phi \geqslant 0$, 再由分部积分法，可得

$$\int_{S^n} \left[\eta_\alpha(v) L_0\phi + \eta'_\alpha(v)v^{p-1}\phi\right] dv_{g_0} \geqslant a\int_{S^n} \phi\left(\eta_\alpha(v) - \eta'_\alpha(v)v\right) dv_{g_0}.$$

令 $\alpha \to \infty$, 即得 (6.5.3).

最后考虑情形 $R_g \equiv 1$. 此时 $v = \lambda u$ 在 Ω 上满足 (6.5.1)，且函数 $\eta_\alpha(v)$ 满足

$$L_0(\eta_\alpha(v)) = -\eta_\alpha''(v)|\nabla_0 v|^2 + \eta_\alpha'(v)v^{p-1} + a\left(\eta_\alpha(v) - \eta_\alpha'(v)v\right). \tag{6.5.6}$$

注意，我们可以认为 $|\eta_\alpha''(t)| \leqslant C\alpha^{-1}$ 对某个常数 C 成立. 为证 v 满足 (6.5.1) 在弱意义下成立，像上面的证明那样，用 $\phi \in C^\infty(S^n)$ 乘 (6.5.6)，再在 S^n 上积分，只需再证明当 $\alpha \to \infty$ 时，

$$\int_{S^n} \phi\eta_\alpha''(v)|\nabla_0 v|^2\, dv_{g_0} \to 0.$$

但我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^n} \phi\eta_\alpha''(v)|\nabla_0 v|^2\, dv_{g_0}\right| &\leqslant C\alpha^{-1}\int_{\{\alpha\leqslant v(x)\leqslant 2\alpha\}} |\nabla_0 v|^2\, dv_{g_0} \\ &\leqslant 2C\int_{\{v(x)\geqslant\alpha\}} v^{-1}|\nabla_0 v|^2\, dv_{g_0},\end{aligned}$$

故只要证明

$$\int_\Omega u^{-1}|\nabla_0 u|^2\, dv_{g_0} < \infty.$$

从 $\Omega \setminus B_1(P)$ 上梯度估计 $|\nabla G| \leqslant CG$, 知道

$$|\nabla u^{-1}| \leqslant Cu^{-1} + C|\nabla G_0^{-1}|u^{-1}G_0.$$

回到度量 g_0, 即得

$$|\nabla_0 u| \leqslant Cu^{\frac{n}{n-2}}.$$

从而

$$\int_\Omega u^{-1}|\nabla_0 u|^2\, dv_{g_0} \leqslant C\int_\Omega u^{p-1}\, dv_{g_0} < \infty,$$

这就完成了定理 5.1 的证明.

作为上述结果的应用，可以得到 (6.5.1) 的一大类弱解. 例如，若 $\Omega \subset S^n$ 为具有正数量曲率的紧完备局部共形平坦 Riemann 流形的万有覆盖，那么在此基础流形上 Yamabe 问题的解可以提升为在 Ω 上的完备度量，具有有界曲率以及 $R_g \equiv 1$.

现考虑由一个双曲元 $\gamma \in C_n$ 所生成的 Klein 群. 设 P, Q 为 S^n 上 γ 的两固定点, 又令 $\Omega = S^n \setminus \{P, Q\}$. 由于 Ω/Γ 共形微分同胚于 $S^1 \times S^{n-1}$, 后者的度量具有常数量曲率 1, 故 $g = u^{p-2}g_0$ 提供了 (6.5.1) 的一个弱解.

这样的弱解也可通过解常微分方程而获得. 事实上, 只需通过将 $Q = -P$ 的共形变换, 再由方程的对称性将它化为一个常微分方程.

其次, 假设 γ_1 与 γ_2 为 C_n 的两个双曲元素, 它们都有不同的不动点. 又设 Γ 为 γ_1 和 γ_2 所生成的 Klein 群, 而 $\Omega = S^n \setminus \Lambda$, 其中 Λ 为极限集. 那么可以证明 Λ 是一个 Cantor 集, 此外还可以选取 γ_1 与 γ_2 使 Λ 的维数任意小.

人们可以提出如下的问题: 给定 S^n 的一个光滑子流形 N, 是否存在 (6.5.1) 的弱解, 以 N 为其奇异集而且在 $S^n \setminus N$ 上生成一个具常数量曲率 1 的完备度量? 上世纪 80 年代中期, R. Schoen 证明, 若 N 为不少于两个点的有限集, 那么这个问题的答案是对的.

参考文献

[1] M. T. Anderson, The Dirichlet problem of infinity for manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 701–721.

[2] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, **121**(1985), 429–461.

[3] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic PDE's or inequalities of 2nd order, *J. Math. Pure Appl.*, **36**(1957), 235–249.

[4] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations*, Grundlehren der Mathematicschen Wissenschaften 252, Springer-Verlag, 1982.

[5] T. Aubin, Equations differentielles non-linéaires et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures et Appl.*, **55**(1976), 269–296.

[6] T. Aubin, Best constants in the Sobolev imbedding theorem, The Yamabe Problem Seminar on Differential Geometry (1982).

[7] M. S. Berger, On Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **5**(1971), 325–332.

[8] M. Berger, P. Ganduchon, and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne.* Lecture Notes in Math., No. 194, Springer-Vetlag Berlin, New York, 1972.

[9] G. Besson, Sm la maltiplicité de le première valear proper des surfaces Riemanniennes, *Ann. Inst. Fourier Genoble*, **30.1**(1980), 109–128.

[10] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[11] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, in *Problem in Analysis a Symposium in Honor of S. Bochner*, Princeton Univ. Press, 1970, 195–199.

[12] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. Diff. Geom.* **6**(1971), 119–128.

[13] J. Cheeger and S. T. Yau, A lower bound for the heat kernel, *Comm. Pure Appl. Math.*, **84**(1981).

[14] S. Y. Cheng, Eigenvalues and nodal sets. *Comm. Math. Helv.*, **51**(1976), 43–55.

[15] J. F. Escobar and R. M. Schoen, Conformal Metrics with Prescribed Scalar Curvature, in

preprint.

[16] M. P. Gaffney, A special stokes theorem for complete Riemannian manifolds, *Ann. Math.*, **60**(1945), 140–145.

[17] R. Greene and H. Wu, On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions, *Indiana Univ. Math. J.*, **22**(1973), 641–653.

[18] J. Hersch, Quatre propriété isopérimétriques de membranes spheriques homogenes, *C. R. A. S.*, **270**(1970), 1645–1648.

[19] J. Kazdan and F. Warner, Scalar curvature and conformal deformation Riemannian structure, *J. Diff. Geom.*, **10**(1975), 113–134.

[20] N. H. Kuiper, On conformal flat spaces in the large, *Ann. Math.*, **50**(1949), 916–924.

[21] P. Li and S. T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *in Proceeding of Symposium in Pure Math.*, vol **36**(1980), 205—239.

[22] P. Li and S. T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the wlllmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Inv. Math.*, **69**(1982); 269–291.

[23] J. Moser, *On a Nonlinear problem in Differential Geometry, Dynamical Systems* (edited by M. Peixato), Academic Press, New York, 1973.

[24] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan*, **14**(1962), 333–340.

[25] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984) 479–496.

[26] R. Schoen and S. T. Yau, Proof of the positive action conjecture in quantum relativity, *Phys. Rev. Lect.*, **42**(1979), 547–548.

[27] R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.*, **65**(1979), 45–76.

[28] R. Schoen and S. T. Yau, The Geometry and Topology of Manifolds of Positive Scalar curvature, in preparation.

[29] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 723–732.

[30] G. Szegö, Inequalities for Certain eigenvalues of a membrane of given area, *J. Rat. Mech. Anal.*, **3**(1954), 343–356.

[31] G. Talenti, Best constant in sobolev inequality, *Ann. Math. Pure Appl.*, **110**(1976), 353–372.

[32] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, **22**(1968), 265–274.

[33] N. Varopoulos, The poisson kernel on positively curved manifolds, *J. Funct. Anal.*, **44**(1981), 359–380.

[34] I. M. Singer, B. Wong, S. T. Yau, and S. T. Stephen, Yau, An estimate of the gape of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Cl. Sci (4)

121(1985), 319-333.

[35] E. Witt, A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Phys.*, **80**(1981), 381–402.

[36] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osake Math. J.*, **12**(1960), 21–37.

[37] S. T. Yau, Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, *Ind. univ. Math. J.*, **25**(1976), 659–670.

[38] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**(1975), 201–228

[39] S. T. Yau, Nonexestence of continuous convex functions on certain Riemannian manifolds, *Ann. Math.*, **207**(1974), 269–270.

[40] J. Q. Zhong and H. C. Yang, on the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, *Scientia. Sinica*, Vol. XXVII, NO. **12**(1984), 1265–1273.

第七章　问题集

在普林斯顿研究所的几何年的最后一段时间里，许多同行要求给出一个关于未解决的问题的综合报告，在与 Bourguignon, Calabi, Cheng, Kazdau, Li, Schoen, Simon, Treibergs 和 Uhlenbeck 讨论后，我给出了一个六十个问题的清单并作了两次报告．后来，又补充成这个问题集 [1].

我要强调此问题集并非包括所有的问题．问题的选择在很大程度上受到作者个人兴趣的影响，除去少数例外，我并不想提出其他领域中那些与微分几何有密切的关系或者可能采用微分几何的方法来解决的问题.

问题的难度从“初等的”到“高深的”都有．然而，“高深的”问题可能由一个刚入门的学生在短短的几个月时间内给予解决，而“初等的”问题则可能在很长的一段时间内解决不了．我希望这个问题集能够给刚入门的学生一个关于这个方向的简明的概述.

如果不是全部的话，大多数问题是众所周知的．如果一个问题有确定的参考文献或明确是由某个人提出的，那么这将被提到．否则读者可认为此问题是熟知的.

最后，在此对那些看过初稿并提出补正、进一步的讨论及参考文献的数学

[1]本章是根据丘成桐教授以前的一个问题集 (Yau, S. T., Problem Section, Seminar on Differential Geometry, Ann. Math. Stud. Vol. 102, Princeton, Princeton Press, 1982), 并整理综合了 1988 年前的新结果重新编成的.

家们表示感谢. 他们是: F. J. Almgren, Jr., M. Berger, A. Borel, E. Calabi, J. Cheeger, M. Gromov 和 H. B. Lawson, 在此也对 James Mechraz 在整理这些问题和参考文献中给予我的帮助表示感谢.

7.1 曲率及流形上的拓扑

A. 截面曲率

1. (Hopf 猜测) $S^2 \times S^2$ 是否容许一个具有正的截面曲率的度量?

仅有的进展是 Bourguignon 和其他人 [BDS] 关于 Berger[Br1] 的一个结果的改进, 他们证明了在 $S^2 \times S^2$ 的乘积度量的一个邻域上不存在具有正截曲率的度量.

一般地, 我们还没有任何紧致、具非负截曲率的单连通流形不容许一个具严格正截曲率的度量. 是否一个秩大于 1 的紧致单连通对称空间容许一个具正曲率的度量. 最终, 我们将能够把具正曲率的 4 维流形分类 (此刻, 我们只有 S^4 和 $\mathbb{CP}^2$ 两个例子).

2. 在怪 (exotic) 球面上是否有具正曲率的度量?

Gromoll 和 Meyer[GM1] 在一个 Milnor7 维球上找到了一个具非负曲率的度量, 它在一个具较大余维的子集外是严格正曲率. 在 [H1] 中 N. Hitchin 证明了在 "很怪" (very exotic) 的球面上甚至不容许一个具正的纯量曲率的度量.

3. 设 M 为一具非负截曲率的 N 维流形. 是否 M 的第 i 个 Betti 数不大于 N 维环 T^N 的第 i 个 Betti 数?

最近, Gromov[Gr5] 证明了第 i 个 Betti 数具有仅依赖于 i 和 N 的上界. 因此, 若 M 是许多 $\mathbb{CP}^2$ 的连接和, M 不容许一个具非负截曲率的度量.

4. 设 M 为具正曲率的紧致流形, 是否 M 容许一个光滑的、有效的 S^1 作用?

这个问题产生于所有已知的具正曲率的流形的例子都具有许多对称性.

5. 是否有一具非负 Ricci 曲率的紧致单连通流形而它不容许具非负截曲率的度量?

答案似乎是 "是", 且可以试试 N 个 $\mathbb{CP}^2$ 的连接和.

Gromoll 和 Meyer[GM2] 构造了一些具正 Ricci 曲率和负 Euler 示性数的紧流形. 因此, 或者这些流形不容许具非负截曲率的度量, 或者 Hopf 猜想是不成

立的（见问题 8 ）.

6. 所有的具正曲率的流形上的向量丛容许一个具非负截曲率的完备度量吗？

这是理解 Cheeger 和 Gromoll[CG2] 的定理“每一完备的非负曲率流形微分同胚于全测地的紧致非负曲率的子流形的向量丛”的逆的一个尝试. J. Nash[Na] 在关于 Ricci 曲率的类似情况下做了些工作. A. Rigas[Ri] 也在这方面做了些工作.

7. (Chern) 设 M 为一紧致、正曲率流形，是否 $\pi_1(M)$ 的每一 Abel 子群是循环的？

这是由 S. S. Chern 在 Kyoto 微分几何会议上提出的. 他的猜想基于 Preissmann[P] 的定理和空间形式问题的解（见 Wolf[W] ）. 猜想在曲率为负或为正常数的情况下是成立的. 也许对于一个非负曲率的紧流形，$\pi_1(M)$ 中的 Abel 子群的秩由流形的曲率张量的秩所控制，如果我们能适当地定义后者的话. 最近 G. Carisson [Car] 证明若一个 Abel 群自由地作用于 K 个球面的乘积，那么 Abel 群的秩不大于 K.

8. (Hopf) 试证一个具正截曲率的偶数维紧流形的 Euler 示性数为正.

一个值得注意的进展是由 Geroch[G] 提供的一个六维开流形的例子，它有一具正曲率的（非完备）度量和一负的 Gauss-Bonnet-Chern 被积函数. 关于该猜想的详细情况可见 Chern[Ch1].

9. 刻画可作为某一具负曲率的紧致流形的基本群的群.

由 Cartan-Hadamard 定理我们知道该流形是一个 $K(\pi,1)$ ，这给出了该群的条件，例如该群必须是无挠的. Preissmann[P] 定理断定每一 Abel 群是循环的， Milnor[M1] 证明它必有指数增长.

事实上，利用 Margulis[Ma] 的一个结果，我们可以证明一个循环子群的共轭类的数目至少是指数增长的. Eberlein[E] 也证明了该群包含一个非平凡的自由子群. Mumford[Mu] 构造了一个具第一 Betti 数零的代数曲面，以球为覆盖空间. 显然所有该流形的有限覆盖具第一 Betti 数零. 我们能把所有的具负曲率的紧致 Kähler 代数曲面分类吗？ Margulis 的方法将给出更多的结果.

若 M 是维数大于 2 的不可约局部对称空间， A. Borel[Bor] 的一个定理（也可作为 Mostow 的强刚性定理的一个结论）告诉我们，基本群的外 (outer)

自同构群是有限的. 不知是否同一命题对于一般的具负曲率的流形也对. 注意 Mostow 和 Siu[MS] 的例子是一个负曲率流形，不同伦于任何局部对称空间. Millson[Mil] 和 Vinberg[Vi] 构造了具非零第一 Betti 数的双曲流形的例子.

10. 作为前面问题的继续,设 M^{2N} 为具负曲率的紧致流形,是否 $(-1)^N\chi(M) > 0$?

这是 Hopf 猜想的一部分， $N=2$ 时已经解决（见 Chern[Ch2] ）. Singer 建议着眼于 M 的万有覆盖来解决这个问题. 他指出若万有覆盖的 L^2 调和形式除了中间维数的都为零，那么我们可以应用覆盖的指数定理（见 Atiyah[At1]）来证明此命题.

Anderson[An1] 构造了截曲率介于两个负常数之间的单连通流形的例子，它们的 L^2- 调和 P- 形式的维数是无限的. 然而他的例子不能等度同胚于一个紧致流形的万有覆盖.

11. Cohn-Vossen 不等式说明了一个完备曲面的全曲率被它的 Euler 数所控制. Finn[Fi] 和 Huber[Hu] 用几何量研究了它们的差. 问题是如何将这不等式推广到高维情况. 若 M 为一具有限体积和有界曲率的完备流形，什么时候 Euler 数等于 Gauss-Bonnet-Chern 积分？若 M 是局部对称的， Harder[Ha] 证明了这是对的. 当曲率介于两个负常数间，可以证明这是对的. 在一次私人谈话中，Gromov 说只要假设曲率是非正，度量是实解析的，则 Gauss-Bonnet-Chern 积分就是一个整数且为它的 Euler 数.

若 M 是完备的且具非负曲率，Poor[Po], R.Walter[Wa] 及 Greene 和 Wu(定理 9[GWu]) 证明了 Cohn-Vossen 不等式. 当 $\dim M=4$ 时是成立的. 等式成立的几何条件是什么？当 $\dim M=2n, n>2$ 时将会是什么情况？

Cheeger 和 Gromov[CGr1,2] 在满足 $|K|\leqslant C$，体积有界，且某一正规 (normal) 覆盖的单射半径下方有界的完备非紧流形上得到了 Gauss-Bonnet 定理.

12. 设 M_1, M_2 为具负曲率的紧致流形，若 $\pi_1(M_1)=\pi_1(M_2)$，试证 M_1 微分同胚于 M_2.

Cheeger, Gromov[Gr1], Farrell 和 Hsiang[FH] 取得了一些进展. Cheeger 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 M 的第二 Stiefel 丛. Gromov 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 M 的单位切向量丛. Farrell-Hsiang 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 $M\times\mathbb{R}^3$. Farrell-Hsiang 只假设其中一个流形具负曲率.

13. 设 M_1, M_2 为具负曲率的紧致 Einstein 流形. 设 $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ 且 $\dim M_1 \geqslant 3$. 是否 M_1 等距同胚于 M_2 ?

若这两个流形均是局部对称的，这就是 Mostow 的刚性定理.

14. 设 M 为一 N 维紧致流形，我们能否找到一个仅依赖于 N 的正常数 δ_N，使得 M 微分同胚于一个具负的常曲率的流形，只要当 M 的曲率介于 $-1-\delta_N$ 和 -1 之间？

Gromov 和 Thurston[GT] 证明了当 $N \geqslant 4$ 时这是不可能的.

设 M 为一非空间形式（即具常曲率）的具负曲率的紧致局部对称空间. 设 ds^2 为一截曲率介于 -4 和 -1 之间的度量. 是否 ds^2 是一个局部对称度量？

当 $\dim M = 4$ 时，这可容易地从 Euler 和 Pontriagin 数的曲率表示的简单应用获得.

在正曲率的情况，我们也可提出类似的问题.

15. 对 *p.l.* 流形建立合理的曲率概念，以使得可以得到适当的 Pinching 型定理及用曲率表达示性类的公式.

例如，我们希望得到对于正弯曲流形（即在上述意义下有正曲率）的某种类型的 *p.l.* 逼近.

在这一方面， Banchoff 关于 *p.l.* 流形的 Gauss-Bonnet 公式， Regge 对于纯量曲率的建议以及 Cheeger 对于多个曲率不变量的研究 (Cheeger[C3]， [C4]) 等项工作都是有意义的进展.

16. 关于具负曲率的紧致流形的 Poutrjagin 类和 Stiefel-Whitney 类我们能说些什么？例如，这样一个流形的有限覆盖是否是旋的 (spin) ?

17. 证明一个平坦流形的 Stiefel-Whitney 数为零.

这个问题已被 Hamrick 和 Royster[HR] 证实了！

18. 设 M 为一完备的、截曲率 $K \geqslant 0$ 的非紧流形，若在某点 $x, K(x) > 0$，试证 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^N$.

这个猜想提出于 [CG2]. 进一步，一个处处曲率为正但可能除去一低维点集为零的度量能否形变到具正曲率？（见 Gromoll-Mayer[GM1] ）.

19. 设 Ω 为一定义在紧致流形 M 上的代表某一 Pontryagin 类的闭的 $4k$ 形式. 我们能否找一个 M 上的度量使得 Ω 可按 Chern[Ch3] 的意义用曲率形式加以表示？若有其它的拓扑障碍，它们是什么？很明显这种障碍应该存在. 问题

是必须找到一个充分条件.

关于 Chern 类我们能够提出同样的问题. 对第一陈类, 这是由 Calabi 提出并由 [Y] 所解决的. 这个问题的解决将给出对曲率张量的深刻理解.

本节补充

(a) 证明每一具负截曲率的 3 维流形容许一个具常负截曲率的度量.

这是 Thurston 猜想的一个推论, 该猜想称每一 3 维流形可分解为几何片 (geometric pieces).

(b) 证明具正曲率算子的紧致流形容许一个具正常数截曲率的度量.

当 dim= 4 时, 这已被 R.Hamilton 所证明. 最近, J. D. Moore[Mr] 和 M. Micallef 证明, 一个单连通的紧致流形, 如果对应于迷向 2- 平面 (isotropic 2-planes) 的曲率为正, 则流形同胚于球面. 迷向 2- 平面的曲率为正这一条件较截曲率的逐点 $\frac{1}{4}$-Pinching 条件以及正曲率算子的条件都要弱.

能否证明在上述条件下, M 实际上微分同胚于球面?

B. Ricci 曲率

20. 什么是紧致流形的对称张量 T_{ij} 所需满足的充分必要条件以使得能够找到一个度量 g_{ij} 满足: $R_{ij} - R \cdot 2g_{ij} = T_{ij}$? 这里 R_{ij} 和 R 分别为 g_{ij} 的 Ricci 张量和纯量曲率. (在这里可允许 T_{ij} 依赖于 g_{ij} 及其一阶导数.) 若 g_{ij} 是 4 维流形上的 Lorentz 度量, 这刚好是 Einstein 场方程. 若 M 有边界, 则需加上什么样的边界条件?

21. 如 M 为一具正的 Ricci 曲率的完备流形, 那么 M 是否可变形为带边界的紧致流形?

22. 刻画具正 Ricci 曲率的完备流形的基本群的结构.

若流形是紧的, Cheeger-Gromoll[CG1] 的分裂 (splitting) 定理提供了一个相当满意的回答.

非紧的情况更为复杂. 最近, P. Nabonnand[Nab] 在 Bérard-Bergery 的指导下提供了一个具正 Ricci 曲率的非紧致、完备 4 维流形的例子, 它的基本群是无限循环群.

在 3 维情形, Schoen 和 Yau[SY1] 证明了这样的流形与 $\mathbb{R}^3$ 是微分同胚的. 或许能够证明这流形的基本群总是一多循环群 (polycyclic) 的有限扩张.

23. 构造一个 K-3 曲面上的显式度量, 使其 Ricci 曲率为零. 它的存在性已

由 Yau[Y1] 证明. 是否存在 Ricci 曲率为零的 4 维流形不以环面及 K-3 曲面为覆盖空间? 一个简单的未决问题是, 是否这样的流形微分同胚于 S^4 或 $S^2 \times S^2$.

24. 是否每一维数 $\geqslant 3$ 的流形容许一个具负 Ricci 曲率的度量?

在 Gao[Ga] 及 Gao 和 Yau[GY] 中证明了每一紧致三维流形都容许一个具负 Ricci 曲率的度量. 或许每一维数 $\geqslant 3$ 的流形都容许具负 Ricci 曲率的度量存在.

研究具非正 Ricci 曲率的 Kähler 流形的性质仍将是有趣的. 希望能证明 $S^2 \times S^2$ 不容许这样一个度量. 这将表明 $S^2 \times S^2$ 的复结构正好是 Hirzcbruch 曲面所给出的. 有许多具负 Ricci 曲率的单连通的 Kähler 流形的例子 [Y1].

25. 分类具负的 Ricci 曲率的 4 维紧致 Einstein 流形. S^4 是否容许这样一个度量?

Thorpe-Hitchin 不等式 [H2] 给出了这些流形的 Euler 数和指标的某种关系.

26. 寻找常数 $c_N < C_N$ 使得对每一 N, 若流形的 Ricci 曲率满足 $c_N\delta_{ij} \leqslant R_{ij} \leqslant C_N\delta_{ij}$, 则流形容许一个 Einstein 度量.

C. 纯量曲率

27. 分类具非负纯量曲率的完备 3 维流形.

这在广义相对论中是引人注意的问题, 因为 "宇宙" 倾向于具有这样一个度量. 事实上, 在合理的物理假设下 Schoen 和 Yau [SY2] 证明了宇宙中这样一个度量总是存在的.

Schoen-Yau[SY3] 也证明了这种流形的基本群不包含同构于亏格 $\geqslant 1$ 的紧致曲面的基本群的子群. 在紧流形的情况, 这在 [SY4] 中得到了证明. 对于维数大于 3 的情形 Schoen-Yau[SY5] 和 Gromov-Lawson[GL] 对此问题进行了讨论.

28. 分类所有具正纯量曲率的 4 维紧致 Einstein 流形.

29. 证明一个具非负纯量曲率的紧致流形是一个 $K(\pi, 1)$ 当且仅当它是平坦的.

当 $\dim M = 4$ 时, 这已由 Schoen 和 Yau[SY9] 证明了.

30. 证明一个具正纯量曲率的紧致单连通的 3 维流形拓扑同胚于球面. Meeks-Simon-Yau[MSY] 证明了两个 3 维伪球面 (fake three-spheres) 的连接和不容许具正 Ricci 曲率的度量.

后来， R. Hamilton[Hm1] 证明了一个具正 Ricci 曲率的紧致 3 维流形微分同胚于一个空间形式.

31. 分类 $\mathbb{R}^{N+1}$ 中具常纯量曲率的紧致超曲面. 它们是否等度同胚于 S^N ？若它们是凸的，那么答案是对的，这是由 Cheng-Yau[CY1] 证明了的.

32. (Yamabe) 证明紧致流形的任一度量都能共形形变到一个具常纯量曲率的度量. Yamabe[Yam] 发表了一个证明，但 N. Trudinger[Tr] 在 Yamabe 死后发现了一个错误. 然而，正如由 Trudinger 所整理的（也可见 Eliasson[EL] ）Yamabe 原来的证明可用于一大类度量.

Aubin[Au] 在 $S \geqslant 6$ 的情况下证明了更大的一类的情形.

最近， R. Schoen[Sc2] 解决了剩下的情况，因而完全解决了 Yamabe 猜想！他的方法是整体的并利用了推广的正质量定理 [SY8].

现在我们想了解 Yamabe 问题在完备的非紧流形上的情况. 当流形为 S^n 减去一个 Hausdorff 维数小于 $\frac{n}{2}-1$ 的闭子集时， Schoen 问是否存在一个具常正纯量曲率的完备共形平坦度量. 他能够在该集为多于 1 的有限个点的情况下解决这一问题.

7.2 曲率与复结构

33. 设 M 为具非负双截曲率的紧致 Kähler 流形，试证 M 双全纯同胚于局部对称的 Kähler 流形，至少当 Ricci 曲率为正的情况.

若双截曲率是严格正的， M 双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^N$. 这是已被 Mori[Mo] 和 Siu-Yau[SiY1] 证明了的 Frankel 猜想.

当 $n=3$ 时， Bando[Bn] 证明了是对的. Mok 和 Zhong[MZ] 证明了对任意的 n ，若 M 是 Kähler-Einstein 的，则 M 是 Hermite 对称空间.

最近， Cao 和 Chow[CC] 在曲率算子非负的较强的假设下证明了这一猜想. 刚刚不久前，Mok[Mk] 证明了整个猜想.

人们会问：此定理如果仅仅假定 M 的切丛在代数几何的意义下是半正、反典则线丛是正的假定下是否仍然成立？

34. 设 M 为一具正双截曲率的完备、非紧的 Kähler 流形，试证 M 双全纯同胚于 $\mathbb{C}^N$.

我们甚至不知道它是否是 Stein 的，当截曲率是正的，Greene 和 Wu[GWu] 证明了 M 是 Stein 的. 关于使流形为 $\mathbb{C}^N$ 的几何条件可见 Siu-Yau[SiY2].

当仅仅假设双截曲率非负时，人们猜测 M 为一以 $\mathbb{C}^n$ 为纤维的紧致 Hermite 对称空间上的全纯向量丛.

也可以给出此问题的代数几何的陈述.

人们也可回想到下面的问题：每一齐性 Kähler 流形为一以齐性有界域为底，以平坦的齐性 Kähler 流形和一个单连通紧致齐性 Kähler 流形的乘积为纤维的全纯纤维丛.

35. 设 M 为具负的双截曲率的完备、单连通的 Kähler 流形，试证 M 是 Stein 的.

甚至还不知道 M 是否非紧. 具负切丛的紧致曲面是什么？它们是非单连通吗？ B. Wong 指出可把高维的问题化为曲面的情况.

36. 若 M 是完备、具有限体积和有界曲率的 Kähler 流形，那么它是否是某个射影流形的 Zariski 开集？若 M 具负双截曲率， M 是否具有有限的自同构群？

最近， Siu 和 Yau[SiY3] 证明了当截曲率介于两个负常数时，第一个问题的回答是肯定的.

关于第二个问题见 [LY2]， [Ko].

37. 设 M 为一具负截曲率的紧致 Kähler 流形，试证若 $\dim_{\mathbb{C}} M > 1$，则 M 是刚性的，即 M 只有一个复结构.

当 M 被复 2 维球所覆盖时， Yau[Y1] 利用 Kähler-Einstein 度量及 Mostow 的定理证明了这一猜想. 在 M “强负” 的假设下， Siu[Si] 证明了猜想的更一般的情况.

38. 设 M 为一截曲率 $\leqslant -1$ 的单连通、完备的 Kähler 流形，试证 M 上存在有界的全纯函数.

最好能够证明存在 M 到 $\mathbb{C}^N$ 中的有界域上的分支浸入.

在 Riemann 流形上相应的问题是寻找有界调和函数. Anderson [An] 和 Sullivan[Su3] 证明了截曲率介于两个负常数间的单连通、完备的 Riemann 流形上，调和函数在无穷远处的 Dirichlet 问题可解，且是唯一的. 而 Anderson 和 Schoen[AnS] 则进一步证明 Martin 边界和无穷远边界有一自然的等价.

39. 设 M 具正的第一 Chern 类， M 不容许任何全纯向量场，试证 M 容许一个 Kähler-Einstein 度量，这一猜想是由 Calabi 提出的 [Ca1].

一个有关的进展是 Levine[Lev] 给出了一个不容许任何 Calabi[Ca4] 意义下的极值度量的紧致 Kähler 流形.

40. 设 M 为具 Ricci 曲率 0 的完备 Kähler 流形，试证 M 为一紧致 Kähler 流形的 Zariski 开集. 如果这是对的，我们将可以用代数方法将这些流形分类.

41. 将所有的具零纯量曲率的紧致 2 维 Kähler 曲面分类 ([Y2]).

42. 设 M 为一个紧致单连通的辛流形. M 是否容许一个 Kähler 度量？M. Berger 说在 1955 年 Serre 给他举出了一个反例，其中 $\pi_1(M) \neq 0$. 见 [Bs].

对流形上的任一辛结构，可定义一个近复结构. 反过来，对任一近复结构，人们或许可以找到一个相应的辛结构. 是否近复结构在相差一个微分同胚的共轭意义下确定辛结构？甚至对于 $\mathbb{CP}^N$，人们还不知道这后一问题的答案. 虽然 Moser[Mos] 证明了辛结构的单参数族的所有元素在微分同胚下是相互共轭的. 近来的工作可见 Gromov[Gr6] 和 Dozer 的文章.

43. 设 Ω 为 $\mathbb{C}^N$ 中的有界拟凸域， Cheng 和 Yau[CY2] 证明了 Ω 上存在典则的 Kähler-Einstein 度量. 在一般的条件，如 $\partial\Omega \in \mathbb{C}^2$ 下，此度量是完备的. 是否此度量总是完备的？

最近 Mok-Yau[MoY] 证明了一个有界域具完备的 Kähler-Einstein 度量当且仅当它是拟凸的. 这样，就需要进一步研究此度量的边界性质.

44. 研究 Teichmüler 空间上由 Cheng-Yau[CY2] 所构造的 Kähler-Einstein 度量，它和 Bergman 度量之间有什么关系？一般地，若一个区域不全纯同胚于区域的乘积且覆盖某一紧致 Kähler 流形，那么 Kähler-Einstein 度量是否等于 Bergman 度量？

利用 [Y4] 中的 Schwarz 引理，可以证明完备的 Kähler-Einstein 度量总是强于 Caratheodory 度量. 它也将强于 Teichmüler 度量（必须将 Schwarz 引理推广到 Finsler 度量）.

45. 设 M 为一复维数 N 的紧致 Kähler-Einstein 流形，且具负的纯量曲率，Yau[Y1] 证明了 $(-1)^N \frac{2(N+1)}{N} C_1^{N-2} C_2 \geqslant (-1)^N C_1^N$. M 上还有其它这类 Chern 数不等式吗？当 $N=4$ 时， Bourguignon 问是否 $C_4(M)$ 是正的.

46.(Calabi) 设 u 为 $\mathbb{C}^N$ 上实值函数使 $\det \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 1$ 且 $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$

定义了一个完备度量. 证明这度量是平坦的（见 [CA2] ）.

这个问题的困难在于 $\mathbb{C}^N$ 的自同构群太大.

47. 设 M 为具正的全纯截曲率或正的 Ricci 曲率的紧致 Kähler 流形. 试证 M 是有理连通的, 即 M 的任两点可由一串有理曲线来连接.

48. 设 M 为一具负截曲率的紧致 Kähler 流形, 试证 M 以 $\mathbb{C}^N$ 的有界域为覆盖空间. 人们也许能证明一个较弱的命题: M 的万有覆盖有众多的有界全纯函数（见 Mostow-Siu[MS] 的例子）.

49. 设 M_t 为一 Kähler 流形的全纯簇, 设 ds_t^2 为 M_t 的典则 Kähler-Einstein 度量, 在簇 M_t 的退化点处 ds_t^2 有什么性质？

II 的补充

(a) 我们能给出什么拓扑假设使我们可以断言, 一个给定的 4 维可微分流形是否容许一个复结构？（特别地, 我们能否拓扑地刻画那些以球为覆盖的复曲面？这样的曲面必须以欧氏空间为拓扑覆盖, 且 $3C_2(M) = C_1^2(M) > 0$. 这些条件是充分的吗？）若存在两个复结构, 我们是否总能够将其中一个形变为另一个？

是否每一个单连通的 4 维紧致流形都能写成代数曲面和同伦球面的连接和 (connected sum) ？

(b) (Kodaira) 证明每一紧致 Kähler 流形可形变为一个代数流形. 特别地, 是否 $H^{2,0} \neq 0$ 意味着 $H^1(M,C) \neq 0$ ？

(c) 研究超弦 (superstrings) 的物理学家们想构造一个第一 Chern 类为 0 , Euler 示性数为 ±6 , 8 的 3 维 Kähler 流形.

这种流形的某些例子可见 Yau[Y5].

7.3 子流形

50. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致曲面是刚性的, 即我们不能找到 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的连续族使得它们互相间是等距同胚的, 或者是仅相差一个刚性运动.

这是一个古老的问题. 若我们考虑多面体曲面, R. Gonnelly [Co] 给出了一个反例. Sullivan 问是否包围在这些曲面的体积（带符号的）在等度形变下是不变的.

在光滑的情况， Cohn-Vossen 证明了凸曲面的刚性. L. Nirenberg[Nir] 作了推广 Cohn-Vossen 的结果的尝试，考虑满足 $\int K^+ = 4\pi$ 的曲面. 他在不存在多于一个闭渐近 (asymptotic) 线的假设下推广了 Gohn-Vossen 的结果. 关于实解析情况的结果首先由 A. D. Alexandrov[A1] 得到.

51. 设 M 为某一给定的紧致曲面到 $\mathbb{R}^3$ 中的全体浸入所构成的空间. 试证 M 中包含那些 “无穷小刚性” 浸入的子空间在 M 中处于一般位置 (generic). 我们能描述它的补集吗？同样，可以在旋转曲面的范畴中研究同样的问题.

52. Nash 嵌入定理保证了每一流形都能等度嵌入某一欧氏空间，但它没有给予我们这一嵌入的几何性质. 例如，我们希望证明一个具有界 Ricci 曲率和正内射半径的完备流形能够嵌入到较高维的欧氏空间中使得平均曲率是有界的.

53. 我们能够推广 Weyl 的嵌入问题到高维的情况吗？

我们需要证明一个具正截曲率的紧致 N 维流形可等度浸入到 $\frac{N(N+1)}{2}$ 维欧氏空间中.

一个困难是对于这种浸入的不唯一性缺乏了解. P. Griffiths 最近得到关于这个问题的一些新的结果 [BGY].

54. 给定一 2 维流形上的一点 p 的一个邻域的光滑度量，我们能否找到 p 的一个能够等度嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的邻域？

当度量是 C^w 或具严格正或负的曲率时，结论是众所周知的. 而在光滑范畴的反例可见于 Pogorelov[Pg].

C. S. Lin[Lnl, 2] 证明了当 $\nabla K(p) \neq 0$ 和度量是 C^6 的，以及当 $K \geqslant 0$ 在 p 点的某一邻域成立且度量是 C^{10} 时，这是可能的.

55. 我们称一个流形到 $\mathbb{R}^N$ 的等度嵌入是椭圆的，如果对应于每一法线的第二基本形式至少有两个同号的非零特征值 (见 Tanaka[Ta]). 设有两个给定紧流形的椭圆等度嵌入. 它们是否是相互可迭合的 (congruent) ？ Cohn-Vossen 的刚性定理在高维情况下的正确推广是什么？若 M 是具有限面积的 $\mathbb{R}^3$ 的完备浸入曲面且若 K 有界并非正，那 M 是否是刚性的？

56. 著名的 Efimov 定理 [Ef] 说在 $\mathbb{R}^3$ 中没有任何曲率 $\leqslant -1$ 的完备曲面. 我们要问是否在 $\mathbb{R}^N$ 中存在一个 Ricci 曲率小于 -1 的完备超曲面？见 [Y3] 和 [R].

我们也试图推广 Hilbert 定理. 是否 N 维双曲空间形式能够等度嵌入到

$\mathbb{R}^{2N-1}$ 中.

Xavier[X2] 证明了一个非初等的 (non-elementary) 的 N 维完备双曲流形不能等度浸入到 $\mathbb{R}^{2N-1}$ 中.

另一个问题是 $\mathbb{R}^3$ 中 $K=-1$ 的曲面的奇点性质 (见 Hopf[Ho]). 类似于零平均曲率方程的极小流形，我们能否给出一个 $K=-1$ 嵌入方程的弱解的较好的定义？或许在标架丛中考虑是有益的.

57. 寻找一个完备的、负曲率的曲面能够等度地嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 的非平凡的充分条件. 这样的条件也许是曲率下降的速度. 与此有关的是给定 Gauss 曲率的 Dirichlet 问题.

58. 回顾一个 Weingarten 曲面是一个其平均曲率 H 和高斯曲率 K 满足一定的函数关系 $\phi(K,H)=0$ 的曲面，这里 ϕ 为定义于平面上的非奇异函数. 我们想知道是否在紧致曲面中旋转椭圆面可刻画为 $\lambda_1=C\lambda_i^3$ ，这里 λ_i 是主曲率，C 是常数. 一般地，Voss 能证明一个亏格为零的实解析 Weingarten 紧曲面是一个旋转曲面 (见 Hopf[Ho]). 什么是高亏格的紧致、实解析 Weingarten 曲面？它们必须具亏格 1 且为一个管状曲面或旋转曲面吗？

Wente[We] 的 Hopf 猜想的反例 (见问题 63) 是亏格为 1 的解析 Weingarten 曲面，既不是管曲面也不是旋转曲面.

Hopf 证明了对于一个亏格为零的闭的实解析 Weingarten 曲面，$\frac{dk_2}{dk_1}$ (这里 k_1,k_2 为主曲率) 在脐点处只能取 $0,-1,(2k+1)^{\pm1},k\geqslant 1$ 及 ∞. 这命题对于亏格为零的紧致光滑 Weingarten 曲面是否也对？

另一个问题是给出一个 $\mathbb{R}^3$ 中由代数多项式所确定的紧致曲面的内蕴刻画. 我们怎样用度量的不变量来表示多项式的次数？

59. 设 h 为 $\mathbb{R}^3$ 上的实值函数. 寻找合理的 h 的条件以保证我们能找到 $\mathbb{R}^3$ 中具指定亏格同时平均曲率 (或曲率) 为 h 的闭曲面.

F. Almgren 提出了下列见解:

对于 "适当的" h 我们能够在 $\mathbb{R}^3$ 的有界开集 A 的集合中求下列泛函的极大

$$F(A)=\int_A h\,d\,\mathcal{L}^3-(\partial A\text{的面积})$$

来得到具平均曲率 h 及 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致光滑子流形 ∂A.

h 将是一个适当的函数，例如，当它是连续的、有界的，$\mathcal{L}^3$ 是可和的且 $\sup F > 0$，然而 h 与极值曲面 ∂A 的亏格之间的关系还不清楚.

事实上，这个问题是一类极小分割问题的一个特殊情况. 这类问题可见于 [Alm2] 及 Sir W. Thomson(Lord Kelvin)[Th] 的工作. 在 h 的适当的限制下，Bakel'man[Ba] 和 Treibergs-Wei[TW] 对于亏格为零的闭曲面找到了这个问题的解.

60.(Willmore[Wi]) 设 M 为嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致 2 维环面. 设 H 为平均曲率. 是否 $\int_M H^2 \geqslant 2\pi^2$ 且等式成立意味着 M 可以从圆环面经 Mobius 变换后得到？最近，Li-Yau[LiY2] 定义了一个曲面上的共形结构的共形面积的概念. 他们证明了 $\int_M H^2$ 不小于这个面积. 利用这一点，他们证明了 $\int_{\mathbb{RP}^2} H^2 \geqslant 6\pi$ 及 $\int_M H^2 \geqslant 2\pi^2$，若 M 共形等价于方环面 (square torus).

61.(Alexandrov[Al2]) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中凸体的边界曲面. 若 S 的内在半径以 1 为界，那么 S 的最大可能面积是什么？

62.(Milnor[Ko]) 设 Σ 为浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中的完备非紧曲面，λ_1, λ_2 为它的主曲率. 试证在 Σ 上，$|\lambda_1 - \lambda_2|$ 没有大于零的下界或 K 变号或 $K = 0$.

63.(Hopf) 试证一个具常平均曲率的闭曲面 Σ 到 $\mathbb{R}^3$ 中的浸入等度同构于 S^2.

Hopf 证明了在这种情况下 Σ 拓扑同胚于 S^2.Alexandrov[Al] 在 Σ 是嵌入的假设下给出了证明（见 Hopf[Ho]），Reilly[R] 给出了另一证明.

最近，H. Wente 证明了 Hopf 猜想是不对的！特别地，他证明了有具常平均曲率的环面在 $\mathbb{R}^3$ 中的浸入.

64. 证明 Caratheodory 猜想：$\mathbb{R}^3$ 中的每一个闭的凸曲面都至少有两个脐点. 在实解析的情况 Bol[B1] 和 Hamburger[Ham] 给出了证明，但后来有人提出了怀疑 — 见 Klotz[K] 的更正.

65. 我们能定义一个具非正曲率的紧致 C^w- 流形 M 的秩使得当 M 是局部对称空间时该定义与原有的相同吗？设 M 中有一个全测地的平坦的浸入 2 维平面，我们能找到 M 中的一个浸入全测地环面吗？（见 Gromoll 和 Wolf[GW]，Lawson 和 Yau[LY2].）若 M 的“秩”大于 1，人们期望 M 有强的度量刚性. 我们该怎样描述这个刚性？

第一个问题已被 Ballman，Brin，Eberlein 和 Spatzier[BBE], [BBS] 证明

是对的.

66.(Kuiper) 设 M 为由 $\mathbb{RP}^2$ 附上一个柄得到的曲面. M 能够浸入 $\mathbb{R}^3$ 后具“两片”性质，即每一与曲面相割的平面都把它正好分成两部分吗？

见 Kuiper 在 Chern 纪念论文集中的概述.

7.4 谱

67.(Kac) 设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个光滑区域，它们的 Laplace 算子作用于 Ω_1 和 Ω_2 的具零边界条件的函数有相同的特征值 (计算重数). 那么盘 Ω_1 是否与 Ω_2 等度同胚？

这是一个古老的问题. 对于闭流形，我们可提出类似问题. 然而，答案是否定的. Milnor[M2] 和 Vigneras[V] 给出了反例，后者给出了具负曲率的 2 维反例.

Urakawa[Ur] 证明了存在 $\mathbb{R}^n\ (n \geqslant 4)$ 的两个 (非凸) 区域，关于 Dirichlet 问题和 Neumann 问题都具有同样的谱，但不等度同胚.

68. 在问题 67 中，假设 Ω_1 和 Ω_2 的谱在除去有限个外都相同，那么这两个谱是否是相同的？当这个例外集是零密度的 (density zero) 无限集时我们可问类似的问题.

69. 设 $g(t)$ 为一紧致流形上具同一 Laplace 的谱的单参数度量族. 试证 $g(t)$ 是相互等度的.

Guillemin 和 Kazhden[GK] 证明了当流形为具负曲率的曲面或当维数大于 2 的但满足适当的负 Pinching 条件时这是对的.

Gordon 和 Wilson[GWi] 找到了一紧致流形上具同一谱的非平凡的连续度量族. 另外，所有已知的具同谱的流形是局部等度同胚的.

70. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界域，λ_i 为 Laplace 作用于边值为零的函数的谱 (从此以后都计算重数在内). 试证

$$\lambda_i \geqslant \frac{4\pi i}{\mathrm{Area}\,(\Omega)}.$$

这是由 Polya[Po] 提出的，并证明了 Ω 能够铺砌 (tile)$\mathbb{R}^2$ 的情况. 我们也可以对 Neumann 问题提出类似的问题 (把不等号换一个方向).

Weyl 渐近公式告诉我们 $\lambda_i \sim \frac{4\pi i}{\mathrm{Area}\,(\Omega)}$. Li 和 Yau[LiY3] 证明了

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \geqslant \frac{2\pi K^2}{\mathrm{Area}\,(\Omega)},$$

因此在上面渐近公式的意义下这是精确的. 这说明在平均的意义下 Polya 猜想是对的.

71. 设 M 为一 2 维紧致闭曲面. 我们能否找到一个万有常数 C 使得

$$\frac{\lambda_i}{i} \leqslant \frac{C(g+1)}{\mathrm{Area}\,(M)},$$

这里 g 为 M 的亏格. 若 M 微分同胚于 S^2 ，是否 $\lambda_i(M)$ 不大于 $\lambda_i(S^2)$ ？这里 S^2 取使其曲率为 $\dfrac{4\pi}{\mathrm{Area}\,(M)}$ 的度量.

当 $i=1$ 时，已经知道这是对的. Hersch [He] 证明了 M 与 S^2 微分同胚的情况. Yang 和 Yau[YY] 证明了 M 可定向， $g>0$ 的情况. 最近 P. Li 和 Yau [LiY4] 对于不可定向曲面找到了类似的界.

72. 研究曲率负且有界，体积有限的完备流形的离散谱，什么时候它是非空的？它的渐近性质是什么？与闭测地线有什么关系？

设 $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y>0\}\setminus\varGamma$, 这里 $\varGamma$ 为 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的一个 Congruent 子群，有一个老的猜想是 λ_1 至少是 $\frac{1}{4}$. Selberg [Se] 证明了 $\lambda_1 \geqslant \frac{3}{16}$.

研究具有限体积的一般完备流形的连续谱也是很重要的. 我们希望对于这些流形能得到某种类型的对于椭圆算子的 L^2 指标定理.

73. 2 维和 3 维的具负曲率的紧致流形的谱的性质是有很大区别的. 例如, R. Schoen[Sc1] 证明了对于满足 $-1\leqslant K_M\leqslant -a^2$, $a\in(0,1)$ 的紧致 3 维流形 M, $\lambda_1 \geqslant \frac{C}{\mathrm{Vol}\,(M)^2}$, 这里 C 为一个仅依赖于 λ 的常数. 这对于某些曲面是不对的（见 Schoen-Wolpert-Yau[SWY]).

若 M 是 3 维双曲空间，是否 $\lambda_1\mathrm{Vol}\,(M)^2$ 是上方有界的？

74. 设 M 为一个紧致曲面， $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 为 M 的谱， $\{\phi_i\}$ 为对应的特征函数. 对每一个 i ， $\{x|\phi_i(x)=0\}$ 为一个 1 维的可求长的单纯复形. 设 L_i 为它的长度，不难证明 $\lim\limits_{i\to\infty}\inf\sqrt{\lambda_i}^{-1}(L_i)$ 有仅依赖于 M 的面积的正下界（这是由 Bruning[B] 独立地得到的).

要寻找 $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sqrt{\lambda_i}^{-1}(L_i)$ 的上界似乎更为困难.

75. S. Y. Cheng[Cn] 证明了对于一个紧致曲面，λ_i 的重数有一个仅依赖于曲面的亏格的上界. 我们能够将这推广到高维的情况吗？如果没有什么修改，这看来是不对的. 正确的描述是什么呢？对于一个给定亏格 g 的紧致曲面，我们能给出一个显式的度量使其达到 λ_i 的最高重数吗？

76. 设 M 为一个紧致流形，$f_i, i = 1, 2, \cdots$ 为 M 上的 Laplace 的特征函数. 试证 f_i 的稳定点数随 i 增加.

77. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界域. 记 $\lambda_1(\Omega)$ 和 $\lambda_2(\Omega)$ 为 Laplace 算子作用于边界值为零的函数第一和第二特征值. 证明

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \leqslant \frac{\lambda_2(D)}{\lambda_1(D)},$$

这里 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的圆盘，且等式成立意味着 Ω 为一个圆盘.

这将意味着我们由知道鼓的两个音调可决定该鼓是否是圆的. 详见 [PP].

78. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界凸域. 设 f_2 为零边界条件的 Laplace 算子的第二特征函数. 证明 f_2 的结点线 (nodal line) 不能包围一个 Ω 中的紧致子域.

最近，C. S. Lin 证明了若凸区域有一个对称 (symmetry) 这是对的.

一般地，我们想知道结点线的性质. 这一猜测已提出很长一段时间了.

79. 设 M 为一无边紧致流形. 那么我们可以定义作用于微分形式的 Laplace 算子的特征值. 我们如何用可计算的几何量来估计第一个非零特征值呢？见 Li [Li], Li-Yau [LiY1] 和 Gromov [Gr3] 的工作，在那里 λ_n 的估计依赖于 M 的直径及 Ricci 曲率的一个下界. 也可见于 Uhlenbrock[U] 的文章.

对于具非负 Ricci 曲率的流形，λ_1 的精确的下界见 Zhong-Yang[ZY].

80.(Schiffer 猜想或 Pompieu 问题) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个光滑的有界域. 设 f 为一满足 Neumann 边界条件的 Laplace 算子的特征函数. 若 f 在边界上为常数，试证 Ω 为一个圆盘.

这问题与下面经典的问题有关.

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的一个函数 f 及一个有界域 Ω，若我们知道所有 f 在 Ω 经欧氏运动后的象域上的积分值，我们能给出 f 吗？

最近的工作可见 Bernstein 和 Yang 的文章.

IV 的补充.

(a) 估计特征值间的差是一个有意思的问题. I. Singer，B. Wong, S. T.

Yau 和 S. S. T. Yau[SWYY] 证明对于 $\mathbb{R}^n$ 中凸区域 Ω 的 Dirichlet 问题有

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2},$$

这里 d 为 Ω 的直径.

我们能否将此不等式改进为

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{3\pi^2}{d^2},$$

使得等式在区间上成立？

(b) 在 2 维球面上，$\lambda_1(S^2)$ 的重数至多是 3（见 [Cn]）. 在此情况下能否给出 $\lambda_4 - \lambda_1$ 的下界估计？

(c) 对紧致 Riemann 流形 M（∂M 可能为非空集），Weyl 公式给出了 λ_i 的渐近展开式的第一项. 了解渐近展开的低次项是一个基本的问题.

Ivrii[Iv] 和 Melrose[Me] 在这方面独立地取得了进展. 他们表明，一般地，我们能够对具非空边界流形的第二项进行计算.

(d) 设 $\{\lambda_i\}$ $i=1,2,\cdots$ 为一正实数的递增序列. 什么时候 $\{\lambda_i\}$ 能成为某一紧致 Riemann 流形的特征值？一个明显的条件是 $\{\lambda_i\}$ 满足 Weyl 的渐近公式. 由维数计算（局部地，一个度量是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个变量的函数）必有无限多 λ_i 之间的关系.

(e) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸区域, φ 为第一特征函数. Brascamp 和 Lieb[BrL] 证明了 $\log\varphi$ 为一凹函数. 我们能够将此推广到 Riemann 流形的区域吗？

也可见 Korevaar[Kor] 及 Caffarelli 和 Spruck[CSp] 的工作.

(f) 若 M 是一个完备的非紧致流形，那么谱一般不是离散的. 什么时候 Laplace 算子有相应的特征函数属于 $L^2(M)$ 的特征值？

我们希望下面是对的.

(i) 当 M 是完备的，$K \geqslant 0$ 时，M 没有一个纯点谱.

Escobar[Es] 证明当 M 在一个紧集之外是旋转对称时这是对的.

(ii)M 没有特征值，如果 M 是完备单连通的且 $-C \leqslant K \leqslant -1$.

(iii)M 有无限多的特征值，如果 M 是完备的，具有限体积，$-C \leqslant K \leqslant 0$.

这些甚至在 M 是曲面时也未解决. 当 M 是对称域（在算术子群下）的商空间时，(iii) 是对的.

(g) 证明一个完备非紧流形 M 是双曲的，如果 $\lim_{i\to\infty}\lambda_i(\Omega_i)>0$. 这里 $\{\Omega_i\}$ 为 M 的一个紧致域的穷竭 (exhaustion) 序列.

7.5 与测地线有关的问题

81. 试证每一个紧致流形都有无穷多闭测地线.

这是一个古老的问题， Klingenberg 广泛地研究了这个问题并得到许多深刻的结果. 当 $\pi_1(M)$ 有限时见他的书 [Kl].

Ballman, Thorbergsson 和 Ziller[BTZ] 在不同的几何和拓扑条件下研究了闭测地线的存在性. Hingston [Hi] 证明了同伦秩为 1 的对称空间上的短测地线的存在性，其中度量接近于标准的度量.

82. 设 M 是没有共轭点的紧致流形，若 M 同伦等价于环面，试证 M 是平坦的.

这是由 E. Hopf 提出的猜想并且他证明了 2 维的情况. L. Green[Ge] 证明了 M 的总曲率必须非正，且只有 M 平坦时为零. 可以相信没有共轭点的紧致流形的基本群是指数增长的除非流形是平坦的.

83. 试证除 S^N 以外的秩为 1 的其他对称空间的 Blaschke 猜想. 对于球面这是通过 Green,Weinstein,Berger,Kazdan 和 Yang 的努力所得到的（确切的历史见 [Bs] ）.

84. 证明紧致调和流形是对称的.

一个流形称为调和的，如果小半径的测地球面具常平均曲率.

85. 设 M 为具有限基本群的紧致流形. 能否在其上找到非双曲的闭测地线 (non-hyperbolic closed geodesic)? 详见 [Kl] 和 Ballman-Thorbergsson-Ziller 的文章 [BTZ]. 在 [BTZ] 中证明了，如 M 是非单连通的，且具非负 Ricci 曲率，那么 M 上存在一个非双曲的闭测地线.

86. 若 M 微分同胚于 N 维球面，试给出嵌入的闭测地线个数的下界估计. 众所周知，当 $N=2$ 时， Lusternik-Schnirelmann 证明了三个不同的嵌入闭测地线的存在性 ([LS]). 关于这一问题的情况见 [Kl].

87. 将 Loewner 和 Pu 的不等式推广到高维情况. 二维环面时的 Loewner 不等式为

$$\frac{A}{l^2}\geqslant C,$$

这里 l 为最短的非同伦平凡的闭路的长度， C 是一个普适常数. 这方面的发展，参看 Berger[Br2],[Br3] 和 Gromov 的工作 [Gr4], [Gr7].

7.6 极小子流形

88. 试证任何 3 维流形必有无限多个浸入极小曲面. Sacks 和 Uhlenbeck[SU] 证明了在任何不以可缩空间为覆盖的紧致流形上的极小球面的存在性. Sacks-Uhlenbeck 和 Schoen-Yau[SY4] 独立地证明了任何不可压缩曲面能够形变为极小曲面. 若背景 (ambient) 流形是 3 维的， Osserman 证明了它们是浸入的. 在大多数情况下，由 Meeks 和 Yau[MY] 的结果及 Freedman, Hass 和 Scott 最近的工作知它们实际上是嵌入的. Meeks-Simon-Yau 的工作也表明了，从 3 维紧致流形的任何紧致曲面出发，我们能够在它的合痕类 (isotopyctass) 中极小化它的面积.

对于一个一般的 3 维流形， Pitts[Pi] 证明了这样一个极小曲面的存在性. 但是无法从他的方法了解这个曲面的亏格.

89. 试证在任何与 S^3 微分同胚的流形中有四个不同的极小嵌入球面. 在这方面我们应该研究 Sacks 和 Uhlenbeck[SU] 的工作.

J. Li [LJ] 证明了在具接近于标准度量的度量的 S^3 中有四个不同的极小嵌入 2 维球面.

90. 是否每一紧致可微分的流形都能极小嵌入 S^N, 对某一 N ?

最近 W. Y. Hsiang 和 W. T. Hsiang[HH] 研究了某些怪球 (exotic) 到 S^N 的极小嵌入问题.

91. 单位球 (unit ball) 中是否存在 $\mathbb{R}^3$ 的完备极小曲面？

这是由 Calabi[Ca3] 提出的. Jorge 和 Xavier[JX] 曾给出一个界于两个平面之间的完备极小曲面的例子. P. Jones[J] 证明了存在一个 $\mathbb{C}^3$ 的完备复子流形（因而是极小的），在单位球之中.

92. $\mathbb{R}^3$ 中完备、嵌入的极小曲面（具有限亏格）是什么？

仅知的例子是悬链面 (catenoid) 和螺旋面 (helicoid). 或许能够证明在拓扑的意义下，任何这样的曲面都是标准嵌入的. 最近， Hoffman 和 Meeks[HM] 证明， $\mathbb{R}^3$ 中存在一个完备的极小嵌入曲面，它共形于一个移动三个点的方环面.

93. 证明每一 $\mathbb{R}^3$ 中正则、光滑的 Jordan 曲线只能作为有限个稳定极小曲面的边界.

如果 Jordan 曲线是实解析的， Tomi[To] 证明了它只能作为有限个局部极小圆盘的边界，Tomi 的方法是相当一般的. 把他的方法推广到边界光滑情形的基本困难在于证明当边界光滑正则时，稳定正则曲面在边界上不存在分枝点. 迄今为止，这点尚未克服.

在极小曲面有最小面积这一强的意义下， Hardt-Simon [HS] 证明了边界分枝点的不存在性，因而也就证明了这种情况下的有限性.

在对边界作适当的扰动后有各种唯一性定理. 它们属于 Böhme, Morgan, Tomi, Tromba 及其他等人.

94. 给定一个简单、光滑、正则 Jordan 曲线，能否找到以它为边界的非平凡的极小圆盘的连续族？

有一个经典的例子属于 P. Levy[Le] 和 Courant[Cou]: 一个可求长的、除去一点外处处光滑的 Jordan 曲线，它是不可数个极小圆盘的边 (这一例子的证明依赖于 Kruskal[Kr] 的“桥原理”. 桥原理的一个更严格的证明是分别由 Almgren-Solomon [AS] 和 Meeks-Yau[MY] 独立地给出的). Morgan[Mot] 找到了一个边界由 4 个不交的圆周组成的极小曲面连续族的例子.

95. 设 σ 为一 S^3 中光滑的 Jordan 曲线，为 $\mathbb{R}^4$ 的单位球中某一嵌入圆盘的边界. 试证在 S^3 中有一个与 σ 合痕 (isotopic) 的曲线 σ' 为 $\mathbb{R}^4$ 的单位球的一个极小嵌入圆盘的边. 这一问题的应用将证明一个薄片结 (sliced knot) 是一个带状结 (ribbon knot).

96. S^3 中给定亏格的极小曲面组成的空间的结构是什么？ Lawson[L1] 证明除 $\mathbb{RP}^2$ 外，任何闭曲面都能极小嵌入到 S^3 中. 用这一方法能够实现何种共形结构？ Choi 和 Schoen [CS] 证明，曲面到具正 Ricci 曲率的紧致 3 维流形上的极小嵌入的集合是紧致的. 因此共形结构的集是紧致的 · 若用 S^N 代替 $S^3, N > 3$，会有什么变化呢？用 Penrose 的扭 (twistor) 结构， R. Bryant 证明了每一个紧致曲面能够共形浸入到 S^4 中.

97. (Lawson) S^3 中仅有的极小嵌入环面是 Clifford 环面吗？

S^3 中有许多不是 Clifford 环面的极小环面，但它们不是嵌入. 由 Montiel 和 Ros[MR] 的工作，这将有赖于证明 S^3 中的嵌入极小曲面的第一特征值等于

2（见问题 100）.

98. (Lawson) 设 M 为 S^3 的极小嵌入曲面，试证 S^3 由 M 分开的两个区域具有相同的体积.

这是 Gauss-Bounet 定理的精巧的形式. 实际上，若 $M^{2N-1} \subseteq S^{2n}$ 为紧致连通超曲面使得第二基本形式的所有奇次初等对称函数都为零，那么一般的 Gauss-Bounet 定理即证明 $S^{2N} - M^{2N-1}$ 的两个分支有相等的体积只要它们有相同的 Euler 示性数. 对于 S^3 中的极小曲面，这两部分总是微分同胚的（参见 Lawson[L3]）.

在 $S^N(N>3)$ 的一般情况下，这猜想是不对的. 例如 C. L Terng 证明了 $S^P((P/N)^{\frac{1}{2}}) \times S^{N-P}(((N-P)/N)^{\frac{1}{2}})$ 不能将 S^{N+1} 分成两个体积相等的部分除非 $P = N - P$.

99. (Chern) 是否 S^{N+1} 中微分同胚于 S^N 的嵌入极小超曲面是全测地球面？

一个肯定的回答甚至在假定超曲面所张成的锥在 $\mathbb{R}^{N+2}$ 中是稳定的这一特殊情况下也是有意义的. 这可能意味着作为拓扑流形的面积极小的超曲面是光滑的. 在锥的稳定性的假设下，这一猜想在 $N = 2,3,4,5$ 时是对的，见 [Sim]. 余维大于 1 的情况这一猜想是不对的，见 [LO].

最近， W. Y. Hsiang[Hs] 证明了上面猜想是不对的！

100. 是否 S^{N+1} 的嵌入极小超曲面的 Laplace-Betrami 算子的第一特征值为 N?

即使在 $N = 2$ 的情形这也是未知的，一个肯定的回答将意味着 S^3 的嵌入极小曲面的面积有一仅依赖于亏格的上界. 这是 Yang-Yau[YY] 定理的一个推论.

Choi 和 Wang[CW] 最近证明 S^{N+1} 的极小嵌入超曲面的第一特征值至少是 $\frac{N}{2}$.

101. S^N 中是否存在具负曲率的极小闭曲面？

102. 作为 Bernstein 定理的推广， Schoen 和 Fischer-Cobrie [F-CS] 及 do Carmo 和 Peng[DP] 证明 $\mathbb{R}^3$ 中任何完备的稳定极小曲面是线性的. 我们能够将此命题推广到 $\mathbb{R}^N(n \leqslant 8)$ 中的完备稳定超曲面吗？

103. 若 u 为 $\mathbb{R}^N$ 的极小曲面方程的整体解，那么 u 是多项式增长的吗？

我们应该读一下 Bombieri 和 Giusti[BG] 的文章. Bombieri 也提出它或许与 S^N 中的极小超曲面的第一特征值有关，也可见于 Allard 和 Almgren[AA].

L. Simon（未发表）证明了在某些技术性的假设下，一个极小图 (graph) 有多项式增长.

104. 给出 $\mathbb{R}^8$ 中 7 维面积极小锥的拓扑分类.

Lawson 证明了这些锥的微分同胚类的空间是有限的且明确的界应该能够得到. 例如，仅从稳定性假定出发 Simon[Sim] 推导出对应于这样的锥的极小超曲面 $M^6 \subseteq S^7$ 的第二基本形式的一个明确的 L^2 估计. 类似地 L^p 模的界 $(p = 2, \cdots, n)$ 将给出 Betti 数和的一个先验估计.

105. (Chern) 考虑 S^N 中的所有具常纯量曲率的紧致极小超曲面的集合. 把纯量曲率看作这一集合的函数，是否这函数的象是离散的正数集？

Simon[Sim]， Chern-do Carmo-Kobayashi[CDK]， Lawson [L2] 和 Yau[Y3] 都作了些工作. 最近 Terng 和 Pen[TP] 在这问题上有所突破.

106. 设 M 为曲率 -1 的紧致 3 维流形， Σ 为亏格为 g 的曲面使得存在某一连续的 $f : \Sigma \to M$ 满足 $f_* : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M)$ 为单射. 我们知道 ([SY4]，[SU]) 这样的映照能够形变为一个极小浸入. 是否对大多数的 M，这种浸入是唯一的？

107. 设 M 为 R^3 中完备、极小曲面. Osserman[O1] 证明 M 的 Gauss 映照的象在 S^2 上的余集不含正密度的集合，并且猜想象的余集不超过 4 个点. 最近， Xavier[X1] 证明了不超过 11 个点. 基于 Xavier 的方法 Bombieri 改进到 7 个点，能否改进到 4 个点呢？能否将此推广到 3 维极小超曲面？

对于 $\mathbb{R}^N$ 中的面积极小超曲面的情况可见 Solomon[So].

108. 设 H 为流形 M 中的面积极小超曲面. 试证经对 M 的度量作一扰动， H 的奇性可以去掉，并保持 H 所代表的 $N-1$ 维同调类. 与此相关的问题见 B. White[Wh].

是否一个余维为 1 的面积极小流的支集具有 p. l. 结构？对于一个高余维的极小流，其支集不一定是实解析子簇（见 Milani [Mi] ）. 这个问题的目前状况见 Almgre[Alm2].

109. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 的 K 维、紧致、极小子流形. 试证明等周 (isoperimetric)

不等式:

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{K-1} \leqslant C_K \mathrm{Vol}\,(\partial\Omega)^K,$$

这里

$$C_k = \frac{\mathrm{Vol}\,(B(1))^{K-1}}{\mathrm{Vol}\,(\partial B(1))^K},$$

$B(1)$ 表 $\mathbb{R}^k$ 中的单位球. 当 $K=N$ ，即 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中的区域时是正确的.

当 C_K 取比上面大的值时是对的 (见 [FF] ， [Alml],[All], [MiS] 和 [BDG]).

Almgren[Alin3] 证明当 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 的面积极小子流形时具上面常数 C_K 的不等式是成立的.

若 $K=2$, Ω 单连通，这是一个经典的结果，属于 Carleman (见 Osserman[O2]). 当 $K=2, \Omega$ 双连通、这也是对的，属于 Osserman 和 Schiller[OS] 及 J. Feinberg[F]. Li ， Schoen 和 Yau[LSY] 将此结果推广到 $\partial\Omega$ 是弱，连通的或至多包含两个分支的情形.

一个途径是证明，不等式的极值情况可以实现为 Stationary integral varifold ，后者或可证明是一平坦 k 圆盘. 而 B. White [Wh] 曾研究过，平坦 k 圆盘在邻近的非参数曲面中确实是极值的.

110. 设 Σ 为一紧致曲面且: $f:\Sigma\to M$ 是到 3 维流形中的极小浸入使得 f 在所有同伦于 f 的映照中具极小面积 (如 Σ 有边界，我们只考虑 $\partial\Sigma$ 为嵌入且 $f(\partial\Sigma)$ 不变). 若 Σ 是 S^2 或平面区域， Meeks-Yau[MY] 证明了 f 是一个嵌入. 当 Σ 有较高的亏格时， Freedman-Hass-Scott 证明了若 f 同伦于一个嵌入则 f 是嵌入. 没有后一假设， f 不一定是嵌入. 我们相信 f 倾向于使自交集的复杂性最小. 估计 f 的三重点数是拓扑学者的基本兴趣所在.

最近， Gulliver 和 Scott[GS] 证明最小面积曲面不一定有最小的三重点个数.

111. 设 $f:M_1\to M_2$ 为两个具负曲率的紧致流形间的微分同胚. 若 h 为同伦于 f 的调和映照，是否 h 是单值的？ $n=2$ 的情况已由 [SY6] 和 [Sa] 证明.

对于 $n>2$ ，若不给 M_1, M_2 加条件， Calabi 已举出了反例 (在 Calabi 的例子中 M_2 是一个环).

112. 证明 $\pi_i(S^N)$ 可由调和映照来表示，若将 S^N 换成具有限基本群的紧致流形，情况又是如何？

我们可参考 R. T. Smith[S].

113. （仿射几何）

(a)(Chern) 给出仿射几何的 Bernstein 定理：任何仿射空间上的凸图 (graph)，如是一个仿射极大超曲面，则必为一个抛物面 (paraboloid).

(b) 分类 3 维紧致仿射平坦流形. 一般地，尚不知道是否任何紧致仿射平坦流形具零 Euler 数（见 Milnor[M3], Kostant-Sullivan[KS], Sullivan[SUl], [Su2], 及 Wood [Wo1]）.

7.7 广义相对论和 Yang-Milh 方程

114. 这是一个按 Penrose 的撰词称为“宇宙审查” (cosmic censorship) 的问题.

设 M 为一具度量如 g_{ij} 和对称张量 h_{ij} 的 3 维流形，设 M 是一满足真空 Einstein 场方程的 4 维渐近平坦时空的 3 维类空超曲面. 假定 g_{ij} 和 h_{ij} 满足它们分别作为诱导度量和第三基本形所必须满足的相容条件. 在研究 M 上具 Cauchy 初值 g_{ij} 和 h_{ij} 的真空场方程的整体解时，我们希望了解所得解的奇点性质. 或许这是广义相对论中最重要的待解决问题.

是否一般地一个奇点将有一个“地平线” (horizon)? 是否没有“赤裸”的奇点？

关于这一问题的背景，请见 Hawking 和 Ellis 的书 [HE].

还请注意 Christodoulou 的重要工作 [Cr1,2,3,4], 他研究了当时空有一 $SO(3)$ 等度同胚群，具一无质量纯量场时的 Einstein 方程的整体初值问题. 他证明当终结 Bondi 质量 M_1 非零时，一个质量为 M_1 的黑洞被无穷远处的真空形式 (vacuum : forms) 所包围. 他还决定了度量递减的速率及纯量场在“地平线”上的状态.

Christodoulou 和 Klainerman[Cr5] 最近宣布证明了 Minkowski 空间的稳定性.

115. Cheeger 和 Gromolt 的分裂定理说，若一个非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形包含一条测地直线 γ，那么 M 可以等度地分解为 $R \times N$，其中第一个因子由 γ 代表.

在时空的研究中，证明下列事实将是有意义的：一个测地完备的 4 维 Lorentz

流形，如果在类时方向上 Ricci 曲率非负，而此类时方向又包含一绝对极大类时测地线，则流形可分解为测地线和类空超曲面的乘积.

Beem, Ehrlich, Markvorson 和 Galloway[BEMG] 在较强的条件下证明了这一事实. 他们假定 M 是一整体双曲的时空且在类时方向上截曲率非负. 他们并未假定 M 是测地完备的. 他们的证明用到了 S. Harris 的三角比较定理.

也可见 Galloway[Gal] 和 Bartnik(Barz]. 那里他们假设了一个"无地平线"的条件.

116. 证明一个静态恒星模型 (static stellar model) 等度同胚于一个球面. 关于模型具一致密度时见 Lindbloom[Lin].

S. Hawking 证明一个静态黑洞是轴对称的. 但他的证明部分基于物理的考虑.

从 Israel, Hawking, Carter 和 Robinson 的工作我们知道一个稳定的、旋转的黑洞必是 Kerr 黑洞 (见 [Ro]). 对于负荷的 (charged) 稳定黑洞，我们能给出类似的命题吗？若度量是 Riemann 度量，那么也有类似的问题. Lapedes 指出 Robinson 的方法已无法适用，而 Israel 的方法在静态情况下仍可应用.

Masood-ul-Alam 和 Bunting[ABu] 证明，带有任意个数黑洞的真空 Einstein 方程的静态解或是 Schwarzschild 解或是 Minkowski 空间. 这是 Israel 和 Robinson[Rob] 早期结果的推广.

Bunting[Bu] 和 P. Mazur [Ma] 证明，一个稳定的负荷黑洞是 Kerr-Newman 解. 关于静态恒星模型的球对称性见 Masoodul-Alam[A1a]，亦可见 Lindbloom [Lind].

117. 证明 S^4 上任何 Yang-Mills 场是自共轭或反自共轭的.

见 Bourguignon 和 Lawson 的文章 [BL].

Atiyah, Drinfield, Hitchin 和 Manin[AHDM] 已将自共轭解和反自共轭解作了分类.

118. 证明具有固定的 Pontryagin 数的 S^4 上的自共轭场的模空间 (moduli space) 是连通的. 证明 $\mathbb{R}^4$ 上 L^2 可积规范场的 Pontryagin 数是整数.

问题 117 和 118 都是著名的，请参见 Atiyah 的精彩文章 [At2].

当 P 为 S^4 上以 $SU(2)$ 或 $SU(3)$ 为结构群、正阶数 (degree) 的主丛时，Taubes[T3] 证明了自共轭连络的模空间是连通的.

119. 物理学家们有一个渐近平坦流形的概念（例如见 [SY7] ）. 其定义严重地依赖于坐标系的选取，而不是内蕴的. 如果我们用曲率的适当递降来代替这个定义，能得到等价的条件吗？

这已由 Bartnik[Barl] 基本上解决了. 他将质量定义为

$$m(g) = \frac{1}{16\pi} \int_{S\infty} (g_{ij,j} - g_{jj,i})\, ds^i,$$

有可能其中无穷远坐标的假设可由曲率的递降和无穷远处的连通性来代替.

120. 给定一个渐近平坦空间，能否对总角动量给出一个较好的定义？它与总质量的关系是什么？（见 [Pe].）

类空无穷远处的角动量物理学家已有了充分的了解（见 Ashlekhar[Ash] 和 J. York[Yo] ）. 然而在零位无穷远 (null infinity)，如何定义角动量却是一个问题，见 Christodulou 和 Klainerman 在这方面的工作.

关于 Yang-Mills 场的补充.

(a) 设 P 为以 $SU(2)$ 为结构群的紧致 4 维流形上的主丛，何时存在一个不可约的自共轭连络？

当 M 的相交形式 (intersection form) 是正定时， Taubes [T1] 证明上述存在性的充分必要条件是 $C_2(p) < 0$. 在另一篇文章中， Taubes[T2] 找到了当 M 的相交形式非定时的必要条件.

(b) 设 M 为具正定相交形式的单连通紧致光滑可定向的 4 维流形，通过研究自共轭连络的模空间， Donaldson[D1] 证明相交形式（在整数环上）等价于 $(1) \oplus \cdots \oplus (1)$. 结合 Freedman 的工作，这导出了 $\mathbb{R}^4$ 上怪 (exotic) 微分结构的存在.

代替 $SU(2)$，考虑 $SU(3)$- 主丛， Fintushel 和 Stern[FS] 对具正定相交形式的 4 维流形证明了某些附加的非光滑性结果.

最近，Donaldson[D4] 去掉了他的定理中 M 的单连通条件. Donaldson[D3] 也证明了当 M^4 是单连通的和旋 (spin) 的，它的相交形式有 1 或 2 个负部，那么相交形式与标准形式等价. 在 [D4] 中他将此结果推广到 $H_1(M,\mathbb{Z})$ 无 2- 挠 (2-torsion) 的情况.

(c)Uhlenbeck 和 Yau[UY] 证明紧致 Kähler 流形上每一个（单）稳定全纯向量丛都容许一个唯一的 Hermite-Yang-Mills 连络.

(d)(Thom 猜测) 证明若 $\Sigma \subseteq \mathbb{CP}^2$ 为一同调于 n 次代数曲线的嵌入曲面，则

$$\text{亏格}\,(\Sigma) \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

(e)(11/8 猜测) 设 M 是紧致光滑的 4 维旋流形，则

$$\left|\frac{b_+ + b_-}{b_+ - b_-}\right| = \left|\frac{w\text{的秩}}{w\text{的号差}}\right| \geqslant \frac{11}{8},$$

这里 w 为 M 的相交形式.

当 M 是单连通的，这等价于猜想： M 同胚于 $K3$ 曲面和 $S^2 \times S^2$ 的连接和 (connected sum) 。

参考文献

[Ala] M. Masood-ul-Alam, On spherical symmetry of static perfect fluid space- times and the positive mass theorem, CMA, The Australian National University, Research report CMA-R-86.

[ABu] M. Masood-ul-Alam and G. Bunting, Non-existence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time, *Gen. Rel. Grav.*, to appear.

[AI1] A. D. Alexandrov, On a class of closed surfaces, *Recuil Math.*, (Moscou), (1938), 69-77.

[AI2] A. D. Alexandrov, Die innere geometrie des convexen flachen, Akad. Verlag, Berlin, 1955.

[AI3] A. D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large, Vestnik Leningrad, **11**(1956), *Trans. AMS*, **21**(1962), 341-353.

[AII] W. K. Allard,On the first variation of a varifold, *Ann. Math.*, **95**(1972), 417-491.

[AA] W. K. Allard and F. Almgren, On the radial behavior of minimal surfaces and the uniqueness of their tangent cones, *Ann. Math.*, (1981).

[Alm1] F. Almgren, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Ann. Math*, **84**(1966), 277-292.

[Alm2] F. Almgren, Multiple valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of mass minimizing integral currents, preprint.

[Alm3] F. Almgren, Optimal isoperimetric inequalities, *Bull. AMS*, 13, Number **2**(1985), 123-126.

[AS] F. Almgren and B.Solomon,How to connect minimal surfaces by bridges, preprint.

[An1] M. Anderson, L^2 harmonic forms and a conjecture of Dodziuk-Singer, preprint.

[An2] M. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 701-721.

[Ans] M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, **121**(1985),429-461.

[At1] M. Atiyah, Elliptic operators, Discrete groups and von Neumann algebras, *Société Mathematique de France, Asterisque,* **32, 33**(1976),43-72.

[At2] M. Atiyah, Geometrical aspects of group theories, *Proc. Intrenational Congress Math.,*Helsinki, (1973), 881-885.

[AHDM] M. Atiyah, N. Hitchin, U. Drinfeld, and Yu.Manin, Construction of instantons, *Physics Letters*, **65A**(1978), 185-187.

[Au] T. Aubin, The scalar curvaturd, in *Differential Geomerry and Relativity,* Holland, 1976, 5-18.

[ASz] L. Ausalnder and R. H. Szczarba, Characteristic classes of compact solvmanifolds, *Ann. Math.,* **76**(1962), 1-8.

[Ba] I. Ja. Bakel'man, these proceedings.

[Ba] I. Bakelman, Applications of the Monge-Ampère operators to the Dirichlet problem for quasilinear elliptic epuations, *Ann. Math. Siudiies*, **102** (S. T. Yau ed.), 239-258.

[BBE] W. Ballman, M.Brin, and P. Eberlein, Structure of manifolds of nonpositive curvature, I, *Ann. Math.*, **122**(1985), 171-203.

[BBS] W. Ballman, M. Brin, and R. Spatzier, Structure of manifolds of nonpostive curvature, II, *Ann. Math.*, **122**(1985), 205-235.

[BTZ] W. Ballman, G. Thorbergsson, and W. Ziller, Closed geodesics on positively curved manifolds, *Ann. Math.,* **116**(1982), 213-247.

[Bn] S. Bando, On the classification of the three dimensional compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curature, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 283-297.

[Bar1] R. Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold, CMA-R33-85, Australian National University, Canberra, to appear in *Comm. Pure Appl. Math.*

[Bar2] R. Bartnik, in preparation.

[BEMG] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, S. Markvorsen, and G. J. Galloway, Decomposition theorems for Lorenzian manifolds with nonpositive curvature, *J. Diff. Geom.,* **22**(1985), 29-42.

[B-B] L. Bérard-Bergery, to appear.

[Brl] M. Berger, Trois remarques sur les variés riemanniennes à courbure positive, *C, R. Acad. Sci. Paris,* Sér A-B **263**(1966), A76-A78.

[Br2] M. Berger, Du Coté de chez Pu, *École Norm. Sup.*, **(4)** **5**(1972).

[Br3] M. Berger, lsosystolio and isembolic inequalities, preprint.

[BI] A. Besse, *Manifolds All of Whose Geodesics are Closed,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1978.

[Bo] G. Bol, Über Mabelpunkte auf einer Eifläche, Math. Zeit., **49**(1943/44), 389-410.

[Bo] E. Bombieri, to apper.

[BDG] E. Bombieri, E. DiGiorgi, and E. Guisti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Inv. Math.,* **7**(1969), 243-268.

[BG] E. Bombieri and E. Guisti, Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces, *Inv. Math.,* **15**(1972), 24-26.

[Bor] A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semisimple Lie groups. *Proc. Bombay Colloquium on Alg. Geometry,* 1968, 43-73.

[BDS] J. P. Bourguignon, A. Deschamps, and P. Sentenac, Conjecture de H. Hopfsur les pro-

duits de varietiés, *École Norm. Sup.*, **(4)** **5**(1972), face. 2.

[BL] J. P. Bourguignon and B. Lawson, this volume.

[BrL] Brascamp and Lieb, *J. of Funct. Anal.,* **22**(1976), 366-389.

[B] J. Bruning, Über knoten von eigenfunktionen des Laplace-Beltrami operators, *Math. Z.,* **158**(1978), 15-21.

[By] R. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 455-474.

[BGY] R. Bryant, P. A. Griffiths, and D. Yang, Characteristics and existence of isometric embeddings.

[Bu] G.Bunting, Harmonic maps and uniqueness of the Kerr-Newman black hole, Centre for Mathematical Anslysis, The Australian National University, Research report CMAR 34-84.

[CSp] L. A. Caffarelli and J. Spruck, Corivexity properties of solutions to some classical variational problems, *Comm. Part. Diff. Eq.,* **7**(1982), 1337-137.

[Ca1] E. Calabi, The space of Kähler metrics, *Proc. Inter. Congress Mach.,* Amsterdam, **2**(1954), 206-207.

[Ca2] E. Calabi, Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, *Proc. AMS Symposium on Global Analysis, XV,* 223-230.

[Ca3] E. Calabi, see page 170 of *Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry,* Kyoto 1965, Nippon Hyoronsha Co., Tokyo, 1966.

[Ca4] E. Calabi, Extremal Kähler metrics, *Sem. on Diff. Geom.* (S. T. Yau,ed), Princeton University Press, Princeton, 1982, 259-290.

[CC] H. D. Cao and B. Chow, Compact Kähler manifolds with nonnegative curvature operator,*Inv. Math.,* **83**(1986). 553-556.

[Car] G. Carlsson, On the rank of Abelian groups acting freely on$(S^n)^{k}$, *Inv. Math.*, **69** (1982), 393-400.

[C1] J. Cheeger, Some examples of manifolds of nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.,* **8**(1972), 623-628.

[C2] J. Cheeger, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.,* **92**(1970),61-74.

[C3] J. Cheeger, On the spectral geometry of spacs with cone-like singularities, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **76**(1979), 2103-2106.

[C4] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudo-manifolds,in *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator,* University of Hawaii at Manoa, 1979, 91-146.

[CG1] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, **6**(1971). 119-128.

[CG2] J. Cheeger, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. Math.,* **96**, 413-443.

[CMS] J. Cheeger, W. Müller and R. Schroder, On the curvature of piecewise flat spaces, *Comm. Math. Phys.*, **92**(1984), 405-454.

[CGr1] J. Cheeger and M. Gromov, On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, Rauch Memorial Volume, I. Chavel and H. M. Farkas Eds, Springer, Berlin, 1985, 115-154.

[CGr2] J. Cheeger, Bounds on the von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gacys-Bonnet theorem for open manifolds, *J. Diff. Geom.,* **21**(1985), 1-34.

[Cn] S. Y. Cheng, Eigenfunctions and nodal sets, *Comm. Math. Helv.,* **51**(1976), 43-55.

[CY1] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Ann. Math.,* **225**(1977), 195-204.

[CY2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl.* Math., to appear.

[Ch1] S. S. Chern, On the curvature integral in a Riemannian manifold, *Ann. Math.*, **45** (1945), 964-971.

[Ch2] S. S. Chern, The geometry of G-structures, *Bull. AMS,* **72**(1966). 167-219.

[Ch3] S. S. Chern, On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold. *Abh. Math. Scm. Univ. Hamburg,* **20**(1955), 117-126.

[CDK] S. S. Chern. M. do Carmo, and S. Kobayashi, Minimal submanifolds on the sphere with second fundamental form of constant length, in *Functional Analysis and Related Essays*, Springer-Verlag,Berlin-Heidelbeg-New York, 59-75.

[CS] H. I. Choi and R. Schoen, The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature, Inv. Math., **81**(1985), 387-394.

[CW] H. I. Choi and A. N. Wang, A frist eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces, *J. Diff. Geom.,* **18**(1983), 559-562.

[Cr1] D. Christodoulou, The problem of a self-gravitating scalar field, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr2] D. Christodoulou, Global existence of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations in the large, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr3] D. Christodoulou, The structure and uniqueness of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr4] D. Christodoulou, A mathematical theory of gravitational collapse, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr5] D. Christodoulou, in preparation.

[Co] R. Connelly, An immersed polyhedra which flexes, *Indiana Univ. J. Math.,* **25**(1976), 965-972.

[Cou] R. Courant. *Dirichlet's Principle,* Interscience Publishers, Inc., New York, 1950, pp. 119-122.

[DP] M. do Carmo and C. K. Peng, Stable complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ are planes, *Bull. AMS*, **1**(1979), 903-905.

[D1] S. K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 269-316.

[D2] S. K. Donaldson, Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London Math. Soc., **50**(1985),1-26.

[D3] S. K. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of 4- manifolds, *J. Diff. Geom.,* to appear.

[D4] S. K. Donaldson, The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology, *J. Diff. Geom.,* to appear.

[E] P. Eberlein, Some properties of the fundamental group of a Fuchsian manifolds, *Inv. Math.,* **19**(1973), 5-13.

[EF] M. V. Efimov, Hyperbolic problems in the theory of surfaces, *Proc, Inter. Congress of Mathematicians,* Moscow (1966), Trans. AMS, **70**(1968), 26-38.

[EI] H. Eliasson, On variations of metrics, *Math. Scand.*, **29**(1971), 317-327.

[ES] J. Escobar, Spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds, *Comm. Partial Diff. Eq.*, **11**(1986), 63-85.

[FH] T. Farrell and W. C. Hsiang, to appear.

[FF] H. Federer and W. Fleming, Normal and integral currents, *Ann. Math.*, **72**(1960), 458-520.

[F] J. Feinberg, The isoperimetric inequality of doubly-connected minimal surfaces in R^N, *J. d' Analyse Math.,* **32**(1977), 249-278.

[Fi] R. Finn, On a class of conformal metrics, with applications to differential geometry in the large, *Comm. Math. Helv.*, **40**(1965), 1-30.

[FS] R. Fintushel and R. Stern, $SO(3)$-connections and the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.,* **20**(1984), 523-539.

[F-CS] D.Fischer-Colbrie and R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**(1980), 199-211.

[Fr] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 357-454.

[FHS] M. Freedman, J. Hass and P. Scoff, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Inv. Math.*, **71**(1983), 609-642.

[Ga] L. Z. Gao, The construction of negatively Ricci curved manifolds, *Ann. Math.,* **271**(1985), 185-208.

[GY] L. Z. Gao and S. T. Yau, The existence of negatively Ricci curved metrics on three manifolds, *Inv. Math.*, to appear.

[G] R. Geroch, Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet inte-

grand, *Proc. AMS,* **54**(1976), 267-270.

[GWi] C. S. Gordon and E. N. Wilson, Isospectral deformations of compact solv-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **19** (1984), 241-256.

[Ge] L. Green, A theorem of E. Hopf, *Michigan Math. J.*, **5**(1958), 31-34.

[GWu] R. Greene and H. Wu, C^{∞} convex functions and manifolds of positive curvature, *Acta Math.,* **137**(1976), 209-245.

[GM1] D. Gromoll and W. Meyer, An exotic sphere with nonnegative sectional curvature, *Ann. Math.*, **100**(1974), 401-406.

[GM2] D. Gromoll and W. Meyer, Examples of complete manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.,* **21**(1985), 195-211.

[GW] D. Gromoll and J. Wolf. Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature, *Bull. AMS*, **77**(1971).

[Gr1] M. Gromov, Three remarks on geodesic dynamics and the fundamental groups, unpublished.

[Gr2] M. Gromov, Manifolds of negative curvature *J. Diff. Geom.,* **13**(1978), 223-230.

[Gr3] M. Gromov, Paul Levy's isoperimetric inequality, I. H. E.S. preprint, 1980.

[Gr4] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathematique 1, edited by J. Lafontaine and P. Panou,Cedic-Nathan.

[Gr5] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comm. Math. Helv.,* **56** (1981), 179-195.

[Gr6] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inv. Math.,* **82** (1985), 307-347.

[Gr7] M. Gromov, Filling Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 1-147.

[GL] M. Gromov and B. Lawson, The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature, *Ann. Math.,* **111**(1980), 423-434.

[GT] M. Gromov and W. Thurston, Pinching constants for hyperbolic manifolds, preprint.

[GK] V. Guillemin and D.Kazhdan, Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 153-180.

[GS] R. Gulliver and P. Scott, Least area surfaces can have excess triple points, MSRI preprint, August, 1985.

[Ham] H. Hamburger, Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung I, *Ann. Math.*, **41**(1940), 63-68, II, III, *Acta Math.*, **73**(1941), 174-332.

[Hm1] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.,* **17** (1982), 255-306.

[Hm2] R. S. Hamilton, Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Diff. Geom.,* to appear.

[HR] G. C. Hamrick and D. C. Royster, Flat Riemannian manifolds are boundaries, *Inv. Math.,* **66**(1982),405-414.

[Ha] G. Harder, A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. *École Norm. Sup.*, **9**(1971), 409-455.

[HS] R. Hardt and L. Simon, Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem, *Ann. Math.,* **110**(1979), 439-486.

[HL] R.Harvey and H. B. Lawson, Jr., A constellation of minimal varieties defined over the group G_2, to appear.

[HE] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[He] J. Hersch, Sur la fréquence fondementale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principé de maximum, *Z. Angw. Math. Phys.,* Vol. XI, Fasc., **3**(1960), 387-413.

[Hi] N. Hingston, Equivariant Morse theory and closed geodesics, *J. Diff. Geom.,* **19**(1984), 85-116.

[H1] N. Hitchin, Harmonic spinors, *Adv. Math.,* **14**(1974), 1-55.

[H2] N. Hitchin, Compact four-dimensional Einstein manifolds, *J. Diff. Geom.,* **9**(1974), 435-441.

[HM] D. A. Hoffman and W. Meeks. III, A complete embedded minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with genus one and three ends, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 109-127.

[Ho] H. Hopf, *Lectures on Differential Geometry in the Large*, mimeographed lecture notes, Stanford University, 1956-57.

[Hs] W. Y. Hsiang, Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces, I, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 337-356.

[HH] W. T. Hsiang and W. Y. Hsiang, On the construction of construction of constant mean curvature imbeddings of exotic and/or knotted spheres into the unit sphere. III, *Inv. Math.*

[Hu] A. Huber, Konforme and metricsche kreise auf vollständigen flachen, *Comm. Math. Helv.,* **47**(1972), 409-420.

[Iv] V. Ya. Ivrii, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operators on manifolds with boundary, *Funct. Anal. Appl.,* **14**(1980), 98-105.

[J] P. W. Jones, A complete bounded complex submanifold of $\mathbb{C}^3$, preprint.

[JX] L. P. M. Jorge and F. Xavier, A complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ between two parallel planes, *Ann. Math.,* **112**(1980), 203-206.

[KL] W. Klingenberg, *Lectures on Closed Geodesics,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978.

[K] T.Klotz, On G. Bol's proof of Caratheodory's conjecture, *Comm. Pure. Appl. Math.,* **12**(1959), 277-311.

[KO] T. Klotz and R. Osserman, Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature, *Comm. Math. Helv.*, **41**(1966-67), 313-318.

[Ko] S. Kobayashi, in *Differential Geometry and Relativity,* Cahan and Flato, eds., Holland, 1976.

[Kor] N. J. Korevaar, Convexity properties of solutions to elliptic P. D. E.'s, preprint.

[KS] B. Kostant and D. Sullivan. The Euler characteristic of an affine space form is zero, *Bull. AMS*, **81**(1975), 937-938.

[Kr] M. Kruskal, The bridge theorem for minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 297-316.

[L1] H. B. Lawson, Jr. Complete minimal surfaces in S^3, *Ann. Math.*, **92**(1970), 335-374.

[L2] H. B. Lawson, Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. Math.*, **89**(1969), 187-197.

[L3] H. B. Lawson, The unknottedness of minimal embeddings, *Inv. Math.*, **11**(1970), 183-187.

[LO] H. B. Lawson, Jr. and. R. Osserman, Non-existence, nonuniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system, *Acta Math.,* **139**(1977), 1-17.

[LY1] H. B. Lawson, Jr. and S. T. Yau, Scalar curvature, non-abelian group actions, and the degree of symmetry of exotic spheres, *Comm. Math. Helv.*, **49**(1974), 232-244.

[LY2] H. B. Lawson, Compact manifolds non-positive curvature, *J. Diff. Geom.,* **7**(1972), 211-228.

[Lev] M. Levine, A remark on extremal Kähler metrics, *J. Diff. Geom.,* **21**(1985), 73-77.

[Le] P. Levy. *Lecons d'analyse fonctionelle,* Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[LJ] J.Li, On the existence of four distinct embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with a metric near the standard one, preprint at UCSD.

[Li] P. Li, A lower bound for the first eigenvalue of the Laplacian on a compact manifold, *Indiana Univ. Math. J.*, **28**(1979), 1013-1019.

[LSY] P. Li, R. Schoen, and S. T. Yau, On the isoperimetric inequality for minimal surfaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **11**(1984), 237-244.

[LT] P. Li and L. F. Tam, Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set.

[LiY1] P. Li and S. T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 205-239.

[LiY2] P. Li and S. T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Inv. Math.*, **69**(1982), 269-291.

[LiY3] P. Li and S. T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Comm. Math. Phys.,* **88**(1983), 309-318.

[LiY4] P. Li and S. T. Yau, An upper estimate of the first eigenvalue of a compact non- orientable

surface in terms of the area, *Inv. Math.*, to appear.

[Ln1] C. S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature. *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 213-230.

[Ln2] C. S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of twodimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, to appear.

[Lind] L. Lindbloom, Some properties of static general relativistic stellar models, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1455-1459.

[Lin] L. Lindbloom, Static uniform density stellar models must be spherical, preprint.

[LS] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Mèthodes Topologiques dansles Problèmes Varia tionnels,* Hermann and Co., Paris, 1934.

[Ma] R. A. Margulis, On connections between metric and topological properties of manifolds of non-positive curvature, *Proc. Sixth Topological Conference, Tbilsi, USSR,* 1922, 83(in Russian).

[Ma] P. O. Mazur, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15, 3173.

[MY] W. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, *Ann. Math.,* to appear.

[MSY] W. Meeks, III, L. Simon and S. T. Yau, to appear.

[Me] R. Melrose, Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace operator,* University of Hawaii at Manoa, 1979, 257-274.

[MiS] J. Michael and L. Simon, Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifolds of R. *Comm. Pure Appl. Math.,* XXVI(1973), 361-379.

[Mi] A. Milani, Non-analytical minimal varieties, Instituto Matematico"Leonida Tonelli", (1977), 77-13.

[Mi1] J. Millson, On the first Betti number of a constant negatively curved manifold, *Ann. Math.*, **104**(1976), 235-247.

[M1] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, *J. Diff. Geom.,* **2**(1968). 1-7.

[M2] J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **51**(1964), 542.

[M3] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, *Comm. Math. Helv.,* **32**(1958), 215-223.

[Mk] N. Mok, Compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature, preprint.

[MoY] N. Mok and S. T. Yau, Completeness of the Kähler characterization of domains of holomorphy by curvature conditions.

[MZ] N. Mok and J. Q. Zhong, Curvature characterization of compact Hermitian symmetric spaces, *J. Diff. Geom.,* to appear.

[MR] S. Montiel and A. Ros, Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and

conformal area, *Inv. Math.,* **83**(1986), 153-166.

[Mr] J. D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes to appear.

[Mor] F. Morgan, A smooth curve in $\mathbf{R}^3$ bounding a continuum of minimal surfaces, preprint.

[Mo] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.*, **110**(1979), 593-606.

[Mos] J. Moser, On the volume elements of a manifold, *Trans. AMS*, **120**(1965), 286- 294.

[MS] G. D. Mostow and Y. T. Siu, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, *Ann. Math.* **112**(1980), 321-360.

[Mu] D. Mumford, An algebraic surface with K ample, (K^2)=9, $P_g = q = 0$, *Amer. J. Math.,* **101**(1979), 233-244.

[Nab] P. Nabonnand, Thesis, University of Nancy, 1980.

[Na] J. Nash, Ph. D. thesis, Stanford Univ., 1975, also *J. Diff. Ceom.,* to appear.

[Ni] W. M. Ni, Conformal metrics with zero scalar curvature, and a symmetrization process via maximum principle, *Ann. Math. Studies,* **102**(S. T. Yau, ed.), 193-202.

[Nir] L. Nirenberg, in *Nonlinear Problems,* edited by R. E. Langer, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1963, 177-193.

[O1] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces of E^3 and E^N, *Ann. Math.*, **80**(1964), 340-364.

[O2] R. Osserman, The isoperimetric inequality. *Bull. AMS,* **84**(1978), 1182-1238.

[OS] R. Osserman and M. Schiffer, Doubly-connected minimal surfaces, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **58**(1975), 285-307.

[PPW] L. Payne, G. Polya and H. Weinberger, On the ratio of consecutive eigenvalues, *J. Math. Phys.*, **35**(1956), 289-298.

[Pe] R. Penrose, Some unsolved problems in classical general relativity. *Ann. Math. Studies,* **102**(S.T.Yau, ed.), 631-668.

[Pi] J. Pitts, Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds, *Mathematical Notes,* Princeton University Press.

[Pg] A. V. Pogorelov, An example of a two-dimensional Riemannian metric admitting no local realization in E^3, *DAN*, **198**(1971), *Soviet Math. Dok.,* **12**(1971), 729-730.

[Po] W. A. Poor, Jr., Some results on nonnegatively curved manifolds, *J. Diff. Geom.*, **9**(1974), 583-600.

[P] A .Preissman Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comm. Math. Helv.,* **15**(1942-43). 175-216.

[R] R.Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold, *Mich. Math. J.,* **26**(1977), 457-472.

[Ri] A. Rigas, Geodesic spheres as generators of the homotopy groups of O, BO, *J. Diff. Geom.,* **13**(1978), 527-545.

[Ro] D. C. Robinson, Uniqueness of the Kerr black hole. *Phys. Rev. Lett.*, **34**(1975), 905-906.

[Rob] D. Robinson, A simple proof of the generalization of Israel's theorem, *Gen. Rel. Grav.*, **8**(1977), 695-698.

[SU] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersion of 2-spheres, *Ann. Math.,* **713**(1981), 1-24.

[Sa] J. Sampson, Some properties and applications of harmonic mappings, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **11**(1978), 211-228.

[Sc1] R. Schoen, A lower bound for the first eigenvalue of a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.* **17**(1982), 233-238.

[Sc2] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.* **20**(1984), 479-495.

[ScU] R. Schoen and K. Uhlenbeck, A regularity theory for harmonic maps, *J. Diff. Geom.,* **17**(1982), 307-335.

[SS] R. Schoen and L. Simon, Regularity of stable minimal hypersurfaces, preprint .

[SWY] R. Schoen. S. Wolpert. and S. T. Yau, Geometric bounds on the low eigenvalues of a compact surface, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator.* University of Hawaii at Manoa, **1979**, 279-285.

[SY1] R. Schoen and S. T. Yau, Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature, in this volume.

[SY2] R. Schoen and S. T. Yau, Positivity of the total mass of a general space-time, *Phys. Rev. Lett.,* **43**(1979), 1457-1459.

[SY3] R. Schoen and S. T. Yau, to appear.

[SY4] R. Schoen and S. T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, *Ann. Math.*, **110**(1979), 127-142.

[SY5] R. Schoen and S. T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, *Manuscripta Math.,* **28**(1979), 159-183.

[SY6] R. Schoen and S. T. Yau, On the univalent harmonic maps between surfaces, *Inv. Math,* **44**(1978,), 265-278.

[SY7] R. Schoen and S. T. Yau, *Comm. Math. Phys.*, **65**(1979), 45-76.

[SY8] R. Schoen and S. T. Yau, The geometry and topology of manifolds of positive scalar curvature, in preparation.

[SY9] R. Schoen and S. T. Yau, The structure of manifolds with positive scalar curvature, Interdisciplinary Symp, on Nonlinear Partial Diff. Equations, Madison, WI.

[Se] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, *AMS symposium on Number Theory*, California Inst. of Technology, Pasadena,1963.

[SL] L. Simon, Asymptotics for a class of non-linear evolution equations,with applications to geometric problems, *Ann. Math.*, **118**(1983),525-571.

[S] J. Simon, Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann.Math.,* **88**(1968), 62-105.

[SWYY] I. M. Singer, B. Wong, S. T.Yau and S. S. T. Yau, An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. sup. pisa*, Series IV, V, XII, no. **2**(1985), 319-333.

[Si] Y. T. Siu, Complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. Math.*, **112**(1980), 73-111.

[SiY1] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive curvature, *Inv. Math.*, to appear.

[SiY2] Y. T. Siu and S. T. Yau, Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, *Ann. Math.*, **105**(1977), 225-264.

[SiY3] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compactifications of negatively curved Kähler manifolds of finite volume, *Seminar in Diff. Geom.*(edited by S. T. Yau), 1982.

[S] R. T. Smith,Harmonic mappings of spheres, *Amer. J. Math.*, **97**(1975), 364-385.

[So] B.Solomon, On the Gauss map of an areaminimizing hypersurface, *J. Diff. Geom.,* **19**(1984), 221-232.

[Su1] D. Sullivan, A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds, *Comm. Math. Helv.,* **51**(1976), 183-189.

[Su2] D. Sullivan, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Inv.Math.*, **36**(1976), 225-255

[Su3] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J.Diff. Geom.*, **18**(1983), 723-732.

[Ta] N. Tanaka, Rigidity for elliptic isometric imbeddings, *Nagoya Math. J.*, **51**(1973), 137-170.

[T1] C. Taubes, Self-dual Yang-Mills connections of non-self-dual 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 139-170.

[T2] C. Taubes, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 517-560.

[T3] C. Taubes, Path-connected Yang-Mills moduli spaces, *J. Diff. Geom.*

[TP] C. L. Terng and C. K. Peng,Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature, *Ann. Math. Studies*, (E. Bombieri, ed.), 177-198.

[Th] Sir W. Thomson(Lord Kelvin),On the division of space with minimal partitional area, *Phil. Mag.,* **(5),24**(Dec. 1887), 503-514.

[To] F Tomi,On the local uniqueness of the problem of least area, *Arch. Rat. Mech, Anal.,* **52**(1973), 312-318.

第八章　几何中的非线性分析

几何学的要旨就是对于某一类的几何对象给出一个好的描述[1]. 通常，这意味着我们必须对于空间上的分析结构及由这些结构定义的几何对象给出一个好的描述. 在许多情形下，我们必须知道如何来形变这些结构并且研究隶属于这种结构的几何对象的动力学. 这些几何对象的描述通常是由微分方程决定的. 由于几何对象一般都是弯曲的，这些方程的大多数是非线性的，正像在物理中那样，几何中的方程大都是变分性质的. 事实上，我们研究的几何中的方程几乎都与物理有关. （我们这儿指的是广义的物理，因此也包括了工程中的许多问题. ）也许，几何同物理一样的实在. 在历史上，几何学家从几何自身的美出发而考虑的许多问题后来都在物理学中自然产生，这件事常常使几何学家同物理学家都感到吃惊. 似乎当大自然通过数学来表现她自身的美的时候，她也通过它显示她的深邃性. 高能物理中一个最新的发展是超弦 (superstring) 理论. 它需要用到几何学中很多的知识. 我们希望看到物理学家与数学家对此连续不断的共同探讨.

除了物理学之外，几何学还同拓扑学及代数几何学密切相关. 拓扑学告诉我们空间基本的属性，而代数几何给我们提供了无数的自然的例子，使我们能去验证我们的理论. 我们希望通过这个演讲来说明这些联系中的若干方面.

[1]本章是根据丘成桐教授于 1985 年下半年在加州大学 San Diego 分校讨论班上的一系列演讲整理而成的.

本演讲将粗略地分成下列几个题目：

(I) 线性方程： Laplace 算子的谱及调和函数；

(II) 半线性方程：与共形形变有关的 Yamabe 问题；

(III) 极小曲面方程及调和映照；

(IV) Kähler 几何.

在我们详细论述这些问题之前，我们提一下对几何学的看法的一种分类，过去，很多几何学家做的是“局部”的问题. 当前，他们更多注意的是“整体”问题. 这常常造成几何学家的这两种看法的对立. 事实上，正像在微分方程的理论中一样，整体性问题的进展建立在关于局部问题的知识的基础之上. 事实上，有些局部问题比整体问题还要困难. 我们如下来讨论：

(i) 局部问题

大多数几何中的局部问题可以通过代数化成微分方程中的局部存在性定理. 其中涉及的代数可能是很复杂的. Griffiths 及其合作者们关于局部等度嵌入的工作是个很好的例证. Cartan-Kähler 理论正是为了把几何问题化成局部存在性定理 (例如 Gauchy-Kovalevsky 定理) 而提出的. 在这些局部问题中，还用到了各种隐函数定理，其中包括 Nash-Moser 迭代程序. 当所涉及到的方程是退化型时 (即不全是椭圆型或双曲型，或改变类型的方式是退化的)，局部的存在性问题可能是极其困难的，当方程是非线性时尤其如此.

一个有趣的例子是局部度量嵌入问题. 几何学的一个老的经典的问题是曲面片在三维欧氏空间中的嵌入问题. 方程的形状是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=F(x,y,u,u_x,u_y)$. 当 F 变号时或零点集复杂时，局部的存在性是很困难的. 事实上， Pogorelov 和 Jacobowitz 在 $F\geqslant 0$ 时给出了 C^3 的反例. 因此， C. S. Lin[ln 1, 2] 在 C^{10} 的情形下给出了局部存在性的证明一事是十分引人注目的.

我们在此还应当提到 Kuranishi 关于 $C-R$ 结构的局部嵌入理论的深刻的工作.

(ii) 半局部理论

基本的例子是所涉及的方程的奇点的传播. 几何学及微分方程中一个最困难的课题也许是对于对称性的了解. 在代数几何中，奇点是个较为明确的概念，因为那儿的“空间”就是多项式簇的零点集，而奇点是在其局部看来空间不能是仿射空间样子的点.

在几何中，奇点则较难定义，特别是当结构是由双曲型方程刻画并且空间的拓扑也允许改变时，一个好的例子是广义相对论中发展的奇点理论. 现在，我们还没有找到黑洞的一个真正好的定义，黑洞本质上说就是 Einstein 方程的奇点，在我们对于具非奇异初值的 Einstein 方程的整体情况有个好的认识之前，给出广义相对论中奇点的更精确的定义是很困难的. 注意，在著名的 Schwarzschild 解中，有一个坐标奇点，但它可以通过改换坐标而除掉. 这明显地使问题复杂化了. Penrose 提出了一个叫做宇宙管制的著名问题，它对于一般性的现象给出了奇点如何发展的预测. 这也许是经典的相对论中最基本的问题.

主要的问题是，当空间维数大于 1 时，我们对于非线性双曲系统的整体的性质知道得很少. 几乎可以肯定地说，一旦我们对这类方程了解得更多，几何学就会有所突破. 关于 Einstein 方程的最好的工作是 D. Christodoulou 最近得到的，在球对称的情形他给出了很好的结果. 可以期望关于球崩坍的许多问题可以通过他的工作得到解答.

对于非线性椭圆系统，已有一个成熟的正则性理论. 这方面的工作追溯到 Bernstein, Schauder, Morrey, Nirenberg, De. Giorgi, Federer, Fleming, Allard, Almgren, Simon 等人. 这些工作的大多数是集中在极小子簇方面. 理由很简单，非线性椭圆方程的大多数困难在极小子簇中都已出现. 关于极小子簇的好的认识往往引起更一般的非线性椭圆方程类的突破，极小子簇的正则性理论的大多数进展都假定极小子簇在整体上是面积极小的.

最好的例子是余维为 1 的面积极小的极小子簇. De. Giorgi , Federer , Fleming , Almgren , Allard , Simon 和 Hardt 证明了当维数小于 6 时，没有奇性. 最近， L. Simon 通过研究奇点的邻域给出孤立奇点的很好的认识，他证明了邻域可以用定义在切锥上的 Hölder 连续函数的图象来描写.

(iii) 大范围问题

与物理、拓扑和代数几何有关的很多问题都是整体性的，因此整体几何学的大多数工作都同这些学科有关. 粗略地说，“整体”表示我们研究紧致空间上的分析结构. 对于非紧的流形，我们则要求它的结构在某种意义下是完备的. 对于由这样的结构定义的几何对象，我们想知道它们随着时间（趋于正负无穷）的演变及其渐近行为.

从许多方面看，基本的问题是:

(1) 给定一个完备的分析结构，如何从局部的信息得出整体的信息？

(2) 给定了空间的拓扑，我们能否在此空间上加上某种分析结构？

因此第二个问题对应于分析中的存在性定理. 第一个问题对应的是惟一性. 从这些问题的叙述本身应该看到，对于整体拓扑的了解在这些问题的处理中是不可少的. 事实表明，我们还可以把讨论倒过来，从而给出拓扑学中的新定理. 最近的例子是 S. Donaldson([D3,4]) 把规范物理论应用到四维拓扑的研究而得到的惊人的成就. 在这之中的存在性定理是 C. Taubes 在 K. Uhlenbeck 工作的基础上得到的（见 [U1, 2] 和 C. Taubes 的文章）. 通常，建立在纯粹拓扑的信息之上的存在性定理是第一步. 一旦建立起分析的结构，拓扑的推论可以从分析的结构导出来. 我们希望在演讲的下列部分中给出它的一个轮廓.

8.1 特征值与调和函数

黎曼流形 M 上最基本的椭圆算子是 Laplace 算子 Δ，若 M 是紧致的，则 Δ 有离散谱. 我们把谱（即 Δ 的特征值）记作 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_i \leqslant \cdots$. 一个基本事实是当 $i \to \infty$ 时 $\lambda_i \to \infty$.

特征值的研究中有两个基本的并且密切相关的方向. 第一个是研究序列 $\{\lambda_i\}$ 的渐近性质. 基本性的结果可在 [BGM] 中找到.

著名的 Weyl 公式给出了 λ_i 的渐近展开的第一项. 它说的是

$$\lambda_i \sim C_n i^{\frac{2}{n}}/(\mathrm{Vol}M)^{\frac{2}{n}}, \text{当} i \to \infty,$$

这儿 C_n 是只同 $n=\dim M$ 有关的普适常数. 决定 λ_i 渐近展开的第二项则是个困难得多的问题. Ivrii[Iv] 在这个方向做了重要的工作（ Melrose 也有实质性的工作）. 他的结果可以概述如下：设 M 是有边 $\partial M \neq \varnothing$ 的紧致流形. 首先考虑 Dirichlet 问题. 对于任意正数 λ，令 $N(\lambda)$ 表示不超过 λ^2 的特征值的个数（重数计在内）. 在 M 的闭测地线集满足某个技术性条件的假定下，下列渐近公式成立

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= (2\pi)^{-n} W_n (\mathrm{V}olM)\lambda^n \\ &\quad -\frac{1}{4}(2\pi)^{-n+1} W_{n-1}(\mathrm{Vol}\partial M)\cdot\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \end{aligned}$$

这儿 W_n 及 W_{n-1} 是只依赖于 n 的常数. 对于 Neumann 问题也有类似的结果. Ivrii 用的方法是研究波方程 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \Delta u$ 的基本解的奇性.

另一个与 Weyl 公式有关的问题是 Polya 猜测. 它说的是, 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域, 则

$$\lambda_i \geqslant C_n(\mathrm{Vol}\Omega)^{-\frac{2}{n}} \cdot i^{\frac{2}{n}}$$

$$u_i \leqslant C_n(\mathrm{Vol}\Omega)^{-\frac{2}{n}} \cdot i^{\frac{2}{n}}.$$

这儿 $\{\lambda_i\}$ 及 $\{u_i\}$ 分别是 Dirichlet 及 Neumann 问题的特征值.

在 [LY1] 中, Li 同 Yau 证明了从平均上讲, Polya 猜测是对的. 而且, 对任意的闭流形 M , 恒有

$$\lambda_i \leqslant C_1 + C_2(i+1)^{\frac{2}{n}}(\mathrm{Vol}M)^{-\frac{2}{n}},$$

这儿 C_1 及 C_2 是只同 M 的直径 m 及 Ricci 曲率的任一个下界有关的常数.

热核, 或算子 $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ 的基本解, 对于认识 Laplace 算子的特征值是基本的工具, 它常常给出关于特征值的较小依赖于几何的估计. 然而, 除了 Weyl 的渐近估计的第一项之外, 它尚不能对低阶渐近项给出估计. 但是, 通过研究热核的迹, $\sum\limits_i e^{-\lambda_i t}$, 在过去已经得到了很多信息. 特别, 体积及总标量曲率等可以从此无穷级数当 $t \to 0$ 时得出来. 然而, 为了计算这些渐近值, 必须知道全部的特征值, 因此这不是得到不变量的有效的方法. 当 M 是凸域时, 的确可以找到有效地得到体积的方法. 当 M 不凸时, 问题是不稳定的并且是困难的, 无论怎样, 在一般情形, 人们不可能得出流形的几何的全部信息 (参看 [Mi]). C. Gordon 及 Wilson [GW] 发现了在某个紧流形上存在具有相同谱的非平凡的连续的度量族. 然而, 所有具有相同的谱的流形的已知例子都是局部等度的.

谱的研究的第二个方面是对一般的流形用极小极大原理估计开头几个特征值, 特别是 λ_1 , Cheng[Ch1] 给出了只依赖于流形的直径及 Ricci 曲率的任一个下界的 λ_1 的上界. 后来, Li 及 Yau[LY1] 得到了 λ_1 的与同样的量有关的下界. Zhong 和 Yang[ZY] 得到了下界的最优估计.

估计特征值的空隙是个有趣而且重要的问题. 例如, 可知 $\lambda_1(S^2)$ 的重数不超过 3, (见 [Ch2]). 因此要估计 $\lambda_4 - \lambda_1$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸域 Ω , 在 Dirichlet 边值条件下有 $\lambda_1 < \lambda_2$. 在 [SWYY] 中, I. Singer, Wang, Yau 及 Yau 对于凸域

的 $\lambda_2-\lambda_1$ 给出了估计. 证明的基本想法是：设 f_1 及 f_2 是开始的两个特征函数，因为 Ω 凸，所以函数 $u=f_1/f_2$ 是有定义的且直到边界上都是光滑的. 令 $G=|\nabla u|^2+\lambda(\mu-u)^2$ ，此处 $\lambda=\lambda_2-\lambda_1$ 及 $\mu=\sup\limits_{\Omega}u$ ，由极大值原理，不难看出

$$G\leqslant\sup_{\partial\Omega}G=\sup_{\partial\Omega}\lambda(\mu-u)^2,$$

这蕴含

$$|\nabla u|^2+\lambda(\sup\ u-u)^2\leqslant\lambda[(\sup\ u-\inf\ u)^2-(\sup\ u-u)^2],$$

因此

$$\sqrt{\lambda}\geqslant\frac{|\nabla u|}{\sqrt{(\sup\ u-\inf\ u)^2-(\sup\ u-u)^2}}.$$

将此不等式沿着连结 u 达到极大值与极小值的线段积分，就得到

$$\lambda_2-\lambda_1=\lambda\geqslant\frac{\pi^2}{4d^2},$$

这儿 d 是 Ω 的直径. 这个不等式的常数是否能够改进使得等号对于线段成立？

显然对于特征值的认识本质地依赖于对特征函数的认识，特征函数的基本部分是其零点集合，它叫做结点集 (nodal set). 甚至对于二维流形，我们还不真正了解结点集. 一个很著名的古老问题是研究凸域的第二特征函数的结点线. 据猜测，它不可能包围域的任一个紧子集，最近 Lin 在域具有对称性的假设下证明了这个猜测. 另一个有趣的问题可以如下叙述：设 l_n 是第 n 个特征函数的长度，能否得到 l_n 的渐近估计？似乎它的阶是 $\sqrt{\lambda_n}$ ，这儿 λ_n 是第 n 个特征值. 困难的是给出 l_n 的上界估计.

以下我们考虑 M 是完备的非紧流形的情形. 这时候，应该有两个理论，一个 L^2 的，一个 L^∞ 的. 首先考虑 L^2 理论，谱一般不是离散的了. 可是，我们还是可以问： $-\Delta$ 什么时候有特征值？也就是说，存在 $f\in L^2(M),f\neq0$ ，使得 $\Delta f=-\lambda f(\lambda>0)$ ？我们希望下列情况全是对的：

(1) 当 M 是完备的且 $K\geqslant0$（ K 是截曲率）时， M 没有纯粹的点谱. Escobar[Es] 在 M 在一个紧集外是旋转对称的情形证明了这个断言；

(2) 当 M 是完备的、单连通且 $-C\leqslant K\leqslant-1$ 时， M 没有特征值；

(3) 当 M 是完备的且 $-C\leqslant K\leqslant0$ 且体积有限时， M 有无穷多特征值；

这些猜测的正确性在 $n = \dim M = 2$ 时都不知道. 已知猜测 (3) 在 M 是对称域的算术子群的商空间时成立.

了解 $\lambda = 0$ 的情形特别有趣. 特别, M 什么时候有满足某些条件的非常值调和函数? 如果有, 有多少?

Yau 在 [Y5] 中证明了, 在任意完备的非紧流形上, 不存在非常值的 L^p 调和函数, $1 < p < \infty$. 特别, 除常数外没有其他 L^2 调和函数. 由于这一点, 我们将注意力集中于正的或有界的调和函数上. 这儿我们要讨论的基本问题是给出使 Liouville 定理成立或不成立的 M 的几何条件.

Yau[Y7] 的一个结果说当 Ricci 曲率非负时, 仅有的正调和函数是常数. 这种流形可称为强抛物的.

最近, P. Li 及 Tam[LT] 研究了 M 在一个紧集外曲率非负的情形. 他们给出了所有有界的或正的调和函数的分类, 如果能用 Ricci 曲率非负代替上面的条件就好了. Donnelly 用 Yau 的方法证明了正调和函数的空间是有限维的. 这种流形可以叫做抛物线的. 有趣的是去证明当流形一致等价于某个完备的 Ricci 曲率非负的流形时, 它是抛物的.

另一方面, 我们想证明很多流形是双曲的, 即非抛物的. Anderson[A] 及 Sullivan[S] 对于单连通的、曲率介于两个负常数之间的完备流形解出了 Dirichlet 问题. 后来, Anderson 及 Schoen[AS] 关于这种流形的正调和函数作出了漂亮的工作. 他们的主要结果是 Martin 边界同无穷远球面 $S(\infty)$ 的 C^α 同胚的存在性, Martin 边界同无穷远球面的合二为一使我们能够对正调和函数开始一个系统的研究. 可以证明 M 上的每一个正调和函数 u 可以通过下面的公式得到,

$$u = \int_{S(\infty)} K(x, Q) d\mu_Q,$$

这儿 μ 是 $S(\infty)$ 上惟一的正 Borel 测度, $K(x, Q)$ 是 Poisson 核. 这是 Martin 表示公式.

在 Martin 边界上可以定义调和测度. 对这个测度的正则性的研究是个重要的问题. 也许有界域的调和测度的许多经典的事实在这儿会有相类似的结果.

当曲率没有下界时如何建立上述理论还不清楚. 也不知道当曲率只是非正时 Martin 边界是什么样子. 对于对称域, 已有一个完整的理论. 能从这个更广的框架来认识对称域就好了.

另一个重要的问题是证明一个非紧的完备流形 M 是双曲的,若 $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i(\Omega_i)>0$，这儿 Ω_i 是 M 的穷竭紧集列.

关于完备流形上的调和函数有很多有趣的问题. 一个函数 f 叫做具有 k 次多项式级的增长，如果 $|f|\leqslant C(1+r)^{k+\varepsilon}$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立，这儿 $r=d(x,p),p$ 是 M 上一个固定点. 一个函数叫线性增长的, 若它满足前面 $k=1$ 的不等式. 对于具有非负 Ricci 曲率的完备黎曼流形，我们希望得到线性增长的调和函数的维数的上界，当 M 是 Kähler 时，多项式增长的全纯函数构成一个环. 这时，我们想知道什么时候这个环是有限生成的，什么时候可以找到线性增长的母元. 这个问题同 Kähler 几何学中下列问题密切相关：具有正全纯双截曲率的非紧完备 Kähler 流形全纯等价于 $\mathbb{C}^n$.

Siu 和 Yau 及 Mok-Siu-Yau[MSY] 试图用 Hörmander 的 L^2 理论来解决这个问题. 然而，他们的假设相当强，方法是构造慢速增长的全纯函数. 最近 Li 和 Yau[LY3] 用椭圆理论的论证来构造可以分隔两个点的线性增长的全纯函数. 他们假设了流形的体积的增长是 $2n$ 次多项式的.

另一方面，在具有强的负曲率的单连通完备 Kähler 流形上构造有界全纯函数是一个重要问题. 事实上，我们希望能证明它全纯等价于 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，或至少有界全纯函数可以分隔流形上的点. 看上去这个问题同经典的 Corona 问题向高维有界域的可能的推广有密切的关系.

8.2 Yamabe 方程及共形平坦流形

Yamabe 方程是同 Riemann 流形上一个度量的共形形变（又称保角形变）相关的非线性椭圆型标量方程. 给定标量曲率是 k_0 的 Riemann 度量 g_0. 设 g 是点点共形于 g_0 的度量，则 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$，此处 $u>0$ 是光滑函数，g 的标量曲率 R 由下列方程给出

$$L_0u=-\gamma_0\Delta_0u+R_0u=Ru^{\alpha},\tag{8.2.1}$$

这儿 Δ_0 是关于 g_0 的 Laplace 算子，$\gamma_0=\frac{4(n-1)}{n-2},\alpha=\frac{n+2}{n-2}$ 并且 $n=\dim M$.

Yamabe 在 [Ya] 中断言总可以找到方程 (8.2.1) 的解 $u>0$, 使得 $R=\text{const}$，即紧致 Riemann 流形上的任意度量都共形等价于一个常标量曲率的度量，然

而，他的证明中有个错误. 这是 Trudinger 发现的. Trudinger[Tr] 还证明了当线性算子 L_0 的最小特征值 λ_1 非正时，方程 (8.2.1) 总可以对 $R = \mathrm{const}$ 解出来.

令 Y 是 $L_1^2(M)$ 上由

$$Y = \int_M (\gamma|\nabla_0 u|^2 + R_0 u^2) \Big/ \left(\int_M R u^{\alpha+1}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}}$$

定义的泛函，这儿 ∇_0 是关于度量 g_0 的梯度，简单的计算表明方程 (8.2.1) 是泛函 Y 的 Euler-Lagrange 方程.

Aubin[Au1] 给出 Y 在 $L_1^2(M)$ 中有极小的充分条件. 他的叙述如下. 固定 $R \equiv 1$ 并且 $\sigma(g_0)$ 是 Y 的极小值， $\Lambda_n = \sigma(\hat{g})$ ，这儿 $\hat{g}$ 是单位球 S^n 上的标准度量，则有：

(a) 对任意度量 $g_0, \sigma(g_0) \leqslant \Lambda_n$ ；

(b) 如果 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$ ，则存在使 Y 极小的光滑函数 u.

因为 u 是 (8.2.1) 当 $R = \mathrm{const}$ 时的解， Yamabe 的猜测就变成了对于不共形于 S^n 上标准度量的度量是否有 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$.Aubin[Aul] 证明了若 $n \geqslant 6$ 并且 g_0 不是共形平坦时，则 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$. Aubin 的证明是局部的. 他构造了一个在支集中球面对称的函数. 因此剩下的情形是 $n = 3, 4, 5$ 或 M 是共形平坦且 $n \geqslant 6$ 这两种.

近来， R. Schoen[Sc] 解决了这两个剩下的情形从而完全解决了 Yamabe 猜测. 他的证明是整体性的并且用到了推广的正质量定理（见 Schoen 和 Yau 的文章），在 M 共形平坦或 $n = 3$ 的情形， Schoen 对某个适当的序列 $\{u^\varepsilon\}$ 给出了 $Y(u^\varepsilon\}$ 的更高阶的估计. $n = 4$ 或 5 的情形需要用到一种复杂的摄动理论，并且再一次借助于正质量定理.

对于完备的非紧流形也可以提同样的问题. 最近， Schoen 宣布了一些新结果，一个特别有意思的结果是，若 M 的拓扑型与 $S^n = \{p_1, \cdots, p_k\}$ 相同， $k > 1$ ，则在标准度量的共形等价类中可以找到一个标量曲率是常数的完备度量.

与 Yamabe 猜测有关的另一个课题是（局部）共形平坦流形的研究. Kuiper 的一个定理 [Ku] 说对任意的共形平坦的单连通流形 M ，总可以找到 M 到标准球面的开共形映照，而且它在 S^n 的共形微分同胚之下是惟一的. 这个映射叫做拓展映射 (developing map). 我们用 Ω 记其象集， $\Lambda = S^n - \Omega$.

Schoen 和 Yau 得到了 Λ 的 Hausdorff 维数与 M 的标量曲率的符号的关系的结果. 它们可以叙述如下:

1. 如果 M 是完备的(可以是紧的)共形平坦流形, 而且标量曲率 $R \geqslant 1$, 则拓展映射是到 S^n 中的共形微分同胚. 因此 M 被 S^n 中一个开集所共形覆盖. 这个证明关键性地依赖于共形算子的 Green 函数;

2. 如果 M 是紧致共形平坦流形, 且标量曲率为正, 则 $\mu_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)=0$, 这儿 μ_k 表示 k 维 Hausdorff 测度;

3. 若 M 是被 $\Omega \subset S^n$ 共形覆盖的紧流形, 且 $\mu_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)<\infty$, 则 M 在其共形类中有标量曲率 $R \geqslant 0$ 的度量. 据猜测, 若 $R \geqslant 0$, 则 $\mu_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)<\infty$.

主要的想法是用拓展映射, 把问题化成 S^n 开集上的 Yamabe 方程的研究. 证明的其余部分是相对地容易的. 利用同样的技巧, Schoen 和 Yau 证明了对于具有正标量曲率的共形平坦流形 $M, \pi_i(M)=0, 2 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$. 他们的结果有些对完备流形也成立.

8.3 调和映照

调和映照是几何和分析中的重要对象. 它们作为某些函数空间上的能量泛函的临界点自然出现. 调和映照反映了流形的许多几何性质.

给了 Riemann 流形 M 和 N, 考虑映射空间 $C^r(M,N)$. 一个问题是找出这个空间中的好的(即典则的)代表元. 对于映照 $f: M \rightarrow N$, 我们定义它的能量 $E(f)=\int_M |df|^2 dv_N$. 一个调和映照就是这个能量的临界点. 首要的问题是存在性、唯一性及正则性.

1: 存在性、唯一性及正则性

最初的主要的工作是 J. Eells 和 L. Sampson[ES] 的. 他们证明当 M, N 是紧流形且 $K_N \leqslant 0$ 时, 在每一个同伦类中都有调和映照. 他们通过一个非线性热方程对一个任意的映照变形, 通过适当的估计, 并过渡到极限, 就得到了调和映照. 事实上, 若 $K_N<0$ 且秩 $\geqslant 2$, 则调和映照在其同伦类中是唯一的 [Hr]. 后来, R. Hamilton[Ha] 用 [ES] 中的方法加上一些巧妙的估计, 解决了 M 是带边流形时的 Dirichlet 问题. 这类证明当去掉曲率非正条件时不再适用. Eells 和 Wood[EW1] 证明了不存在 2 维环面到球面的度数为 1 的调和映照.

我们也可以不在一个同伦类中, 而在具有相同的在 π_1 群上的作用的类中找

调和映照. 我们说两个映照 $f, g: M \to N$ 是 π_1 等价的, 如果 $f_* = g_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$. 当 M 是 Riemann 面时, L. Lemaire[Lm] 证明了在 π_1 等价类中, 存在正则的、使能量极小的调和映照.

这个问题的另一种处理由 Sacks-Uhlenbeck([SaU]) 及 R. Schoen-S. T. Yau ([ScY1]) 给出. Schoen 和 Yau 考虑函数空间 L_1^2 并证明了对 $u \in L_1^2(M,N)$, u_* 是有意义的并且在弱极限之下不变的. 用弱闭集 $\{f \in L_1^2(M,N) | f_* = (f_0)_*\}$, 再加上二维极小调和映照的正则性, 可以证明在这个类中有光滑的调和映照.

Schoen 和 Yau 的证明还可以通过 f 在 M 的二维骨架上的限制而推广到高维. (White[Wh] 也注意到这一点.) 有理由相信可以找到能量极小的映射, 它在 π_2 上的作用与给定的映射的作用在某种意义上相像.

对于极小的调和映射, R. Schoen 和 K. Uhlenbeck 做了很好的工作 ([ScU1, 2]). 通过精巧地应用比较的映照, 他们证明了能量极小的调和映照的奇点集的 Hausdorff 余维至少是 3 , 用他们的定理还可以重新推出 Sacks 和 Uhlenbeck 的一个定理.

2. 非紧流形

非紧流形的调和映照的理论比紧流形的情形要复杂得多. 一个原因是, 当我们选取映照的一个极小化序列时, 它们的能量不一定集中在一个有界域中. 另一方面, 人们希望通过对流形的拓扑的适当的限制, 可以避免上述情形.

对于 L^2 调和映照, 即有限能量的弱调和映照, 有时可以通过附加一些几何的或拓扑的限制条件而证明存在性. 当 N 是曲率非正的流形时, Schoen 和 Yau[ScY2] 推广了 Eells-Sampson[ES] 和 Hartman[Hr] 的工作. 他们证明了如果 N 是非正截曲率的紧流形, M 完备且 $f: M \to N$ 能量有限时 f 在紧集上与能量有限的调和映照同伦.

后来, [ScY3] 一文通过具体地计算 $N \times N$ 上距离函数 d^2 的 Hessian 而证明了同一个同伦类中的调和映照的集合是连通的 (当 M 紧致时见 [Hr]) 并且可以全测地地浸入到 N 中去. 而且, 在 $\pi_1(N)$ 无非平凡 Abel 子群且 M 的象不是点也不是圆周时, 它是一个点. 这儿我们假设了 M 具有有限体积并且调和映照能量有限. 他们也用调和映照研究了有限群在紧流形上的光滑作用.

3. 刚性

当 M 和 N 是维数 $\geqslant 3$ 的负曲率的 Einstein 流形时，自然要问：调和的同伦等价是否一定是等度？这是基于映入负曲率的流形的调和映照的惟一性及 Mostow 的刚性定理. 如果这是对的，它将在秩为 1 的对称空间的情形给出 Mostow 刚性定理的另一个证明.

对于负曲率的流形 M 和 N ，问题是：调和的同伦等价是否一定是微分同胚？ Schoen-Yau[ScY4] 和 Sampson[Sa1] 在 M 和 N 是 Riemann 面时证明了这是对的. 如果只假定曲率非正， Calabi 对 N 是环面的情形造出了一个反例.

通过在微分同胚集合中使能量极小并配合一个平移的推理， Jost-Schoen [JS] 对于同亏格的曲面造出了调和微分同胚，而且他们不用到任何曲率的假设.

当 M 和 N 是 Kähler 流形时，调和映照的例子是很多的，例如全纯映照就是调和的. 另一方面， Yau 推测当 N 曲率是负时，调和映照是全纯的. 为了解决 Yau 这个猜测， Siu[S2] 证明了当 N 是强负曲率时且 f 的秩在某一点至少是 4 时， f 或是全纯的，或是反全纯的. N 的曲率强负的定义与曲率算子是负的相似. 人们希望能弱化这个条件，但如果只假设负的全纯双截曲率，则类似于 Siu 的定理的命题是错的. 这是因为对 $M = B^n/T$（看成 $\mathbb{C}P^n$ 中的正则嵌入子簇）， M 的任意超平面截面具有负的全纯双截曲率并且一般不是刚性的.

近来， Jost-Yau[JY1,2] 考察了同伦等价于 $N = D \times D/T$（ T 可约）的复曲面 M 上的复结构. 令 $f: M \to N$ 是调和的同伦等价，这儿 M 是 Kähler 的. 通过研究叶状结构 $f^\alpha \equiv \text{const} \cdot 1$（特别是奇点集），他们证明了 M 的万有覆盖与 $D \times D$ 全纯等价.

接着， Mok 对于维数任意的而且在 Kähler 度量的范畴中同伦于多圆柱的不可约商空间的那些复流形证明了一个刚性定理. 他也考虑了 Jost 和 Yau 研究的叶状结构.

Jost 和 Yau 还把刚性定理推广到拟投影流形去.

对于曲率强正的紧致流形，我们希望能证明：要么它是局部 Hermite 对称的，要么它的复结构是刚性的， Sampson[Sa] 研究了 M 是 Kähler 且 N 是有 Hermite 负曲率，即 $R^N_{ij\bar{k}\bar{l}} u^i v^j \overline{u}^k \overline{v}^l \leqslant 0$ 的情形. 基本上照 Siu 那样地应用 Bochner 技巧，他证明了 M 到 N 所有调和映照都是全纯的. 利用 Sampson 的结果加上调和映照的存在性定理，我们可以很容易地得到 Kähler 流形的拓扑型的限制.

另一个有趣的情形是 M 和 N 是 Kähler 流形并且 N 有正截曲率的情形. 是否每个极小调和映照都是全纯的或反全纯的？这个问题只在 $M=\mathbb{CP}^1$ 时有答案. 并且如果我们能在加上 N 是不可约对称空间的假设后证明这命题，则下列猜测可能是对的：不可约对称 Kähler 流形只有一个 Kähler 结构. 注意，在可约的 Kähler 流形 $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ 上，存在无穷多 Kähler 的复结构.

4. 物理中的调和映照

从曲面到 Riemann 流形、特别是对称空间的调和映照的分类是数学物理学家关心的. 例如，著名的旋模型 (chiral model) 就是研究 S^2 到某个对称空间的映照.

最简单的对称空间是实的及复的投影空间. 在 [Ca1] 中， Calabi 给出了曲面到实投影空间的迷向调和映照的一个有效的参数化. 在 Calabi 和物理学家的工作的基础上， Eells 和 Wood[EW2] 建立了全迷向调和映照 $\phi:M^2\to\mathbb{CP}^n$ 及序偶 (f,r) 的一一对应，这儿 $f:M^2\to\mathbb{CP}^2$ 是个饱满的 (full) 全纯映照并且 $0\leqslant r\leqslant n$ 是个整数(定义见 [Ca1] 和 [EW2]). 他们的想法是：如果 $f:M\to\mathbb{CP}^2$ 是全迷向映照，则对某个 r 和 s， $r+s=n$，映照

$$f=[\phi\oplus D''\phi\oplus\cdots\oplus(D'')^{r-1}\phi\oplus D'\phi\oplus\cdots\oplus(D')^s\phi]^\perp$$

是饱满的全纯映照，这儿 D' 及 D'' 是协变导数的 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 分量.

后来， Bryant([Br1],[Br2]) 讨论了曲面至 S^6 及 S^4 的调和映照. 在 Calabi 及 Penrose 的 twistor 构造的启发下，他考虑了一类特殊的共形调和映照，即超极小曲面 (super-minimal surface) (注意 Hopf 已研究过这种曲面的雏型). 他建立了超极小曲面同 $\mathbb{CP}^3$ 中的水平曲线的一一对应，后者是相对于 twistor 纤维化： $\mathbb{CP}^3\xrightarrow{T}S^4$ 而言的. 通过构造这种曲线， Bryant 证明了任意 Riemann 曲面可以共形地极小浸入 S^4. 对于一般的 4 维流形的情形，参看 [ESa].

近来， K. Uhlenbeck[U3] 讨论了单连通 2 维域到实李群 G_R 的调和映照的空间 H (用物理学家的语言，即 chiral 模型). 她研究了流形 H 的代数结构及其与 Kac-Moody 代数的关系.

调和映照领域的另一个尚未开垦的领地是曲面到 Ricci 平坦的 3 维 Kähler 流形的调和映照的分类. 对这一问题的兴趣是理论物理中的超弦 (superstring) 的研究引起的.

8.4 极小子流形

微分几何中另一个重要的课题是极小子流形的研究. 在这一节中, 我们主要考虑紧致三维流形中的极小曲面. 极小曲面 (除非有相反的声明) 总是假定是正则的、嵌入的.

一般说来, 如果 M 的拓扑不允许某个曲面在其中收缩到一个点, 则不难找到浸入的极小曲面. 此外, 有时候还可以证明曲面是嵌入的. 例如 Meeks 和 Yau[MY] 证明了如果 $\pi_2(M) \neq 0$, 则存在嵌入的 S^2 及 $\mathbb{R}P^2$, 它们张成作为 $\pi_1(M)$- 模的 $\pi_2(M)$. 这个定理可用来研究三维流形上的有限群的作用.

用 "山径原理" (mountain pass principle) 去造极小曲面比较难. 如何用 Ljusternik-Schnirelmann 理论去找出许多极小曲面(或具有特殊的拓扑型的)也不清楚. Sacks-Uhlenbeck[SaU] 把摄动的能量泛函与" Morse 理论"结合起来证明了任意 n 维流形 M 包含至少一个浸入的极小的 S^2 , 如果对某个 $k, \pi_k(M) \neq 0$.Siu 和 Yau 利用了 Sacks-Uhlenbeck 这一工作去解决 Kähler 几何中的 Frankel 猜测. 最近, M. Micalif 及 D. Moore[MD] 用类似的推理给出了 Riemann 几何中的经典的 Pinching 定理的一个证明. 事实上, 他们需要的 Pinching 假设更弱.

Pitts 在他的论文 [Pi] 中引进了 "殆极小 (varifold) " 的概念. 粗略地说这很接近于局部极小的 varifold 的概念. 利用整系数闭链群的同伦群的非平凡性 [A1] , 他证明了任意维数 $\leqslant 6$ 的流形中有非空、紧的、嵌入的光滑极小超曲面. 他的想法是应用极小极大原理于 S^1 到整系数流 (currents) 的映照上, 后者据 Almgren 建立的同构 [A1] 是非平凡的. 由于这个造法太一般了, 我们得不到这个超曲面的拓扑的任何信息. 近来, R. Schoen 和 L. Simon[SS] 推广了 Pitts 的工作. 他们证明了任意流形中有极小超曲面, 其奇点集的 Hausdorff 余维至少是 7.

对某些三维流形, 作者可以对 Pitts 方法造出的极小曲面的亏格做出估计. 这个证明是很早之前就有了的. 因为它还没有发表, 我们在这儿给出证明的完整的大纲.

设 M 表示这个三维流形, R, R_{ij} 及 R_{ijkl} 是其标量、 Ricci 及截曲率. 令 Σ 是 Pitts 造出的极小曲面; K, A 及 e_3 是 Σ 的 Gauss 曲率、第二基本形及法向量场. 由 Pitts 的造法, 我们知 Σ 的指数是 1 , 这个条件等价于算子 L 的第

二特征值的非负性，这儿

$$L = -\Delta - (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2),$$

Δ 是曲面 Σ 的 Laplace 算子. 换言之,

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2) f^2 dv \leqslant \int_\Sigma ||\nabla f||^2 dv$$

对所有垂直于第一特征函数 u_1 的函数 f 成立.

现在我们用共形面积这个概念（这是共形不变量）来给出第二特征值 λ_2 的依赖于 M 及 Σ 的亏格的上界估计.

设 $F: \Sigma \to S^n$ 是到单位球中的共形浸入，则 F 与任意的共形变换 $g \in \mathrm{Conf}(S^n)$ 的复合也是共形浸入. 因为 u_1 是正函数. 用 [LY2] 中的论证，可以找到 $g_0 \in \mathrm{Conf}(S^n)$，使得 $g_0 \circ F \perp u_1$，即

$$\int_\Sigma (g_0 \circ F) u_1 dv = 0.$$

现在考虑新映照 $g_0 \circ F$，我们仍用 F 记它， $F = (f_i), \sum f_i^2 = 1$，因为 Σ 指数是 1，

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2) f_i^2 dv \leqslant \int_\Sigma |\nabla f_i|^2 dv$$

并求和，得

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2) f_i^2 dv \leqslant \int_\Sigma \sum_i |\nabla f_i|^2 dv.$$

因为 F 是共形的， $\int_\Sigma \sum_i |\nabla f_i|^2 dv = 2\mathrm{Area}(F(\Sigma))$. 因此

$$2 \inf_F \sup_{g \in \mathrm{Conf}(S^n)} \mathrm{Area}(g \circ F(\Sigma)) \geqslant \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2) dv.$$

左边的这一项是共形不变量 $V_c(n, \Sigma)$，叫做 n 维共形面积. 它对所有 n 的下确界是 $V_c(\Sigma)$，叫做曲面 Σ 的共形面积.

用 Σ 在 S^2 上的分歧覆盖，可以证明 $V_c(\Sigma) \leqslant 4\left(\frac{g(\Sigma)}{2} + 1\right)\pi$，这儿 $g(\Sigma)$ 是 Σ 的亏格 [Gri]. 因此

$$8\left(\frac{g(\Sigma)}{2} + 1\right)\pi \geqslant \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + ||A||^2) dv.$$

另一方面，因为 $\mathrm{Ric}(e_3)+||A||^2=\mathrm{Ric}(e_1)+\mathrm{Ric}(e_2)-2K$，如果我们假设 M 的 Ricci 曲率非负，则

$$\int_{\Sigma}(\mathrm{Ric}(e_3)+||A||^2)\geqslant-\int_{\Sigma}2Kdv=4\pi(2g(\Sigma)-2),$$

把上面两个不等式结合起来就得到

$$8\pi\left((\frac{g(\Sigma)}{2}+1\right)\geqslant 4\pi(2g(\Sigma)-2),$$

因此 $g(\Sigma)\leqslant 4$，这就是所要求的 Σ 的亏格的上界. 事实上，应该能够再进一步改进这个估计，因为 $V_c(M)$ 的估计不是最优的. 能否把上面的推理推广去研究高指数的极小曲面？

人们想要估计极小曲面的亏格的原因是它们包含了关于背景空间 M 的信息. 例如，具有正标量曲率的三维流形 M 的一个嵌入的极小曲面提供了 M 的 Heagard 分裂的一个好的候选者. 而且当 M 是三维同伦球且曲面的亏格小于或等于 2 时，M 实际上就是球. 因此，若我们可以造出一个极小曲面，它正好是一个 Heagard 分裂并且给出其亏格一个好的估计，那么我们就朝着 Poincaré 猜测跨出了一大步.

极小曲面理论中一个重要的问题是流形中多个极小曲面（甚至无穷多个）的存在性. 在 2 维球上，至少存在三条闭的、嵌入的测地线，椭球面上恰有三条，因此这个估计是最优的.

对于三维球，人们希望证明存在至少四个极小球面. 人们也希望知道，中心在 $\mathbb{R}^4$ 的原点的一个椭球面上，是否仅有的极小 2 维球是与三维坐标面相交得到的那四个.

Smith 和 Simon 用 Pitts 的一个思想证明了任意三维球面中有嵌入的 2 维球. 他考虑映射度为 1 的映射 $F: I\times S^2\to S^3$，使得在每个片上（两端的除外），$F(t,\cdot): S^2\to S^3$ 是个嵌入. 他证明了如果取

$$\min_F \max_{t\in[0,1]} \mathrm{Area}(F(t,S^2)),$$

则得到一个嵌入的 S^2. 对于同伦球，是否也有相似的定理？

另一个问题是去了解一个正 Ricci 曲率三维流形中具有给定的亏格 g 的所有极小曲面的空间. 最近，Choi 和 Schoen[CS] 证明对固定的 g 这个空间实际

上是紧的. 我们想提到的是甚至对三维球, 这个紧性也是新的. 他们的证明是基于 Choi 和 Wang[CW] 关于 Σ_g 的面积的估计. 这个面积的上界则控制了极小曲面序列的收敛性. 有了这个紧性的定理之后, 仍然存在几个有趣的问题. 例如, 当 M 无对称性时, 是否会存在连续的极小曲面族? 当 M 有对称性时, 是否任何这样的连续族都是等距群给出的?

第一特征值的估计总是有意思的, 对极小曲面尤其如此. 对于标准的三维球, 在极小曲面上坐标函数都是特征值为 2 的特征函数. Yau 猜测 2 就是第一特征值. 为了证明 Yau 的猜测, Choi 和 Wang[CW] 证明了在 Ricci 曲率不小于 2 的三维流形中, 极小曲面的第一特征值 λ_1 至少是 1. 化成极小曲面的共形面积, Li 和 Yau 获得了 [LY2]λ_1 的如下的上界

$$\frac{2\text{Conf Area}(\Sigma_g)}{\text{Area}(\Sigma_g)} \geqslant \lambda_1(\Sigma_g).$$

把这个不等式推广到高次的特征值并研究极小曲面的高次特征值是个有意思的问题.

设 M 是三维同伦球. 如果 M 不是 S^3, 则它含有一个假 (fake) 三维圆盘. 在上面赋一个度量, 使它在近边界处是渐近于乘积度量. 如果在同痕 (isotopic) 于边界的 S^2 中考虑面积的极小化, 则极限的 S^2 将包住一个假圆盘. 在这个 S^2 上画一条 Jordan 曲线使得它把 S^2 分成面积相对的两部分. 那么可以期望此 Jordan 曲线在此假圆盘中界定一个嵌入的极小圆盘. 如果能做到这一点, 则可以再压缩这个 S^2 从而得到 Poincarè 猜测的证明.

最后, 极小曲面理论应用到三维拓扑已获得了意外的成功. 我们相信极小曲面的更透彻的研究将会揭示出三维流形的更多的奥秘.

8.5 Kähler 几何

下面我们考虑复几何中的四个基本主题:

1. 复结构及近复结构的存在性.

2. 复流形上的 Kähler 结构和代数结构的存在性.

3. 单值化问题与度量的参数化.

4. 复流形上的解析对象 (boject). 例如, 解析闭链 (cycles), 全纯向量丛等.

相应地，我们将本节分成四部分.

1. 复结构和近复结构.

设 M 为偶数维定向微分流形. 近复结构 J 的存在等价于向量丛的结构群由 $GL(2n,\mathbb{R})$ 到 $GL(n,\mathbb{C})$ 的过渡. 这基本上是一个代数问题并已很好地研究了.

然而，什么时候一个近复结构同伦等价于一个可积的近复结构（即由一个复结构而得的）却是个很困难的问题. 当 $n=1$ 时，每一个 M^2 都容许一个近复结构，且这样的结构是可积的和代数的. 对于 $n=2$, ven de Van 给出了几个 M^4，它们有近复结构但没有复结构. 他的方法基于对第一和第二 Chern 类的计算. 当 $n\geqslant 3$ 时，至今还没有这样的例子. 特别地，我们不知道是否 S^0 的近复结构容许一个复结构. 这个问题已提出很长时间了.

回到 $n=2$ 的情形. 对于一个复曲面，由 Hirzebruch 和 Noether 公式我们有 $3\tau=c_1^2-2c_2, c_1^2+c_2=12\tau$，因此 $\chi(M)=3\tau(M)$，这里 χ 是 Euler 示性数. τ 为 M 的指标. 那么我们有下列问题. 设 M^4 为一紧致近复流形，且满足 $\chi(M)=3\tau(M)$ 并以 $\mathbb{R}^4$ 为拓扑覆盖空间. 是否每一 $\pi_1(M)$ 的 Abel 子群都是无限循环群？ M 是否容许一个复结构使得 M 以 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球为全纯覆盖空间？也许 Lefschetz 定理对于解决这一问题是有用的.

2. Kähler 结构和代数结构.

设 M^n 为以 J 为复结构的 n 维紧致复流形. 首先要问, 什么时候 J 是 Kähler 的, 也就是说 (M,J) 容许一个 Kähler 度量？ Harvey-Lawson[HL] 给出了 Kähler 条件的一个内蕴的刻画：当且仅当 M 上没有任何正流 (current) 是边缘的 $(1,1)$ 分量. Hodge 理论给出了许多复流形是 Kähler 流形的必要条件. 特别地，它们的偶 Betti 数是正的，奇 Betti 数是偶的. 此外当 (M,J) 是 Kähler 的时候，它的有理同伦型由它的有理上同调所决定，可参看 Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan 的文章.

现假设 M 为一 Kähler 流形，即 M 具有某 Kähler 复结构. 是否 M 容许一个非 Kähler 的复结构？什么情况下 M 具有一个惟一的复（或 Kähler ）结构？

当 $n=2$ 时，每一个具有偶第一 Betti 数的紧复曲面是 Kähler 的（这来自 Kodaira 的曲面分类. 因为 Miyaoka[M1] 证明了具有偶第一 Betti 数的椭圆曲面是 Kähler 的，Siu[S1] 证明了每一 K-3 曲面是 Kähler 的. 由此我们知在 Kodaira 分类的七类曲面中，前五类关于每个复结构均是 Kähler 的. 剩下的两类具有奇

第一 Betti 数，因而不容许任何 Kähler 度量. 特别地可看出，在一 Kähler 曲面 M^2 上，所有的复结构都是 Kähler 的.

当 $n \geqslant 3$ 时，情况更加复杂. Calabi[Ca3] 证明了复环 $T^3_{\mathbb{C}}$ 具有非 Kähler 结构. 另一方面，我们知道 $T^3_{\mathbb{C}}$ 上仅有的一个 Kähler 结构是其标准结构.

Yau 提出下述猜测：设 $M^n(n>2)$ 为一具负截曲率的紧致 Kähler 流形，则存在惟一的 Kähler 复结构. 当将负截曲率的条件换为负双截曲率时，这猜测将不成立.

对于一个局部 Hermite 对称空间 $M^n, n \geqslant 2$， Calabi 和 Vessentini[CV] 证明了 $H^1(TM)=0$. Siu[S2] 证明了若 M^n 为一具强负曲率的紧致 Kähler 流形，则 M^n 的 Kähler 结构是惟一的，这部分地肯定了 Yau 的猜测.

现假设 M 是 Kähler 的且微分同胚于单位球 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的紧致商空间 D^n/T. 先于 Siu 的定理， Yau[Y2] 利用不等式

$$(-1)^n \cdot C_1^{n-2} C_2 \geqslant \frac{(-1)^n n}{2(n+1)} \cdot C_1^n, \tag{8.5.1}$$

这里 $C_1(M)<0$. 证明了 M 的 Kähler 度量是惟一的. 问题是：什么时候 M 的复结构是惟一的？当 $n \geqslant 3$ 时，还没有答案. 仅知道的结果是每一个复结构在 Kobayashi 的意义下是双曲的，即不存在任何 $\mathbb{C}$ 到 M 的非常值全纯映照.

不等式 (8.5.1) 也给出了 $\mathbb{CP}^n$ 上 Kähler 结构的惟一性. n 为奇数时，此结果属于 Hirzebruch 和 Kodaira[HK]（同样可见于 Morrow-Kodaira[MK]）. 我们注意到对这类刚性问题，调和映照似乎是很有用的. 特别， Siu 关于 $\partial\bar{\partial}$-Bochner-Kodaira 技巧的修改有很好的使用前景（见 Siu[S2] 和 Sampson[Sa]）.

关于 Kähler 结构形变到代数结构的问题，我们有著名的 Kodaira 猜测：每一个紧致 Kähler 流形能够变形到一个代数流形. 当 $n=2$ 时这是对的，事实上 Kodaira[Ko] 已经证明了每一紧致 Kähler 曲面可形变为一个代数曲面. 对于 $n \geqslant 3$， Kodaira 猜测尚未解决. 特别地，若 M^n 是一个非代数的紧致 Kähler 流形， TM 为它的全纯切丛，是否 $H^1(TM) \neq 0$？由于一个 $H^{2,0}=0$ 的紧致 Kähler 流形是代数的，相应的问题是：若 M 是 Kähler 的，是否由 $H^{2,0} \neq 0$ 能推出 $H^1(TM) \neq 0$？（不难构造一个 $H^{2,0}(M)$ 到 $H^1(TM)$ 的映照.）

3. 单值化.

在复一维情形，我们知道每一 Riemann 面都是下列曲面之一：

$\mathbb{CP}^1$： Riemann 球，具有惟一的复结构.

E：一个椭圆曲线，由 $\mathbb{C}$ 全纯覆盖.

$\Sigma_{g_1}(g_1 > 1)$：一个由单位圆盘 $D \subseteq \mathbb{C}$ 全纯覆盖的曲面.

在高维情况，许多结果和分类在推广上面的分类的努力中得到. 人们想知道在什么几何条件下 M 双全纯同胚于一个高维的 $\mathbb{CP}^1, E$ 或 $\Sigma_{g_1}(g_1 > 1)$ 的类似物. 这对应于流形是椭圆的、抛物的或双曲的. 通常，惟一性是在双正则、双有理或单有理的意义下理解的. 在非紧致的情形，人们试图处理无穷远边界及把 M 紧致化为某一射影代数簇 $\widetilde{M}$ 的一个 Zariski 开集，使得 $M = \widetilde{M} \setminus$ (子簇).

A. 椭圆流形

Frankel[Fr] 猜测任何具有正双截曲率的紧致 Kähler 流形双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^n$；他证明了 $n = 2$ 的情形. 后来 Mori 和 Siu-Yau 独立地证明了一般情形. Mori 实际上在切丛是丰富 (ample) 的较弱的假设下证明了 Hartshorne 猜想.

[Y6] 中提出了下述猜测: 若 M 为一具非负双截曲率的单连通的紧致 Kähler 流形, 则 M 等度同胚于一个 Hermite 对称空间和复投影空间(不一定赋以 Fubini-Study 度量).

S. Bando[B1] 证明了 $n = 3$ 的情形. Mok 和 Zhong（钟家庆）[MZ] 证明了，若加上 M 是 Einstein 的条件，则 M 双全纯等度同胚于一个 Hermite 对称空间.

在 [S3] 中, Siu 给出了二次超曲面的一个曲率刻画. 他证明了若 $M^n, n \geqslant 3$ 为一处处 m- 正 $\left(m < \frac{n}{2} + 1\right)$ 并在某些点 2- 正的紧致 Kähler 流形, 则 M 双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^n$ 或二次超曲面 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$. 这里点 $P \in M^n$，m- 正意味着 P 点的双截曲率非负并且 $\dim N_P(\xi) < m, \forall \xi \in T_P M, N_P(\xi) = \{y \in T_p M | R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} y^i \bar{y}^j \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta = 0\}$.

不久前， H.-D Cao 和 B. Chow[CC] 在 M 具有非负曲率算子的假定下证明了此猜测. 最近， Mok 宣告他完全证明了这个猜测.

设 M^n 为一具正 Ricci 曲率的紧致 Kähler 流形（这等价于 $C_1(M) > 0$). 我们有下述问题:

(1) 是否 M^n 是单有理的？即是否存在 $\mathbb{CP}^n$ 到 M^n 的有理映照？

(2) 是否只有有限个（在拓扑的意义下）具正第一 Chern 类的 n 维代数流形？

(3) 是否 $C_1(M)^n \leqslant C_1(\mathbb{CP}^n)^n$ ？

当 $n=2$ 时， M^2 为一 del Pezzo 曲面， (1),(2),(3) 是对的. 当 $n=3$ 时， M^3 为一 Fano 3 维流形，即一具丰富反典则线丛的 3 维代数流形. Mori 和 Mukai[MM] 给出了具第二 Betti 数 $b_2(M)\geqslant 2$ 的 Fano3 维流形的一个完全分类. 他们实际上证明了在变形等价的意义下有 87 类具 $b_2(M)\geqslant 2$ 的 Fano 3 维流形，且满足 $6\leqslant b_2(M)\leqslant 10$ 的 Fano 3 维流形等度于 $\mathbb{CP}^1\times S_{11-b_2(M)}$ ，这里 S_d 表示 d 次 del Pezzo 曲面. $b_2=1$ 的 Fano ÷ 3 维流形称为第一类 Fano3 维流形，并已由 Isokovskih[Is] 分类了. 利用上述分类，容易验证 (1), (2), (3) 是对的. 但对于 $n\geqslant 4$,(1) ， (2) 和 (3) 是否成立尚不知道.

回忆 Gromov[Gr] 的定理：存在一仅依赖于 n 的常数 $C(n)$ 使 $\sum\limits_{i=0}^{n}b_i(M^n)\leqslant C(n)$ 对任何具非负截曲率的 Riemann 流形都成立. 当 M 是 Kähler 的，能否将条件“非负截曲率”换成“正 Ricci 曲率”? 人们也想了解具 Kodaira 维数 $K(M)=-\infty$（即 $H^0(M,K^m)=0,\forall m>0,K$ 表示典则线丛）的代数流形. 当 $n=2$ 时，它们是有理曲面或直纹曲面.

B. 抛物流形

设 M^n 为一个可由 $\mathbb{C}^n$ 全纯覆盖的紧致 Kähler 流形. 是否它也可由一个复环 $T^n_{\mathbb{C}}$ 覆盖? 当 $n=2$ 时， Iitaka 证明这是对的. 当 $n\geqslant 3$ 时，还未解决. 即使当 $n=2$ 时， Kähler 条件也不可去掉（否则有反例存在）.

设 M^n 为一具正截曲率的非紧致完备的 Kähler 流形，是否 M 双全纯同胚于 $\mathbb{C}^n$? 该问题已提出很长时间了. Siu-Yau[SY2] 和 Mok-Siu-Yau[MSY] 证明了下述事实：设 M 为一个完备的非紧致 Kähler 流形， $p\in M$ 且 $r(x)=\mathrm{dist}(x,p)$. 那么：

(a) 若 $\pi_1(M)=0,-\frac{A}{r^{2+\varepsilon}}\leqslant K_M\leqslant 0$ 对某一 $\varepsilon>0$ 成立. 则 M 双全纯等度于 $\mathbb{C}^n$.

(b) 若 p 为 M 的一个 pole 点（即 $\exp_p$ 是微分同胚）$|K_M|\leqslant A/(1+r^2)^{1+\varepsilon}$ ，则 M^n 双全纯同胚于 $\mathbb{C}^n$. 若加上 $K_M<0$ ，则 M^n 等度同胚于具平坦度量的 $\mathbb{C}^n$.

(c) 若 $K_M\geqslant 0,0\leqslant R\leqslant\frac{A}{r^{2+\varepsilon}}$ 且 $\mathrm{Vol}(B(p,r))\geqslant Cr^{2n}$ ，则 M 双全纯同胚于 $\mathbb{C}^n$. 这里 A 和 C 为任何正常数； K_M 和 R 分别为 M 的截曲率和纯量曲率.

Mok 改进了这些结果，将 $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ 减弱到 $\frac{1}{r^2}$ ，更确切地说，他证明了下面的：

(d) 若 M 具正双截曲率， $0<R<\frac{A}{r^2}$ ，且 $\mathrm{Vol}(B(p,r))\geqslant Cr^{2n},A,C$ 为正

常数，则 M 双全纯同胚于仿射代数簇 X.

设 M^n 为一 Kodaira 维数为 $K(M)=0$(即存在 C , 使得 $H^0(M,K^m)\leqslant C$, 对所有的 $m>0$ 成立，这里 K 为典则线丛) 的代数流形. 可给出这些流形的分类吗？注意 $C_1(M)$ 为 $K(M)=0$ 的一个特殊情况. 当 $n=2$ 时，恰有两类代数流形满足 $K(M)=0$ ，它们是 Abel 子簇的商空间或 K–3 曲面. 当 $n\geqslant 3$ 时，尚未知晓， $n=3$ 的情形对于物理学中的超弦 (superstring) 理论将是很重要的.

C. 双曲流形

若 M 为一具负截面曲率的代数流形，那么 M 是否能够有 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域 Ω 所全纯（分支）覆盖？一个较弱的问题是：若 M 为一具负截曲率的单连通 Kähler 流形，是否存在 M 上的足够多的有界全纯函数以致可以分离点并给出局部坐标？至今，甚至在 $\widetilde{M}$ 为一紧致流形 M 的覆盖空间的假设下，也未证明任何非常数的全纯函数的存在.

B. Wong[Mo2] 证明了若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为一具光滑边界的有界域，且为某一紧致流形的覆盖空间，那么 Ω 必为球. P. Yang[Yg] 证明了若 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中秩大于 1 的有界对称域，则不存在任何 Ω 上的 Kähler 度量使其全纯双截曲率介于两个负数之间. 特别地， Ω 不能是任何具负双截曲率的紧致 Kähler 流形的覆盖空间. 因此若一个有界域覆盖一具负曲率的紧致 Kähler 流形的话，那么它必定是相当不光滑的.

最近，Mostow 和 Siu[MS] 通过巧妙地把 2 维球的 Poincarè 度量和 Bergman 度量并到一起而构造了一个具负截曲率的 Kähler 曲面 M. 他们证明 M 的万有覆盖 $\widetilde{M}$ 不是球，其方法是验证对 $\widetilde{M}$ 而言 $C_1^2<3C_2$. 这种流形不微分同胚于一个局部对称空间，还不知道它的万有覆盖是否是有界域. 是否一个具（拓扑地）平凡切丛并为某一紧致代数流形的覆盖空间的非紧致完备 Kähler 流形双全纯同胚于一个域？

对于一个具正典则线丛的代数曲面，是否 $\left|\frac{C_2}{C_1^2}-\frac{1}{3}\right|$ 足够小能推出 M 有一个具负截曲率的 Kähler 度量？这一点尚不知道.

代数曲面的拓扑是一个很重要的主题. 经 Freedman 和 Donaldson 最近的努力，似乎有理由相信每一单连通的四维光滑流形可表示为代数曲面的连接和（可能具不同的定向）. 最近由 Donaldson 得到了关于单连通的代数曲面的不可约性的很强的结果. 显然若要将它表示为可微流形的连接和，则只会出现 $\mathbb{CP}^2$

因子. 或许满足这些不可约条件的单连通的四维流形微分同胚于一个代数曲面.

当基本群无限时，预计代数曲面的拓扑则困难得多. Shafareich 猜测代数流形的万有覆盖是全纯凸的. 这给了除已知的 Chern 数不等式外的一些拓扑信息.

4. 解析对象

为了了解复结构，了解与它有关的解析对象是很重要的. 这里给出两个例子.

A. 全纯映照和向量丛

对于一个复流形 M，自然的全纯向量丛有 $TM, TM^*, \wedge^k TM, \oplus^k TM$ 等等. 其中最重要的是典则线丛 $\wedge^n TM^*$.

用吹大 (blowing up) 点或子流形可得到附加的解析对象. 联系拓扑不变量和解析不变量的 Riemann-Roch 定理对于从给定的拓扑信息或复信息中构造解析对象或不变量是一个很重要的工具.

Yang-Mills 理论在构造 Kähler 流形上的全纯向量丛和其他对象中通常是很有用的. Taubes[T1] 利用 Yang-Mills 方程的反自对偶 (anti-self-dual) 解来构造 Kähler 曲面 M^2 上的秩为 2 的全纯向量丛. 是否可以用这个理论来证明本文作者的定理: "若 M^2 是单连通的，且它的 cup 积是正定的，则 M^2 双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^2$" 呢？

Taubes[T2] 在两个 Chern 数之间的一个不等式成立的假设下也构造了 Kähler 曲面上的全纯向量丛 (也可见于 Donaldson[D1] 和 [D2]). 至今为止，上面的方法仅用于 2 维的情形. 在高维情形，还没有一个好的方法来构造全纯向量丛. Taubes 的想法可推广使用于构造高维流形上的全纯向量丛. 目前还不清楚有多大的一类全纯向量丛可以用这样的方式来构造.

B. 解析闭链

解析闭链简单说就是解析子簇的形式和. 设 M^n 为一个代数流形, $V \subset M$ 为一余维是 p 的解析子簇, 则 V 的基本上同调类 η_V 属于 $H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M,\mathbb{Z})$. $\alpha \in H^{2p}(M,\mathbb{Q})$ 是解析的如果它能表示为余维为 p 的子簇的基本类的有理系数的线性组合，即 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \eta_{V_i}$ ，这里 $b_i \in \mathbb{Q}$ 且 V_i 是 M 的子簇. 显然，每一 $H^{2p}(M,\mathbb{Q})$ 中的解析元属于 $H^{2p}(M,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(M)$. 反过来，我们有 Hodge 猜想: 每一 $\alpha \in H^{2p}(M,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(M)$ 是解析的. 当 $p = 1$ 时，这是成立的，称为

关于 (1,1) 类的 Lefschetz 定理，$p \geqslant 2$ 尚无结果.

在 Kähler 流形 M^n 中每一个解析子簇都是体积极小的. 这可直接由 Wirtinger 和 Stokes 公式得到. 反过来，在适当的条件下，体积极小子流形成为子簇. 例如，Siu-Yau[SY1] 证明了若 $f: \mathbb{CP}^1 \to M^n$ 是能量极小的，且 M 的双截曲率是正的，则 f 是全纯的或反全纯的.

Lawson 和 Simons 证明了 $\mathbb{CP}^N$ 中每一个稳定的流 (current) 都是代数子簇. 他们的方法如下：设 g_t 为 $\mathbb{CP}^n$ 中的单参数投影变换群，设

$$B(X,X) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{Vol}\, g_t(M))|_{t=0}, \quad \text{这里} X = \frac{dg_t}{dt},$$

他们证明了 B 的迹是负的，除非 M 是一个子簇.

Lawson-Simons 的方法给出了一个解决 Hodge 猜想的途径. 给定一个嵌入 $f: M^n \to \mathbb{CP}^N$ 和一个元素 $\beta \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$，定义一个体积函数：$\mathrm{Vol}: PGL(N+1, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}, g \mapsto \inf\limits_{C}\{\mathrm{Vol}_g(C)|C\text{是}\alpha\text{的代表}\}$. 这里 α 为 β 的 Poincarè 对偶且 $\mathrm{Vol}_g(C)$ 为对应于度量 $(g \circ f)^* ds_0^2$ 的体积，而 ds_0^2 表示 $\mathbb{CP}^n$ 上的 Fubini-Study 度量. 若存在全纯的代表 α 的 C，则 $\mathrm{Vol}_g(\alpha) = \mathrm{Vol}_g(C)$ 不依赖于 g 的选择. 因此 Vol 为常函数并达到它的极小值. 另一方面，若 Vol 有一极小值，则 Lawson-Simons 的方法证明了存在一全纯的代表 α 的 C. 因此，如果能够证明 Vol 达到极小值，则 Hodge 猜测就证明了.

Siu[S2] 得到了下面的结果：设 M 为一具强负曲率的紧致 Kähler 流形. 那么任何 $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$ 中的元，$K > 2$, 若能表示为一个紧致 Kähler 流形的连续象，则它可表示为一个解析子簇. 他利用了 Bochnor 型公式于 $\overline{\partial} f \wedge \partial \overline{f}$ 来得到调和映照的复解析性. 然而似乎很难确定什么样的闭链能够表示为 Kähler 流形的连续象.

8.6 复流形上的典则度量

给定一个复流形 M，人们可以找 M 上的"典则"度量以构造复结构的不变量. 对典则度量的一个很自然的要求是它们的全体可参数化为一有限维的空间且在双全纯变换群下是不变的.

1. Bergman, Kobayashi-Royden 和 Caratheodory 度量

Bergman 度量首先作为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域上一个自然度量而导出. 后来, 该定义被推广到其典则线丛 K 容许充分多的截面的复流形上. 对于 $\mathbb{C}^n$ 中的域 D, 让 $H^2(D)$ 表示 D 上的平方可积的全纯函数空间. 选择该空间的一组正交基 $\{\phi_i\}$. 那么 Bergman 核定义为 $K(z,w)=\sum\limits_i \phi_i(z)\overline{\phi}_i(w)$. 这定义不依赖于正交基的选取. 且 K 关于 z 和 $\overline{w}$ 是全纯的.

我们现在可以定义 Bergman 度量为

$$ds^2=\sum\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\log K(z,z)\cdot dz_i\otimes d\overline{z}_j.$$

Bergman 度量的自然性不难从 Bergman 核的定义中看出. 设 D_1 和 D_2 为 $\mathbb{C}^n$ 中的两个区域, 且 $K_1(z,w)$ 和 $K_2(z',w')$ 分别为它们的 Bergman 核. 若 $F:D_1\to D_2$ 为一个双全纯同胚, 则 K_1 和 K_2 有关系式

$$K_1(z,w)=K_2((F(z),F(w))\det\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\overline{\det\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)}.$$

若 M 的典则线丛 K 有充分多的整体的、平方可积的截面, 我们可以选一个正交基 $\{\phi_i\}$, 给出一个 M 到 $\mathbb{CP}^k$ 的嵌入. 拉回 (pull back) 度量 $F^*(ds^2)$ 即为 M 的 Bergman 度量. 当 M 是复区域时, 这一定义与前面的 Bergman 度量的定义是相同的, 因为 D 上的任何全纯函数可看成 K 的一个截面.

直观地说: 对 Bergman 度量的全面理解能够为我们给出一个关于域的自同构的几何的清晰的图像. 它将给出许多区域的不变量. 近几年基于 Fefferman 的工作 [Fe] 有了许多进展. Fefferman 着眼于 $K(z,z)$ 在区域边界的渐近性质. 粗略地说他证明了沿着对角线 Bergman 核有下述展开式

$$K(z,z)=\phi(z)/\Psi^{n+1}(z)+\widetilde{\phi}(z)\log\Psi(z),$$

这里 $\phi,\widetilde{\phi}\in C^\infty(D),\phi|_{\partial D}=0$, 且 Ψ 为区域 D 的定义函数. 且在边界附近我们有

$$K(z,w)=\phi(z,w)/\Psi^{n+1}(z,w)+\widetilde{\phi}(z,w)\log\Psi(z,w),$$

这里 $\phi(z,w),\widetilde{\phi}(z,w)$ 和 $\Psi(z,w)$ 分别为 $\phi,\widetilde{\phi}$, 及 Ψ 满足某些条件的延拓.

人们想更多地了解当 Ω 不光滑时, Bergman 核和度量的边界性质. 度量的曲率性质及其他有关的几何性质. 设 Ω 为一流形且 ds^2_Ω 为 Bergman 度量.

若 Ω 有一个真的自同构的离散群，我们可以考虑商空间 Ω/Γ 并把 Bergman 度量 $ds^2_{\Omega/\Gamma}$ 拉回到 Ω.Kazhdan 证明了若 Ω 的离散自同构群 Γ 有一 filtration$\Gamma \supseteq \Gamma_1 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \cdots$ ，满足 $[\Gamma_i, \Gamma_{i+1}] < \infty$ 且 $\bigcap\limits_i \Gamma_i = (1)$ ，则 Bergman 度量 $ds_i^2 = ds^2_{\Omega/\Gamma_i}$ 的拉回 (pullback) 将在 Ω 上收敛于 Ω 的 Bergman 度量 ds^2_{Ω}.

另一有趣的方向是考虑典则线丛的幂的整体截面. 对于 r 充分大考虑 $H^0(M, K^r)$ ，选择一个基给出一个映照 $\phi_r : M \to \mathbb{P}(H^0(M, K^r))$. 取 $\mathbb{P}(H^0(M, K^r))$ 的 Fubini-Study 度量在 M 上的限制的 $1/r$ 倍，即得 M 上的一列度量. 人们想知道，当 $r \to \infty$ 时，是否有一个极限度量存在. 若这一度量存在，则它将是“典则”的且很有可能是 Kähler-Einstein 的.

对于复流形 Ω ，有两个其他的内在的伪度量， Kobayashi-Royden 度量和 Caratheodory 度量. 设 Δ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Poincarè 圆盘. 记 $\Delta(\Omega)$ 为 Ω 到 Δ 的全纯映照集, $\Omega(\Delta)$ 为 Δ 到 Ω 的全纯映照集. 固定 Δ 上的 Poincarè 距离. Caratheodory 度量定义为 $F_\Omega : T\Omega \to \mathbb{R}^+$ ，这里 $F_\Omega(z, z) = \sup\{|f_*(z)| : f \in \Delta(\Omega), f(z) = 0\}$ ，Kobayashi-Royden 度量定义为

$$F_k : T\Omega \to \mathbb{R}^+,$$

这里 $F_k(z, \xi) = \inf\{|u| : f \in \Omega(\Delta), f(0) = z, f_*(u) = \xi\}$. 明显地，这两个内在度量在全纯映照下距离是递减的，而在双全纯映照下距离不变.

B. Wong[Wo1] 证明了 Caratheodory 度量的全纯截曲率小于或等于 -4 ，而当度量非平凡时 Kobayashi 度量的全纯截曲率不小于 -4 (对于 Bergman 度量已知道全纯截曲率不大于 -4). 然而这两个度量的一个弱点是它们在切空间上既非双线性的也非光滑的 (F 一般只是上半连续的).

在某些特殊情况下，对于这两个度量有较好的了解. 例如一个具强负全纯截曲率的流形总有一个非平凡的 Kobayashi-Royden 度量. 这一问题的主要定理是 Royden 的，他证明了 Kobayashi-Royden 度量实际上是 Teichmuller 度量. 奇怪的是 Teichmuller 度量具有常数的全纯截曲率. 可以对具有常全纯截曲率的 Finsler 度量的复流形进行分类吗？

Lempert[Le1],[Le2] 证明了在 $\mathbb{C}^n$ 中的凸区域上 Kobayashi 和 Caratheodory 度量实际上是相同的. 利用一个极值映照的存在性，他构造了许多有界全纯函数. 他的理论只在凸区域上起作用，然而怎么才能将他的思想推广或使用这两个度量去构造更一般流形上的有界全纯函数则是很有趣的.

另一个有趣的事实（由 B. Wong 证明的 [Wo2] ）是，若一个 $\mathbb{C}^n$ 中的光滑、有界区域是一个闭流形的覆盖空间，那么它必然是单位球．这部分地证明了猜测：一个有界凸区域（不要求是光滑的）若为某一闭流形的覆盖空间，那么它是对称的．它的证明需要用到 Kobayashi 和 Caratheodory 度量的边界估计．

一般地，我们希望比较 Bergman, Kobayashi-Royden, Caratheodory 度量和下节所讨论的 Kähler-Einstein 度量．我们知道 Caratheodory 度量是三个度量中最小的度量．这可以由 Kähler 流形上一般的 Schwarz 引理得出 [Y4].Yau(参看后来 Chan-Cheng-Lu 的改进形式)证明了若 M 为一 Ricci 曲率有常数下界的完备的 Kähler 流形，N 为一全纯截曲率有负常数上界 Hermitian 流形，$f: M \to N$ 为一全纯映照，则 $d(f(p), f(p_1)) \leqslant Cd(p, p_1), C$ 只依赖于 M 和 N 的曲率．当 N 只是一个 Finsler 空间时是否也是对的？若是对的，那么人们可希望 Teichimuller 度量一致等价于 Kähler-Einstein 度量．

2. 紧致 Kähler 流形上的 Kähler-Einstein 度量

设 M 为一个紧致 Kähler 流形，则 M 上的一个 Kähler-Einstein 度量存在的一个必要条件为：

(*) 存在一个 Kähler 类 Ω 使得第一 chern 类 $C_1(M)$ 上同调于 Ω 乘以一实常数．

这条件等价于：

$(*)'$ 第一 Chern 类满足 $C_1(M) > 0, C_1(M) = 0$ 或 $C_1(M) < 0$.

本文的作者 [Y1],[Y2] 证明了当 $C_1(M) = 0$ 或 $C_1(M) < 0$ 时，（后者也可见于 Aubin[Au3] ）每一 Kähler 类有一个惟一的 Kähler-Einstein 度量．当 $C_1(M) > 0$ 时， Kähler-Einstein 度量在自同构群下不变．然而，存在性一般是不成立的，因而人们希望加上一些条件以保证存在性．

我们现在讨论属于 Futaki[Fu1] 的、关于 $C_1(M) > 0$ 时 Kähler-Einstein 度量存在性的障碍 (obstruction) 理论同时也考虑“极值度量”的概念（属于 Calabi[Ca2] ）．在紧致 Kähler 流形 M 上固定一个 Kähler 类 $\Omega = [w] \in H^{1,1}(M)$ 并用 H_Ω 记属于 Kähler 类 Ω 的所有 Kähler 度量的空间．定义泛函：

$$F: H_\Omega \to \mathbb{R}, (g) \to \int_M R^2,$$

这里 R 表示度量 g 的纯量曲率． Calabi 称该泛函的一个临界点为一个极值度量．任何 Kähler-Einstein 度量在它的 Kähler 类中极小化 $\int_M R^2$ ，因而是一个

极值度量. 这可由 Schwarz 不等式和 $\int_M R$ 等于 $C_1(M)\cup w^{n-1}$ 在 M 的基本类上的取值得到，这里 w 是 g 的 Kähler 形式.

Calabi 证明了对一个极值度量 g，梯度 (gradient) 向量场 $X=\sum g^{ij}\frac{\partial R}{\partial \bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^i}$ 是全纯的. 他也证明了 M 的自同构群的一个分解定理 (类似于 Matsushima 和 Lichnerowicz 于常纯量曲率的分解定理). 特别地，他证明了 X 产生出 $\mathrm{Aut}(M)$ 的一个紧子群. Levine 给出了一个 $\mathrm{Aut}(M)$ 不具任何紧致连通子群的紧致曲面 M^2 的例子; 因而 M^2 没有任何 Kähler-Einstein 度量.

对于 $\mathrm{Aut}(M)$ 非可约的其他例子, 可参看 Sakane[Sk1], [Sk2], Ishikawa-Sakane [IS] 和 Yau[Y3]. 由 Calabi 或 Matsushima-Lichnerowicz 的定理, 这些例子都不容许 Kähler-Einstein 度量. Futaki[Fu1] 构造了 $\mathrm{Aut}(M)$ 是可约的例子，我们将在以后讨论它们. 然而至今所有的具正第一 Chern 类而不容许 Kähler-Einstein 度量的 Kähler 流形的例子都有非平凡的全纯向量场，很自然地要问：若 M 不存在任何非零的全纯向量场且 M 的切丛是稳定的，我们能极小化泛函 F 吗？关于稳定性假设的出发点将在以后讨论. 当然若上面问题的答案是肯定的，那么 (*) 也将是 Kähler-Einstein 度量存在的一个充分条件.

事实上，设 $C_1(M)=C[w]$ 且 g 为一极值度量. 由 $X=\sum g^{ij}\frac{\partial R}{\partial \bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^i}$ 是全纯的，得 $X=0, R$ 为常数且 g 的 Ricci 形式是代表 $C_1(M)$ 的一个调和形式. 从一个上同调类的调和形式的惟一性得 $R_{i\bar{j}}=Cg_{i\bar{j}}$；因而 g 为 Kähler-Einstein 度量. Calabi[Ca2] 证明了每一极值度量 g 是泛函 F 的非退化局部极小点. 度量 g 又具有与 M 的复结构相容的最大可能的对称性. 若 C_Ω 记为 H_Ω 中的极值度量的集合，它微分同胚于一个有限维欧氏空间. 并且若一个 C_Ω 中的度量具常纯量曲率，则每一个 C_Ω 中的度量皆具常纯量曲率. 人们预料 F 的临界点必是整体极小点，形成一个连通集且 M 上保持 Ω 的自同构在 C_Ω 上是可递的.

现在考虑 Futaki 的关于 $C_1(M)>0$ 的紧致 Kähler 流形 M 的 Kähler-Einstein 度量的存在性的障碍. 设 $\eta(M)$ 表示 M 的全纯向量场的 Lie 代数，ω 为代表 $C_1(M)$ 的一个 Kähler 形式，γ_ω 为它的 Ricci 形式，也代表 $C_1(M)$，则 $\gamma_\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$，因此 $\gamma_\omega-\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}G, G$ 为一光滑函数. 定义一个特征，$f:\eta(M)\to\mathbb{C}, X\to\int_M(XG)\cdot\omega^n$.Futaki 证明了 f 不依赖于 $C_1(M)$ 的表示 ω 的选择. 因而整数 $\delta_M=\dim(\eta(M)/\mathrm{Ker}(f))$ 仅依赖于 M 的复结构.

若 M 有一个 Kähler-Einstein 度量，则 $\delta_M=0$； Futaki 猜测它的逆也是

对的. 若 Calabi 泛函 F 达到极小, 那么这是对的. 由 $\gamma_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}G$ 得 $R = n + \Delta G$, 则 $f(X) = \int (XG)\omega^n = \int (R^\alpha G_\alpha)\omega^n = \int |\Delta G|^2\omega^n$, 因而 $\delta_M = 0$ 意味着 G 为常数, 即 g 是一个 Kähler-Einstein 度量.

利用阻碍 δ_M, Futaki 给出了一个 $C_1(M) > 0, \mathrm{Aut}(M)$ 可约, 且 $\delta_M = 1$ 的紧致 Kähler 流形的例子. 因而在这些例子上不存在 Kähler-Einstein 度量. 设 H_n 表示 $\mathbb{CP}^n$ 的超平面丛, $\pi_n : H_n \to \mathbb{CP}^n$ 为投影 $(n = 1, 2)$. 若设 $M^5 = \mathbb{P}(E)$, 这里 $E = \pi_1^*(H_1) + \pi_2^*(H_2)$ 看成是 $\mathbb{CP}^2$ 上的丛, 那么 M 就是所需的例子. 下面是最低维的例子: 若 $H \subset \mathbb{CP}^3$ 为超平面并且 $C \subset H$ 为一二次曲线, 那么将 $\mathbb{CP}^3$ 沿 C 及 H 外的一点的吹大 (blown up) 就得到这样的 M.

Futaki 的思想是构造使 Ricci 形式成为调和形式的障碍. 对于代表高阶 Chern 类的曲率形式成为调和形式的障碍见 Bando[B2]. 对于与特征 f 有关的问题见 Futaki[Fu2] 和 Futaki-Morita[FM].

3. Hermite 流形和稳定向量丛

我们将讨论紧致复流形上不一定是 Kähler 的典则度量. 对于一般的 Hermite 流形, 由于 Hermite 联络有挠, 因而是非 Riemann 的, 很难找到典则度量. 所以人们企图给 M 加上附加条件. 设 g 为 M 上的一个 Hermite 度量, ω 为它的 Kähler 形式. 一个自然的假定是:

(1)$\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$

它较 Kähler 条件弱. 人们希望给 g 加 (1) 外的其他条件使得度量更典则. 受到超对称 (supersymmetry) 理论的启发, Hull 和 Witten[HW] 提出了 ω 的下列条件: 局部地可将 ω 表示为 $\partial\theta + \overline{\partial}\,\overline{\theta}$, 这里 θ 为一 (0,1) 形式. 若 ω 是 Kähler 的, 它总能写成 $\partial\overline{\partial}f$.

事实上, 上述条件等价于 $\partial\overline{\partial}\omega = 0$. 显然我们只需由 $\partial\overline{\partial}\omega = 0$ 导出 ω 有上面的表达式即可. 由 $\overline{\partial}\omega$ 是闭的, 那么它是局部正合的. 比较类型, 可找到一个 (0,2) 形式 Ω 和一个 (1,1) 形式 ω' 使得: $\overline{\partial}\omega = \partial\Omega + \overline{\partial}\omega', \overline{\partial}\Omega = 0, \partial\omega' = 0$. 注意到 $\omega = \overline{\omega}$, 我们可证 $\omega - \omega' - \overline{\omega}' - \Omega - \overline{\Omega}$ 为闭形式. 因此它是局部正合的, 可找到一个 (0,1) 形式 θ 使得 $\omega - \omega' - \overline{\omega}' = \partial\theta + \overline{\partial}\,\overline{\theta}$. 由 $\partial\omega' = 0, \omega'$ 是局部 ∂- 正合的, ω 即是所需的形式.

最近, Todorov 观察到任何紧致复流形有一个满足 $\partial\overline{\partial}\omega = 0$ 的 Hermite 度量, 因此似乎对任何紧致复流形来说研究所有 $\partial\overline{\partial}\omega = 0$ 的 (1,1) 形式 ω 关于

$\partial\theta+\overline{\partial\theta},\theta$ 为整体定义的 (1,0) 形式的子群的商将是一个有趣的问题.

现设 V 为具性质 $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1})=0$ 的紧致复流形 M 上的一个全纯向量丛. 我们可以定义丛 V 对于 ω 的度 (degree) 为

$$\deg_\omega V=\int_M \Xi_1(V)\wedge\omega^{n-1},$$

这里 $\Xi_1(V)$ 表示丛 V 的 Ricci 形式. 由 $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1})=0$ 知此定义不依赖于 V 上的度量的选择.

在 [UY] 中 Uhlenbeck 和 Yau 证明了:

(2) 设 V 为一紧致 Kähler 流形 M 上的全纯向量丛. 若 V 是稳定的, 即 $\frac{\deg_\omega V'}{\mathrm{rank}V'}<\frac{\deg_\omega V}{\mathrm{rank}V}$ 对所有的满足 $0<\mathrm{rank}(V')<\mathrm{rank}(V),v'\subset V$ 的凝聚层 V' 成立, 则 V 有一个 Hermite-Einstein 度量, 它在不计常数因子的意义下是惟一的.

反过来, V 上的 Hermite-Einstein 度量的存在则隐含着不计 M 的一个有限覆盖, V 是稳定丛的直接和. 这是由 Kobayashi 和 Lübke[Lu] 证明的. 很有可能 M 是 Kähler 的条件可由 (1) 代替. 还应提到对于代数曲面, 上面的定理是由 Donaldson 证明的.

我们现在叙述 (2) 的一些推论. 首先, 稳定全纯向量丛的对称张量积也是稳定的. 其次, 若 V 是稳定的, $r=\mathrm{rank}(V)$, 则

(3)$\int_M(2r,C_2(V)-(r-1)C_1^2(V))\wedge\omega^{n-2}\geqslant 0$, 等式成立当且仅当 V 是 M 上 (或 M 的某有限覆盖) 线丛的直接和 (当 $n=2$ 时, 不包括等式情形的讨论, 该结果是属于 Bogomolv 的). 因此, 若 $C_1^2(V)=0$, 那么 $\int_M C_2(V)\wedge\omega^{n-2}\geqslant 0$ 且等式成立当且仅当 V 是平坦的并在模去一个常量的意义下是惟一的. 这些结果事实上推广了 Riemann 曲面时的结论. 特别地, 设 V 为 Riemann 曲面 Σ_g 上的全纯向量丛, 则 V 是稳定的且 $C_1(V)=0$ 当且仅当 V 上存在具有零曲率的 Hermite 度量, 即当且仅当有一个 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的酉表示 (详见 Narashimhan 和 Seshadri[NS]).

现在来考虑稳定向量丛的模 (moduli) 空间. 设 $M_g(r,d)$ 为 Riemann 曲面 $\sum_g$ 上给定的秩 r 和度 d 的稳定向量丛的一个完备族. 能够证明 $C_1(M_g)>0$ 吗? 特别地, 能构造 M_g 上具正 Ricci 曲率的一个 Kähler 度量吗? Cho[Co] 证明了 $M_g(r,d)$ 上存在 Kähler 度量其全纯截曲率为非负. 然而, 即使由全纯截曲率的正性也不能推出 Ricci 曲率的正性. 例如: 设 H 是 $\mathbb{CP}^1$ 的超平面丛, (1) 为

平凡线丛，则 Hirzebruch 曲面 $M_d = \mathbb{P}(H^d + (1))$ 有具正的全纯截曲率的 Kähler 度量．另一方面，当 $d \geqslant 3$ 时，M_d 不具正的第一 Chern 类．

4.Chern 数不等式

1976 年，本文作者证明了 Calabi 猜想，并在具丰富或平凡的典则线丛的代数流形上证明了下述 Chern 数不等式：

$$(-1)^n C_2 C_1^{n-2} \geqslant \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_1^n, \qquad (*)$$

这里等式成立当且仅当 M 以球为覆盖流形，即对某一 $\Gamma \subset SU(n,1), M = B/\Gamma$. 大约同一时候，Miyaoka[M3] 推广了 Bogomolov 的方法，在曲面的 Kodaira 维数非负的较弱的情况下证明了 $n = 2$ 时的同一不等式．然而他并没有表明等式成立时的情形．

通过研究带奇点的曲面，Cheng 和 Yau[CY2] 证明了一般型曲面的不等式 (*)（等式成立当且仅当 M^2 以球为覆盖空间）．[CY2] 中的方法也可推广到高维的情况．可以由此而刻画双全纯同胚于 B^n/Γ ($\Gamma \subset SU(2,1)$ 允许有不动点）的曲面 M. 注意由于 Γ 可以有不动点，M 一般是一个簇 (variety).

研究满足某些 Chern 数不等式的流形也是有趣的．Hirzebruch, Deligne, Mostow 等曾经研究过满足不等式 (*) 的曲面．[Y2] 的一个推论是 $\mathbb{CP}^n$ 上 Kähler 结构的下述刚性定理：$\mathbb{CP}^n$ 上的惟一 Kähler 结构是标准结构，且 $\mathbb{CP}^2$ 上的惟一复结构是标准的．当 n 是奇数时，此结果是 Hirzebruch 和 Kodaira[HK] 的．

现在我们给出当 M 的典则线丛为丰富 (ample) 时不等式 (*) 证明的线索．此时，存在一个 K 上的 Kähler-Einstein 度量．对于 Kähler-Einstein 度量 (*) 左边的 Chern 积分可以由曲率张量的平方模表出，由于 Ricci 张量是仅有的曲率部分，能够表为 Ricci 张量的行列式的右边被左边项所控制．若 (*) 的等式成立，则两边的被积函数相等．后者可导出是等价于 M 具常全纯截曲率．因而 (*) 中等式成立当且仅当 M 以球为覆盖流形．

当其典则线丛不是某些丰富线丛的乘积时的代数流形不存在 Kähler-Einstein 度量．然而，仍然可以研究具有几近丰富 (almost ample) 的典则线丛的代数流形上的不等式 (*).[Y1] 中证明了存在一个 Kähler-Einstein 度量，它在一个除子上退化，而在该除子上其典则线丛是平凡的．类似地人们可以用某种方式将度量

吹大 (blow up). 这被 Cheng 和 Yan[CY2] 用于证明一般类型曲面的不等式 (*), 这种曲面满足:

$$C_1(M) \leqslant 0 \text{且在} M \text{的一个子簇外} < 0. \tag{**}$$

Kodaira 维数 $K(M)$ 定义为:

$$K(M) = \begin{cases} -\infty, & \text{若} N(M) = 0, \\ \max \dim\{\phi_{mk}\}(M) & \text{若} N(M) \neq 0. \end{cases}$$

这里 $N(M) = \{m > 0 | H^0(M, K^m) = 0\}, \phi_{mk}$ 为多典则 (pluriconονical) 映照. 容易看出 $K(M) \leqslant M$ 的代数维数 $\leqslant n$，若 $K(M) = n$，则 M 称为一般型的流形.

在 $n = 2$ 时, 曲面可由它们的 Kodaira 维数双亚纯地分类. $K(M) = -\infty, 0$ 或 1 的情形已经是熟知的了. $K(M) = 2$（即 M 为一般类型的曲面）当且仅当 M 满足 (**). 设 M 为一个一般类型的三维流形, 且 K 为典则线丛乘子, Kawatama 证明若 $K \cdot C \leqslant 0$ 对每一代数曲线 $C \subseteq M$ 成立, 则 M 满足 (**).

极有可能 (**) 总隐含 (*)：即若 M^n 为一具几近丰富典则线丛的代数流形, 则不等式 (*) 成立. 这在 $n \geqslant 3$ 时还不清楚. 人们也想知道在一般型的流形和不等式 (**) 之间有什么关系. 在这一方面, Siu[S3] 有下面的定理 [S5]. 首先回忆 Siegel 的定理: 复流形 M^n 上的亚纯函数域关于 $\mathbb{C}$ 的超越次数小于或等于 n. 当等式成立时, M 称为 Moishezon 流形. 一个 Moishezon 流形总是可以由一个代数流形通过有限次吹大和缩约 (blow up and down) 而得到, 因而双有理于一个投射代数流形. Moishezon 流形上总存在一个全纯向量丛 L 使得 $C_1(L) \geqslant 0$ 并在一子簇外 $C_1(L) > 0$.Siu[S5] 证明了在 $C_1(L)$ 非负且在某一点为正的较强的假设下其逆也是对的. 因此一个满足 (**) 的流形是 Moishezon. 现在还不知道是否 $\mathbb{CP}^n, n \geqslant 3$，有一非标准的 Moishezon 结构.

5. 非紧致流形上的 Kähler-Einstein 度量.

现在讨论完备非紧致流形上的 Kähler-Einstein 度量. 设 g 是一个 M^n 上的完备的 Kähler-Einstein 度量, 即 $R_{i\bar{j}} = Cg_{i\bar{j}}, C$ 为常数. 若 $C > 0$，则 Myer 定理指出 M 是紧致的. 因此 $C \leqslant 0$ 则 $C_1(M) \leqslant 0$. 在该节我们讨论 $C_1(M) < 0$ 的情形, 从而把 $C_1(M) = 0$ 留到下一节.

问题是刻画带有完备 Kähler-Einstein 度量 g_{ij} 满足 $R_{i\bar{j}} = -g_{i\bar{j}}$ 的非紧致流形. 特别地, 希望给 M 加上一些条件以保证 Kähler-Einstein 度量的存在性和

惟一性. 首先, 惟一性总是成立的. 也就是说若 M 和 N 为满足 $R=-1$ 的完备的 Kähler-Einstein 流形且 $F: M \to N$ 为双全纯同胚, 则 F 是等度同构. 为了证明这点, 设 g, dv 和 g', dv' 分别表示 M 和 N 的 Kähler-Einstein 度量和体积形式. 若设 $\rho = \log(F^* dv'/dv)$, 则 $\partial\bar{\partial}\rho = -f^*\,\mathrm{Ric}' + \mathrm{Ric} = F^*g' - g$. 取迹, 我们有 $\Delta\rho = -n + n \cdot e^{\rho/n}$, 因此由极大值原理得 $\rho \leqslant 0$ 和 $F^* dv' \geqslant dv$, 用 F^{-1} 代替 F, 我们有 $F^* dv' \geqslant dv$, F 是等度同胚.

惟一性对纯量曲率等于 -1 的几近完备的 Kähler-Einstein 度量也成立. 这里, M 上的一个度量 ds^2 称为几近完备的, 如果我们能将 M 表达为区域 Ω_α 的递增, 且有 Ω_α 上的完备度量 ds_α^2 使得 ds_α^2 在 M 的紧子集上收敛于 ds^2. 详见 Cheng-Yau[CY1].

我们现在讨论具负纯量曲率的 Kähler-Einstein 度量的存在性. 当然, 这种度量的存在将给 M 的复结构一些限制条件. 例如 Eiseman[Ei] 证明了若 M 有一纯量曲率小于负常数的 Hermite 度量, 那么在 Eiseman 意义下的伪测度实际上是一个测度, 也就是说 M 是测度双曲的.

在 [CY1] 中, Cheng 和 Yau 证明了一大类非紧致流形上 Kähler-Einstein 度量的存在. 确切地说, 他们证明了下列定理: 设 M^n 是一个 Hermite 流形, 它的 Ricci 张量定义了一个曲率和协变导数有界的 Kähler 度量, 则 M 有一个一致等价于上述度量的 Kähler-Einstein 度量.

若 M 有一具强负的 Ricci 曲率的 Hermite 度量且是相对紧致、光滑、拟凸的开子流形的递增和, 那么在模去一个常数的意义下 M 有一个惟一的几近完备的 Kähler-Einstein 度量. 且若 M 是完备的, 则这一度量也是完备的.

特别地在任何 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域上都存在完备的 Kähler-Einstein 度量, 只要它是具 $\mathbb{C}^2$ 边界的域的交. 在这一陈述中, $\mathbb{C}^n$ 可代之以 Ricci 曲率具负常数上界的 Hermite 流形.

Mok 和 Yau[MkY] 证明了 $\mathbb{C}^n$ 中的任何有界拟凸域都有一个完备的 Kähler-Einstein 度量. 这是仅知的在任一有界全纯域上的完备的 "典则" 度量.

现在讨论当 M 的体积有限时的情况. 这时 M 的 "无穷远点集" 很小, 而 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域的无穷远点集相当大). 我们有下面的猜测: 若曲率为负且 M 具有限的拓扑型, 则 M 可紧致化, 也就是存在某一紧致 Kähler 流形 $\overline{M}$ 使得 $M = \overline{M} \setminus$ (子簇). 在某些情形, $\overline{M}$ 实际上是代数的, 因此 M 是拟射影的.

对一个有限体积的局部 Hermite 对称空间 M ， Baily 和 Borel[BB], Satako[St] 和 Mumford 得到了它们的一定程度具体的紧致化. 对这些流形 Kähler-Einstein 度量存在. Siu 和 Yau[SY3] 证明了一个具有限体积和曲率介于两个负常数之间的完备流形是拟射影的.

若上面的猜测是对的，那么研究有限体积（且有有界的曲率协变微分）的 Kähler 流形，人们只需考虑 $\overline{M}\setminus(D_1\cup\cdots\cup D_k)$ ，这里 $\overline{M}$ 是紧致 Kähler 流形且 $D_1,\cdots,D_k$ 为连通除子. 若我们有适当的刻画 D_i 及描述 D_i 如何与 D_j 相交的代数数据，那么可以有希望构造 M 上的 Kähler-Einstein 度量. 在 $n=2$ 的情形这是已知的. 例如，设 $C\subset\overline{M}^2$ 为椭圆曲线且 $C\cdot C<0$. 若 S 是从 $[C]$ 的一个截面，且 $C=\{S=0\}$ ，那么 $dv_{\overline{M}}/|S|^2(\log|S|^2)^3$ 就是一个以 C 为尖点 (cusps) 的 $\overline{M}/C$ 上完备的渐近 Kähler-Einstein 度量.

设 D 为一紧致 Kähler 流形上的一个除子，在 $\overline{M}$ 上 $C_1(K+[D])\geqslant 0$ ，在 $\overline{M}\setminus D$ 上 $C_1(K+[D])>0$ ，且 $(K+[D])-\varepsilon[D]|_D>0$ ，则 $\overline{M}\setminus D$ 有一具有限体积的 Kähler-Einstein 度量. 且度量的曲率和它的协变导数有界. 还不知道是否完备的 Kähler-Einstein 度量具有界的曲率.

对于拟射影流形 $M=\overline{M}\setminus D$ ， Kähler-Einstein 度量总是具有限体积且可定义对数 Chern 类 $\overline{C}_1(M,D)$. Kähler-Einstein 度量的存在性蕴含下列关于对数 Chern 类 $\overline{C}_1$ 和 $\overline{C}_2$ 的不等式：

$$(-1)^n\overline{C}_1^{n-2}\overline{C}_2\geqslant\frac{(-1)^n}{2(n+1)}\overline{C}_1^2. \tag{$***$}$$

一个特别有意义的事实是若拟投影流形 $\overline{M}\setminus D$ 以 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球为覆盖空间，则 $(***)$ 中等式成立.

一个复流形称为测度双曲的，若 Kobayashi 测度是处处正的，对于完备的 Kähler-Einstein 流形，下面的不等式成立.

$$C_1 d\,v_{\text{Kobayashi}}\geqslant d\,v_{\text{Kähler-Einstein}}\geqslant C_2 d\,v_{\text{Caratheodory}},$$

这里 C_1,C_2 为两个普适正常数，我们有下列问题：若 M 的 Caratheodory 度量是完备的，那么 M 有一个完备的 Kähler-Einstein 度量吗？

6. 非紧致流形上的 Ricci 平坦度量

现在讨论完备非紧致流形 M 上的 Ricci 平坦度量. 首先，在这种情况下，惟一性是不知道的. 即使是紧致流形 Kähler-Einstein 度量也只在每一 Kähler 类

中是惟一的. 设 g 和 g' 是 M 上的两个 Ricci 平坦 Kähler 度量，若它们满足 $g_{i\bar{j}} - g'_{i\bar{j}} = \partial\bar{\partial}F, F$ 有界，那么 $g_{i\bar{j}} = g'_{i\bar{j}}$. 在紧致的情况下，上述条件表示 g 和 g' 属于同一 Kähler 类. 由于不会存在太多的 Ricci 平坦度量，也许可以把 F 有界的条件去掉.

在任何情况下,惟一性问题远远没有解决. 甚至 $M = \mathbb{C}^n$ 时, Calabi 提出下面的未解决的问题：若 $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ 为一严格的多次调和函数，$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) = 1$，那么如果 Kähler 度量 $d s_u^2 = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} d z^i \otimes d \bar{z}^j$ 是完备的，它是否有零曲率？注意 $d s_u^2$ 一般来说是不完备的. 例如 Fatou 和 Bieberbach（参看 Bochner 和 Martin 的书 [BM], p45）给出了一个双全纯的 $\mathbb{C}^2$ 到 Ω 的映照（这里 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是开集，且 $\mathbb{C}^2 \setminus \Omega$ 包含一个开集）使得 F 的 Jacobi 行列式恒等于 1. 设 $u = |z_1|^2 + |z_2|^2$，则 $d s_{u \cdot F}^2 = F^* d s_u^2 = F^* d s_0^2$ 是非完备的.

有许多的双全纯的 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ 其 Jacobi 行列式等于 1，例如对任何整函数 f，令 $F(z, w) = (z + f(w), w)$. 对于上述的 u， $u \circ F$ 仍然严格多次调和且 $d s_{u \cdot F}^2$ 是完备的且 Ricci 平坦的. 所以，直观看来 $\mathrm{Aut}(M)$ 越大，问题就越困难.

现在讨论存在性. 正像负纯量曲率的情况一样，完备的 Ricci 平坦的 Kähler 度量的存在将给 M 的复结构加上某些限制. 例如：由 Schwarz 引理 [Y4]，我们知道不存在 M 到一具负常数为全纯截曲率上界的 Hermite 流形的非平凡的全纯映照. 作为一个推论，若存在 $\overline{M}$ 到一亏格大于 1 的代数曲线的非平凡的全纯映照，那么 $M \subseteq \overline{M}$ 不可能有任何具非负 Ricci 曲率的完备的 Kähler 度量.

我们猜测：若 M 有一个完备的 Ricci 平坦的 Kähler 度量，那么 $M = \overline{M} \setminus$ (除子)，这里 $\overline{M}$ 为紧致 Kähler 流形. 这意味着 M 的无穷远点集不能太大. 现假设 $M^2 = M \setminus$ (除子), dv 为 M 上的一个 Ricci 平坦体积形式. 想确定 M，经万有覆盖, 不妨设 M 是单连通的. 局部地，$dv = (\sqrt{-1})^2 K d z^1 \wedge d z^2 \wedge d \bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2$，$K$ 为正实值函数. 由 $\mathrm{Ric}(dv) = 0$，我们有 $\partial\bar{\partial}(\log K) = 0$ 且 K 可局部地写成 $|h|^2$, h 为全纯函数. 由单值性方法能得到一个全纯 2- 形式 $\eta = h dz^1 \wedge dz^2$, h 无处为零，且 $\eta \wedge \bar{\eta} = dv$. 因此， $\eta^{-1} = h^{-1} d z^1 \wedge d z^2$ 可看成是反典则丛 K^{-1} 的整体截面.

直观地说 h 可能在 M 的无穷远附近趋于 ∞, η^{-1} 可能延拓到 $\overline{M}$ 上，也就是说存在一个非平凡的截面 $S \in H^0(\overline{M}, K^{-1})$. 这将意味着 K 是平凡的或 $H^0(\overline{M}, K^m) = 0, \forall m > 0$，因此 $\overline{M}^2$ 的 Kodaira 维数为 $-\infty$ 或 0. 这是因为若

$t \in H^0(\overline{M}, K^m)$，则 $t \cdot S^n$ 为 M 上的全纯函数，因此为常数，但 K 非平凡时由于 S 在某点为 0，得 $t \cdot S^n = 0$，所以 $t = 0$ 除非 K 在 M 上是平凡的.

由 M 是 Kähler 的和单连通的，$\overline{M}$ 的极小模 (model) 是一个 Kähler 曲面且 $K = 0$ 或 $-\infty$，当 $K = 0$ 时，它是 $K-3$ 曲面或 Euriques 曲面. 当 $K = -\infty$ 时，它是一个有理曲面或亏格为零的直纹曲面. $\overline{M}^2$ 为极小模在有限点上的吹大 (blow up)，且 $M = \overline{M} \setminus \{S = 0\}, 0 \neq S \in H^0(\overline{M}, K^{-1})$. 反过来，若 $M = \overline{M} \setminus \{S = 0\}, S \in H^0(\overline{M}, K^{-1}), \overline{M}$ 如上，那么 M 将有一个 Ricci 平坦的完备的 Kähler 度量. 高维情形将更为复杂.

物理学曾研究了下述问题：具适当的局部渐近性质的 Ricci 平坦度量是否是惟一的？当度量渐近平坦时就是这样的情况. 人们也想知道当度量局部渐近于一个锥 (cone) 时的情形，或许假定度量是 Kähler 时问题要容易一些.

Ricci 平坦的度量的存在有许多应用. 例如：利用 Ricci 平坦度量，Siu[S1] 证明了任何 $C_1(M) = 0$ 且 $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ 的曲面 M^2 是 Kähler 的. 从 Todorov[To] 也可见到高维的情况. 人们也提出下面的问题：设 M^{2n} 为单连通的紧致复流形，$n \geqslant 2$. 若有非奇异的 2 形式 $\omega \in H^{2,0}(M)$，那么 M 是 Kähler 的吗？

参考文献

[A1] F. J. Almgren, Jr., The homotopy groups of the integral cycle groups, *Topology*, **1**(1962), 257-299.

[A] M. T. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 701-722.

[AS] M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, **121**(1985), 429-461.

[Au1] T Aubin, Equations differentielles non linéaire et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pure Appl.*, **55**(1976), 269-296.

[Au2] T Aubin, Nonlinear Analysis; on Manifolds, *Monge-Ampère Equations*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Au3] T Aubin, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. A. S.*, **283 A**(1976), 119.

[BB] W. L. Baily, Jr. and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symetric domains, *Ann. Math.*, **84**(1966), 442-528.

[B1] S. Bando, On the classification of the three-dimensional compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 283-297.

[B2] S. Bando, An obstruction for Chern class forms to be harmonic, preprint.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, et E. Mazet, Le Spectre d'une variètè Riemannienme, Lecture Notes. in Math., No. 194, Springer-Verlag, 1972.

[BM] Bochner and Martin, Several complex variables.

[Br1] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into 4-sphere, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 455-473.

[Br2] R. L. Bryant, Submanifolds and special structures on the octonians, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 185-232.

[Ca1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Enclidean spheres, *J. Diff. Geom.*, **1**(1967), 111-125.

[Ca2] E. Calabi, Extremal Kähler metric, I. *Seminar in Diff. Geom.*, 1982 (edited by Yau), 259-290; II. *Diff. Geom. and Complex Analysis*, 1985 (edited by I. Charel and H. M.

Farkas; dedicated to H. E. Rauch).

[Ca3] E. Calabi, Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds, *Trans. AMS*, **87**(1958), 407-438.

[CV] E. Calabi and E. Vesentini, On compact local symmetric Kähler manifolds, *Ann. Math.*, **71**(1960), 472-507.

[CC] H. D. Cao and B. Chow, Compact Kähler manifolds with nonnegative curvature operator, *Inv. Math.*, **83**(1986), 553-556.

[Ch1] S. Y. Cheng, Eigenvalues comparison theorems and its applications, *Math. Zeit.*, **143**(1975), 289-293.

[Ch2] S. Y. Cheng, Eigenfunctions and nodal sets, *Comm. Math. Helv.*, **51**(1976), 43-55.

[CY1] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of complete Kähler-Einstein metric on noncompact complex manifolds and regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **32**(1980), 507-544.

[CY2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Inequality between Chern numbers of singular Kähler surfaces and characterization of orbit space of discrete group of $SU(2,1)$, preprint.

[Co] K. Cho, Positivity of the curvature of Weil-Peterson metric on the moduli space of stable vector bundles, preprint.

[CS] H. I. Choi and R. Schoen, The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature, *Inv. Math.*, **81**(1985), 387-394.

[CW] H. I. Choi and A. N. Wang, A first eigenvalue estimate for minimal hyper-surfaces, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 559-562.

[Cr] D. Christodoulou, A mathematical theory of gravitation collapse.

[D1] S. K. Donaldson, A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983).

[D2] S. K. Donaldson, Inequality between Chern numbers of Singular Kähler "Antiself dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, *Proc. London. Math. Soc.*.

[D3] S. K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 269-316.

[D4] S. K. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[ESa] J. Eells and S. Salaman, Twistor construction of harmonic maps of surfaces into four manifolds, preprint.

[ES] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math .*, **88**(1964), 1009-1060.

[EW1] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, *Topology*, **15** (1976), 263-266.

[EW2] J. Eells and J. C. Wood, Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces,

Adv. Math., **49**(1983),. 217-263.

[Es] H. Escobar, Spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds, *Comm. in Pari. Diff. Equat.*, **11(1)**(1986), 63-85.

[Fe] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domain, *Inv. Math.*, **26**(1974), 1-65.

[Fr] T.T. Frankel, Manifolds with positive curvature, *Pacific J. Math.*, **11**(1961), 165-174.

[Fu1] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics, *Inv. Math.*, **73**(1983), 437-443.

[Fu2] A. Futaki, On a character of the automorphism group of a compact complex manifold, preprint.

[FM] A. Futaki and S. Morita, Invariant polynomial characterization to compact complex manifold and compact group actions, preprint.

[G] D. Gieseker, Global moduli for surfaces of general type, *Inv. Math.*, **43**(1977), 233.

[GW] C. S. Gordon and E. N. Wilson, Isospectral deformations of compact solvmanifolds, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 241–256.

[GH] P A. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, New York, 1978.

[Gr] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comm. Math. Helv.*, **56**(1981), 179-195.

[Ha] S. Hamilton, *Harmonic Maps of Manifolds with Boundary*, Lecture Notes in Math. No. 471, Springer-Verlag, 1975.

[HM] Harris and D. Mumford, On the Kodaira dimensions of the moduli space of curves, *Inv. Math* ., **67**(1982), 23.

[Hr] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, *Canad. J. Math.*, **19**(1967), 693-687.

[HL] Harvey and H. B. Lawson, An intrinsic characterization of Kähler manifolds, *Inv. Math.*, **74**(1983), 169-198.

[HK] F. Hirzebruch and I. Kodaira, On the complex projective spaces, *J. Math. Pure Appl.*, **36**(1957), 201-266.

[Ho] H. Horikawa, Algebraic surfaces of general type with small C_1^2, *J. Ann. Math.*, **104**(1976), 357-387.

[Ii] S. J. Iitaka, *Math. Soc. Japan,* **24**(1972), 384-396.

[IS] Ishikawa and Sakane, On complex projective bundles over a Kähler C-space, *Osaka J. Math.*, **16**(1979), 121-132.

[Is] Isokovskih, Fano 3-folds, I, II, *Math. USSR Izv.*, **11**(1977) no. 3, 485-527;**12**(1978) no. 3, 469-506.

[Iv] V. Ya. Ivrii, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, *Funct. Analy. Appl* ., **14(2)**(1980), 98-105.

[Ja] H. Jacobwitz, Local isometric embeddings of surfaces into Euclidean four space, *Indiana University Math. J.*, **21**(1971), 249-254.

[Jo] J. Jost, Univalency of harmonic maps between surfaces, *J. Reine. Angew. Math.*, **324** (1981), 141-153.

[JS] J. Jost and R. Schoen, On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces, preprint.

[JY1] J. Jost and S. T. Yau, Harmonic mappings and Kähler manifolds, *Ann. Math.*, **262** (1983), 145-166.

[JY2] J. Jost and S. T. Yau, A strong rigidity theorem for a certain class of compact complex surfaces, *Ann. Math.*, **271**(1985), 143-152.

[Ky] S Kobayashi, Hyperbolic Manifold and Holomorphic Mappings.

[Ko] K. Kodaira, On the structure of compact analytic surface, *I, Amer. J. Math.*, **86** (1969), 751-798.

[Ku] N H. Kuiper, On conformally flat spaces in the large, *Ann. Math.*, **50**(1949), 916-924.

[LM] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, Clifford bundles, immersions of manifolds and the vector field problem, *J. Diff. Geom.*, **15**(1980), 237-267.

[LS] H. B. Lawson and J. Simons, On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry, *Ann. Math.*, **98**(1973), 427-450.

[Lm] L. Lemaire, Applications harmoniques de surfaces rièmanniennes, *J. Diff. Geom.*, **13**(1978), 51-78.

[Le1] L. Lempert, Le métrique de Kobayashi et la répresentation des domains sur la boule, *Bull. de la Math. Soc. de France*, **109**(1981), 427-472.

[Le2] L. Lempert, Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains, *Analysis Mathematics*, **8**(1982), 257.

[LY1] P. Li and S. T. Yau, Eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *AMS Symposium on Geometry of the Laplace Operator*, XXXVI, Hawaii (1979), 205-240.

[LY2] P. Li and S. T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Inv. Math.*, **69**(1982), 269-291.

[Ln1] C. S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian mani- folds with nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 213-230.

[Ln2] C. S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly. preprint.

[Lü] M. Lübke, Stability of Einstein-Hermitian vector bundles, *Man. Math.*, **42**(1983), 245-257.

[LuS] L. Lusternik and L. Schnerelmann, Sur le problème de trois géodesiques fermées sur les surfaces de genre O, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **189**(1929), 269-271.

[MY] W. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, *Ann. Math.*, **112**(1980), 441-484.

[Mi] J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifolds, *Proc. Nat. Sci. USA*, **51**(1964), 542.

[M1] Y. Miyaoka, Kähler metrics on elliptic surfaces, *Proc. Japan, Acad.*, **50**(1974), 533- 536.

[M2] Y. Miyaoka, On the Chern numbers of surfaces of general type, *Inv. Math.*, **42** (1977), 225-237.

[M3] Y. Miyaoka, The maximal number of quotients singularities on surfaces with given numerical invariants, *Ann. Math.*, **268**(1984), 159-171.

[Mk1] N M. Mok, Embedding complete Kähler manifolds into affine algebraic varieties, *Bull. de Math. Soc. de France*, **112**(1984), Fasc. 2.

[MSY] N M. Mok, Y. T. Siu, and S. T. Yau, The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds, *Composition Math.*, **44**(1981) (1-3), 183-218.

[MkY] N. M. Mok and S. T. Yau, Completeness of the Kähler-Einstein metric on bounded Riemann domains and the characterization of domains of holomorphy by curvature conditions, Sympos. on Math. Heritage of Henri Poincaré. (Indiana Univ. 1980), *Proc. Sympos. Pure Math.*, 39, Part 1, AMS (1983), 41-59.

[MZ] N. M. Mok and J. Q. Zhong, Curvature characteristics of compact Hermitian symmetric spaces, to appear in *J. Diff. Geom.*.

[MD] D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, preprint.

[Mo1] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.*, **110**(1979), 593-606.

[Mo2] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are numerically effective, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **77**(1980), 3125-3126.

[MM] S-Mukai, Mori, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geqslant 2$, *Man. Math.*, **36**(1981), 147-162.

[Mr] J. Morrow, A survey of some results on complete Kähler manifolds, *Global Analysis*, Papers in Honor of K. Kodaira.

[MK] J. Morrow and K. Kodaira, *Complex Manifolds,* Holt, Rinehart, Winston, Inc., 1971.

[MS] G.D. Mostow and Y. T. Siu, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, *Ann. Math.*, **112**(1980), 321-360.

[NS] M.S. Narasimhan and C. S. Seshadri, Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, *Ann. Math.*, **82**(1965), 540-567.

[PP] H. Pinkham and U. Persson, Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, *Ann. Math.*, **113**(1981), 45-66.

[Pi] J.T. Pitts, Existence and regularity of minimal surfaces in Riemannian manifolds, Mimeograph (1979).

[Pg] A.V. Pogorelov, An example of a two-dimensional Riemannian metric not admitting a local realization in E3, *Doklady Akad. Nauk. USSR*, **198**(1971), 42-43.

[Po] Pólya, On the eigenvalues of a vibrating membrane, *London Math. Soc. Ser. 3*, **11** (1961), 414-433.

[SaU] Sacks-Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-sphere, *Ann. Math.*, **713** (1981), 1-24.

[Sk1] Sakane, On compact Einstein-Kähler manifolds with aboundant holomorphic transformations, Manifolds and Lie groups, Papers in Honor of Matsushima, progress in Math. Boston (1981), 337-358.

[Sk2] Sakane, On nonsingular hyperplane sections of a hermitian symmetric space, preprint.

[Sa] J. H. Sampson, Applications of harmonic maps to Kähler geometry, preprint.

[St] J. Satakre, On compactifications or the quotient spaces of arithmetically defined discontinuous groups, *Ann. Math.*, **72**(1980), 555-580.

[Sc] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 479-496.

[SS] R. Schoen and L. Simon, Regularity of stable minimal hypersurfaces.

[ScU1] R. Schoen and K. Uhlenbeck, A regularity theory for harmonic maps, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 307-335.

[ScU2] Ri Schoen and K. Uhlenbeck, Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 253-268.

[ScU3] Ri Schoen and K. Uhlenbeck, Approximation theorem for Sobolev mappings; preprint.

[ScY1] R. Schoen and S. T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. *Ann. Math.*, **110**(1979), 127-142.

[ScY2] R. Schoen and S. T. Yau, Compact group actions and the topology of manifolds with nonpositive curvature, *Topology*, **18**(1979), 361-380.

[ScY3] R. Schoen and S. T. Yau, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature, *Comm. Math. Helv.*, **39**(1981), 333-341.

[ScY4] R. Schoen and S. T. Yau, On the univalent harmonic maps between surfaces, *Inv. Math.*, **44**(1978), 265-278.

[SWYY] I, M. Singer, B. Wong, S. T. Yau, and Stephen S. T. Yau, An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Series* IV, V. XII, no. **2**(1985), 319-333.

[S1] Y. T. Siu, Every K-3 surface is Kähler, *Inv. Math.*, **73**(1983), 139.

[S2] Y. T. Siu, The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. Math.*, **112**(1980), 73-111.

[S3] Y.T. Siu, Curvature characteristics of hyperquadries, *Duke Math. J.*, **47**(1980), 641- 654.

[S4] Y.T. Siu, A simple proof of the surjectivity Of the period map of K-3 surfaces, *Man. Math.*, **35**(1981), 311-321.

[S5] Y.T. Siu, A vanishing theorem for semipositive line bundles over non-Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 431-452.

[SY1] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifold of positive bisectional curvature,

Inv. Math., **59**(1980), 189-204.

[SY2] Y. T. Siu and S. T. Yau, Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, *Ann. Math.*, **105**(1977), 225-264.

[SY3] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compactification of negatively curved Kähler manifolds of finite Volume, *Seminar in Diff. Geom.* (edited by S. T. Yau), 1982.

[Su] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 723-732.

[To] A. N. Todorov, Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K_3 surfaces, *Inv. Math.*, **61**(1980), 251-265.

[Tr] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemann structures on compact manifolds, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa.*, **3**(1968), 265-274.

[U1] K. Uhlenbeck, Connections with L^p bounds on curvature, *Comm. Math. Phys.*, **83** (1982), 31-42.

[U2] K. Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, *Comm. Math. Phys.*, **83** (1982), 11-29.

[U3] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups, preprint.

[UY] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections on stable vector bundles, preprint.

[UCSD] Proceedings of the UCSD conference at La Jolla, 1985, to appear.

[V1] Ven de Van, On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, *Proc. Nat. Acad.*, **55**(1966), 1624-1627.

[V2] Ven de Van, In the Chern numbers of surface of general type, *Inv. Math.*, **36**(1976), 285-293.

[We] H. Weyl, Das asymptoticsche Verteilungsgesetz der Eigenveerte linearer partieller Differential gleichungen, *Ann. Math.*, **71**(1911), 441-469.

[Wh] B. White, Homotopy classes in Sobelev spaces of mappings, preprint.

[Wo1] B. Wong, On the holomorphic sectional curvature of differentiable Kobayashi metric and Caratheodory metric, *Trans. AMS.*

[Wo2] B. Wong, Characterization of the unit bali by its automorphism group, *Inv. Math.*, **41**(1977), 253-257.

[Ya] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J.*, **12**(1960), 21-37.

[Yg] P. Yang, On Kähler manifolds with negative holomorphic bisectional curvature, *Duke Math. J.*, **43**(1976), 871-874.

[Y1] S. T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74**(1977), No. 5, 1798-1799.

[Y2] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampere equation, I. *Comm. Pure. Appl. Math.*, **31**(1978), 339-411.

[Y3] S. T. Yau, On the curvature of compact Hermitian manifolds, *Inv. Math.*, **25**(1974), 213-239.

[Y4] S. T. Yau, A general Schwartz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, **100**(1978), 197-203.

[Y5] S. T. Yau, Some function- theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, *Indiana Univ. Math. J* ., **25**(1976), 659-670.

[Y6] S. T. Yau, Problem Section, Seminar on Diff. Geom., edited by S. T. Yau, Princeton Univ. Press, 1982.

[Y7] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**(1975), 201-228.

[ZY] J.Q. Zhong and H. C. Yang, On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, Scientia, Sinica, Vol. XXVII, No **12**(1984), 1265-1273.

第九章　几何中未解决的问题

正如陈省身教授所建议，若一个研究领域中有许多有趣的未解决问题，则它是有活力的．所以，我搜集了我感兴趣的某些问题 [1]．值此陈省身教授 79 岁诞辰之际，谨以此文献给陈省身教授．感谢我的朋友郑绍远，S. Bando、川又雄二郎 (Y. Kawamata)、P. Li、西川青季 (S. Nishikawa) 和 R. Schoen 所提供的宝贵意见．我也要向 Laura Schilesinger 深表谢意，感谢她耐心地打印了这份手稿，尽管我多次作了实质性的修改．

9.1　度量几何

1.　寻求一种在紧致 Riemann 流形上构造典范度量的一般方法．所有已知的典范度量均由变分原理获得．以往，几何学家研究了由全数量曲率、Riemann 曲率的 L^2 模所定义的泛函或与杨 -Mills 场相关的那些泛函的临界点．若存在一作用在流形上的紧致群，则可把变分问题简化为一个较易解决的低维问题．上述方法被相对论学者用来寻找 Einstein 方程的精确解．求典范度量的一种可能而有效的方法是采用奇异摄动法．例如，若两个紧致流形容有同号数量曲率的 Einstein 度量，则我们能否把这两个流形沿某个子流形连接起来，使得流形

[1] 本章是丘成桐教授为庆贺他的老师陈省身教授 90 华诞而作．原载：《陈省身——20 世纪的几何大师》，台湾交通大学出版社，2000. 沈一兵译，李世杰、陈维桓校．

之和容有一近似 Einstein 度量，我们再把它摄动成一 Einstein 流形. Donaldson 和 Friedman([DFr]) 已对自对偶度量证明了这点，在那里他们取连通和. 最近 Taubes（见 J. Diff. Geom., 36(1992), 163-253）已对反自对偶度量证明了一个一般的存在性定理. 因为一般四维环面的连通和不容有 Einstein 度量，故此 Einstein 度量问题更为复杂. 也许我们在做摄动之前应该适当地选择子流形. 这种作法对于大于 5 的维数是否会更容易，因为对这些维数不存在已知的障碍？

我们可把这个问题推广到比 Riemann 度量更一般的某类度量上去. 例如，我们可寻找 Finsler 度量或这样的 Riemann 度量，它的联络可以不是 Riemann 的，但是满足 Lagrangian 有关的其他条件.

2. 寻求一种好的拓扑条件，使一个流形容有共形平坦或射影平坦度量. 显然，存在必要条件. 例如，对于共形平坦流形而言，其 Pontryagin 形式消失，且流形的通用覆盖可以浸入到球面的一个子区域上. 他们的基本群的结构是什么？似应研究结构群为共形群的丛. 也许在这些丛之间存在某种稳定性概念. 联想到类似于 Hermite 杨 -Mills 联络的发展，有可能定义“稳定”共形丛，使得具有消失的 Pontryagin 类的这种丛是平坦的.

3. Schoen 和作者（Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Inv. Math., 92(1988), no. 1, 41-71.）证明了具正数量曲率的紧致共形平坦流形的通用覆盖是 S^n 中的一个区域. 对于紧致流形上的射影平坦结构是否有类似的定理？代替流形为共形平坦的假设，我们可假设 Weyl 曲率张量由数量曲率决定. 对于这样的流形，若把共形变换群代之以拟共形变换群，类似的定理成立吗？

4. Berger([B]) 已把 Riemann 流形的和乐群作了分类. 若度量不是 Riemann 的而容许不同的符号差，则 Berger 的对应定理仍应存在. 更重要的是，我们想求一个完备联络，它的和乐群是给定 Lie 群. 特别是把具平行旋量的完备 Lorentz 流形进行分类.

5. 高志勇和作者 ([GY]) 证明了每个紧致三维流形都容许一个具负 Ricci 曲率的度量. 在每个维数大于 3 的紧致流形上存在这样的度量，这似应毋庸置疑. 关于具负 Ricci 曲率度量的空间的同伦型能说些什么呢？具负 Ricci 曲率的紧致流形不容许有连续等距群. 若一个有限群光滑地作用在紧致流形上，则此流形上存在具负 Ricci 曲率的等变度量.

6. 设 M 是具正数量曲率的紧致流形. M 是否容许一有限覆盖 $\widetilde{M}$, 使得在余维数 $\geqslant 3$ 的球面上通过相继的换球术之后, $\widetilde{M}$ 变成几维为紧致齐性流形的几维空间？根据 Stolz([St]) 的工作，这很可能是正确的. 证明一个紧致的 $K(\pi, 1)$ 不可能容有具正数量曲率的度量. 若维数不大于 4，这已被 Schoen– 丘 ([SY]) 证得.

7. 沙际平和杨大纲 (J. P. Sha and D. G. Yang, Examples of manifolds of positive Ricci curvature, J. Diff. Geom., 29(1989), 95-103) 的最近工作表明，在具有正 Ricci 曲率的流形的范畴内，某种形式的换球术是可能的. 不幸的是，一般地，两个具正 Ricci 曲率的流形的连通和未必容许具正 Ricci 曲率的度量. 简单地取两个具非平凡基本群的流形，其连通和会有一个大的基本群，这是不可能的. 对于单连通流形会怎么样？具有正的第一陈类的代数流形容许具正 Ricci 曲率的度量. 我们能否在这些流形上施行保持 Ricci 曲率为正的换球术？

8. 对于具正数量曲率的紧致自旋流形, 调和的旋量消失, 这个熟知的 Lichnerowicz 定理意味着某些示性数消失. 对于具正曲率的流形的微分结构，不存在已知的障碍. 这是巧合吗？很可能存在其他的限制. 我们能找到它们吗？若曲率是 1/4 拼挤的，则在微分结构上存在知道的障碍（见 M. Weiss, Pinching and concordance theory, J. Diff. Geom., 38(1993), no. 2, 387-416). 对于四维流形，关于具正 Ricci 曲率的流形的 Donaldson 不变量我们能说些什么？具有正曲率算子的紧致流形微分同胚于标准球面，这大概是无疑的. 能证明这点吗？能否证明一般的紧致代数流形不容许具正 Ricci 曲率的度量？

9. 已给一个具非负 Ricci 曲率的 n 维完备流形，令 $B(r)$ 是以某点 P 为中心的测地球（半径为 r—— 译注）. 设 σ_k 是 Ricci 张量的 k 次初等对称函数. 那么，当 r 趋向无限时，$r^{-n+2k}\int_{B(r)}\sigma_k$ 有上界，这是真的吗？这似应看作 Cohn-Vossen 不等式的推广. 若流形的曲率是非负的，能对由曲率形式构造的其他不变量考虑类似的问题吗？

10. Gary Hamrick 和 D. Royster 证明了 (Flat Riemannian manifolds are boundaries, Inv. Math., 66(1982), 405-413), 平坦流形的 Stiefel-Whitney 数为零. 对于几乎平坦流形，类似的论断成立吗？关于双曲流形或其他局部对称空间，若只考虑 Stiefel-Whitney 数的子集，那又怎样？

11. 设 M_1 和 M_2, 是两个具正曲率的紧致流形，f 是这两个流形之间的同

伦等价. 那么，是否有 $f^*\hat{A}(M_2)=\hat{A}(M_1)$ ？其中 $\hat{A}$ 表示流形的 $\hat{A}$ 类. 一个有关的问题是，对于与一给定的具正截面曲率流形同伦的具正曲率的紧致流形，是否只存在有限多个微分同胚类型？

12. 著名的拼挤问题是说，在一个紧致单连通流形上，若 $K_{\min}>\frac{1}{4}K_{\max}>0$, 则该流形同胚于球面. 若我们用规范化数量曲率代替 $K_{\max}$, 则能导出类似的拼挤定理吗？设 M 是具非负曲率的紧致流形，它的整系数上同调环与秩大于 1 的不可约对称空间的上同调环相同. M 是对称的吗？对于非常曲率的秩 1 对称空间，我们可提同样的问题，如果曲率是 1/4 拼挤的. 对于具非正曲率的流形，我们也可提类似的问题. 当曲率为 1/4 拼挤且维数为 4 时，作者（未发表的 1974 年手稿）利用 Gauss-Bonnet 和符号差公式，能够肯定地解决此问题.

13. 设 M 是曲率被拼挤在两个正常数之间的紧致流形, 能否用这些常数和 M 的同伦型来估计 M 的内射半径的下界？如所知, 对于偶维数流形或 $\dim M=3$, 这是真的.

14. 一个紧致单纯复形何时容许一非正曲率的度量？即使当复形的维数为 2 时，这也是一个有趣的问题. 与非正曲率流形的基本群有关的大部分定理能否推广到这些空间？例如，能否定义这种空间的秩数？是否有一个有用的局部对称空间的概念？能否利用拓扑数据来表征被 Bruhat-Tits 构造覆盖的度量复形？若一个 $K(\pi,1)$ 容有使强等周不等式成立的度量, 即对于任一圆盘区城 D,D 的面积不超过 C 与边界 ∂D 之长度的乘积，其中 C 是与 D 无关的常数，则此 $K(\pi,1)$ 是否同伦于具强负曲率的单纯复形？

值得注意的工作是， Schoen（见 [Sc] 第 I 部分）研究了目标流形为具非正曲率的单纯复形的调和映射的正则性理论. 为了得到正则性理论的深刻性质，他对复形需作更强的假设. 他的工作对于理解 Lie 群中离散群的强刚性问题是实质性的（见 Gromov-Schoen 的工作： Harmonic maps into singular Spaces and p-adic Superrigidity for lattices in groups of rank one, preprint.). 具负曲率的紧致空间的基本群是否在某种意义下是“刚的”？例如，基本群的映射类群是有限的吗？已有 Gromov, Thurston, Gerstein-Short 和其他学者等的工作，他们研究了与这些问题有关的问题.

应当记得，为使一个群是一完备（非紧致）的具非正曲率流形的基本群，

除了群的上同调维数的有限性之外，没有已知的拓扑障碍.

15. 设 M^3 是具非负数量曲率的三维渐近平坦流形. 设 $\sum$ 是稳定的极小嵌入的 S^2, 在 S^2 的合痕类中, 它在无穷远处使面积极小化. 能否用 S^2 的连续族把 $\sum$ 与在无穷远处的球面连接起来, 其中这连续族满足一抛物方程, 使得球面的质量能被控制住？例如, Geroch 和 Jang([Ja]) 提出下列流: $\partial x/\partial y = -N/H$, 其中 N 是法向量, H 是平均曲率. 在 $\mathbb{R}^3$ 中这被 J.Urbas 和 C.Gerhard 所研究 ([G]) , 在某些非平坦度量下这被 Huisken([Hu]) 所研究; 并且通过比较这些情况下 $\sum$ 的全质量和面积, 而用它来证明 Penrose 不等式. 有可能把 Penrose 猜想推广成如下叙说: 对于任何嵌入曲面, 只要它在无穷远与球面合痕并且包围最远的可见地平线. 则 Hawking 质量不大于三维流形的 ADM 质量. 从这点来看, 也许存在某种途径把 Willmore 泛函和 Penrose 不等式联系起来.

16. 设 M^3 是数量曲率为零的三维渐近平坦流形. 若在一紧致集的外面度量是旋转对称的, 则此度量是否是处处旋转对称的？从度量的渐近展开式能得 M^3 上的多少信息？我们能否有效地找出这种信息？

17. 设 M^3 是具非负数量曲率的三维渐近平坦流形, 如果当曲率张量的 L^2 模被规范化为 1 时全质量很小, 则 M 是否微分同胚于 $\mathbb{R}^3$, 从而使度量也一致等价于平坦度量？(尚不清楚我们在这里的规范化是否是自然的.) 我们料想流形不容许稳定的极小球面, 并且也许问题 15 中提到的流整体地存在, 这将使球面收缩为一点.

可以推广上述两问题, 使之包括广义相对论中更一般的 “初始数据集” 的系统表述.

9.2 经典 Euclid 几何

18. 已给 $\mathbb{R}^3$ 中一紧致曲面 $\sum$ 和 $\sum$ 上互不相同的点 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 的一个分布, 我们可用下列方法定出一个整数 m. 对于 $\mathbb{R}^3$ 中次数不大于 r 的多项式 $\mathcal{Q}$ 我们可令

$$\int_{\sum} \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(P_i) c_i,$$

其中 c_i 是仅与 P_i 有关的数.

若 r 较小，则可使这公式对一切次数不大于 r 的多项式 Q 成立（诸 c_i 应选择得只与 P_i 和 r 有关）. 整数 m 便是以这种方式所选择的最大整数 r. 它依赖于 $\{P_1,\cdots,P_n\}$ 的分布. 固定 n 并令 P_i 变动，我们可使 m 极大化并得一整数 $f(n)$. 对于 $f(n)$, 点的对应分布和对应的权 $c_1,\cdots,c_n$ 进行研究是颇有趣味的. 这种分布唯一到什么程度，并且能否在几何上表征它们？例如，它在某种意义下是绷紧的吗？即任何微小变形可导致在同一时刻使某种几何距离增加？这种分布可看作根据积分来最均等地分布点. 我们如何确定权 c_i ？

代替点，我们也可考虑 $\sum$ 的平面截线的集合，用 Q 在平面截线上的积分来代替 $Q(P_i)$. 我们可用这种方式来求 $\sum$ 上平面截线的"均等分布".

这里所作的定义依赖于曲面到 $\mathbb{R}^3$ 的嵌入. 对于抽象流形我们可用特征值小于一固定常数的特征函数的空间来代替次数小于 r 的多项式空间.

在一个代数流形 M 上我们可以寻求代数闭链的类似表述. 设 N_i 是余维数 k 的不可约代数子簇. 于是对 $\wedge^k(TM|N_i)$ 的每个全纯截面 s_i 和 K_M^m 的全纯截面 t ，我们可取 $s\bar{s}$ 和 $(t\bar{t})^{\frac{1}{m}}$ 的内积，并得到 N_i 上的（可能退化的）体积形式.

对于不可约代数子簇的不相交集 $\{N_1,\cdots,N_n\}$ ，我们可以研究方程

$$\int_M (t\bar{t})^{\frac{1}{m}} = \sum_i \int_{N_i} i_{s_1 s_i}(t\bar{t})^{\frac{1}{m}},$$

其中 t 是 K_M^m 的全纯截面，s_i 是 $\wedge^k(TM|N_i)$ 的全纯截面，它们的选择要与 t 无关.

当 m 较小时，我们可使上述方程对一切 $t\in H^0(K_M^n)$ 都成立. 变化 s_i 并且取 m 的极大值，我们可求得仅与 $\{N_1,\cdots,N_n\}$ 有关的极值 m. 再变化 N_i 我们可求得仅与 n 有关的整数 $m=f(n)$. 研究极端构形 $\{N_1,\cdots,N_n\}$ 是颇有兴趣的. 即使当 N_i 为点时，这些点的几何特征也是不清楚的. 在上面的表述中，显然我们考虑规范线丛 K_M 是丰富的情形，从而使 K_M^m 有许多全纯截面. 当然，我们也可用其他的某种线丛 L 代替 K ，只要流形和 L 都容有某个度量.

19. Minkowski 问题是利用曲率函数确定一闭凸曲面的问题，这个函数通过 Gauss 映射定义在单位球面上. 寻找一种有效的算法求此问题的数值解，也许是有趣味的. 这与反散射问题相关. 寻找 Minkowski 问题在非凸曲面上的适当推广，或许也是很有兴趣的. 大概需要了解多值支撑函数和多值曲率函数. 这些函效能唯一决定闭曲面吗？若是唯一的，则在数据的小扰动下结果是稳定

的吗？如何利用 Minkowski 数据来计算曲率线、渐近线和脐点？

20. 如何给出非正则几何对象的一种有力描述，特别是由变分原理定义的几何对象的奇异集．例如，调和映射与极小簇的奇异集有怎样的正则性？能否把极小曲面的 Douglas-Rado 映射方法，推广到边界不是 Jordan 曲线而是一复形的一维骨架的情况？应该用复杂性最小的单纯复形来代替圆盘域．

21. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一曲面，例如，人的脸，刻画该曲面的“特征”的最有效几何方法是什么？脐点、平坦点、曲率临界点、曲率线和渐近线等概念有多大帮助？对于一张一般曲面，如何描述脐点、平坦点和曲率临界点的分布状态？有多少闭的曲率线或渐近线？在 $\int K^+ = 4\pi$ 的闭曲面上能否求出两条以上的闭渐近线？

对于 S^2 上每点，可从原点引一射线．若射线按几何光学反射，则反射线的方向确定 S^2 上的一点．因此，我们得到一个从 S^2 到 S^2 的映射．这个映射告诉我们多少关于曲面的信息？我们能用有效的数值方法得到这信息吗？若我们重复此映射，则应有有趣的动力学．如果我们不按几何光学，允许射线从一点出发，而在另一点接收到．若我们知道这两点到曲面的距离，则得一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射．我们想根据这个映射恢复该曲面．

22. 证明每个光滑曲面都能局部等距地浸入 $\mathbb{R}^3$ 和整体光滑等距地嵌入 $\mathbb{R}^4$，林长寿 ([L]) 对非负曲率的曲面的第一个问题已作出了重大贡献．根据 E.Poznjak(Isometric immersions of 2- dimensional metrics in euclidean spaces, Uspekhi Math. Nauk 28, 47-76) 的论证，稍作修改，我们就能证明：T^2 上任何度量都能等距地浸入到 $\mathbb{R}^4$ 中．（见作者在 Berkeley 的 Lecture Notes, 1977.）

23. 若 $\mathbb{R}^3$ 中一闭曲面容有到任意阶的非平凡无穷小等距形变，则该曲面容有非平凡的光滑形变吗？(若一切都是实解析的，则这是真的，见 (N.Effimov, Qualitative problems and the theory of deformation of surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., Vol, 37)．是否存在类似于 Kuranishi 理论的关于等距形变的较好理论？对任何 n，我们能否找到一个容有 n 阶非平凡形变的闭曲面（无边界）？

24. 每个紧致曲面都能等距嵌入到具非正曲率的三维流形中吗？（也应考虑具孤立奇点的三维流形．）假设第二基本形式是正定的．等距嵌入的模空间是什么？我们想用某种变分原理来选取这些三维流形．或许它能等距嵌入到低维 Euclid 空间中．

25. 对于紧致流形 M^n 上的一般度量， M^n 到 $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 的等距嵌入的模空间是什么？局部问题已被 E.Berger ， R.Bryant 和 P.Griffiths 所研究（见 Characteristic and rigidity of isometric embeddings ， Duke Math. J.， 50(1983), 803-892 ）. 对 Kähler 度量，有没有比较完整的等距嵌入理论？

26. 在圆盘域上给定一正曲率的度量，欲使一空间曲线是该度量在 $\mathbb{R}^3$ 中等距嵌入的边界的象，其条件是什么？若限制边界曲线为平面曲线，则能否给出圆盘到 $\mathbb{R}^3$ 中的等距形变的完整描述？也应对圆环或其他平面区域研究类似的问题. 这些问题与具有 $\int K^+ = 4\pi$ 的闭曲面的等距嵌入有关，其中我们用圆环代替圆盘.

27. 对于等距浸入的大部分唯一性定理，要假定浸入有较高的正则性. 然而，等距形变的实践表明，对等距浸入也应允许较低的正则性. 那末，$C^{1,1}$ 是对等距浸入的合适假设吗？例如，在此正则性假设下， B. Halpern 和 C.Weaver 的结果 (Inverting a cylinder through isometric immesions and isometric embedding , Trans. Amer. Math. Soc., 230(1974) ， 41-70) 仍成立吗？显然，存在 $0 < \alpha_0 < 1$ ，使得当 $\alpha > \alpha_0$ 时 $C^{1,\alpha}$ 等距嵌入是刚性的，而当 $\alpha < \alpha_0$ 时，不是刚性的. 那么 α_0 为何？

28. Nash 证明了每个光滑流形都容有一实代数结构. 利用定义多项式的次数来估计几何不变量将是有兴趣的. 例如，给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ ，在集合 $d(x,y) \geqslant \varepsilon$ 上逼近 Green 函数 $g(x,y)$ 的误差不超过所给 δ 的有理函数的最小次数是什么？当然，也可提关于热核、特征函数或示性数的问题.

29. 设 M 是紧致单连通的三维 Riemann 流形. 能否找到无限多个具固定亏格和无界 Morse 指标的嵌入极小曲面？（若 M 的 Ricci 曲率为正，则这是不可能的. ）Pitts 和 Rubinstein([PR]) 已断言：若这样的例子能找到，则著名的空间形式问题能肯定地获解，即光滑作用在 $S^3$4 上的每个有限群必共轭于一线性作用群. 一个有关的问题是：能否仅用外围流形的几何来估计嵌入极小曲面的第一本征值的下界？当 M 具有正 Ricci 曲率时这是可能的，且已被 Choi-Wang 证得 (A first eigenvalue for minimal hypersurfaces, J. Diff. Geom., 18(1983), 559-567).

30. Meeks 和作者 ([MY]) 证得：3 维流形中使其在同伦类内面积极小化的极小球面必是嵌入. 若指标数为 1 的极小球面由极小化极大的方法得到，则情

况如何？我们可用圆盘代替球面提出类似的问题. 肯定的回答将导致 Poincaré 猜想的肯定性解答.

类似地，通过研究 $S^2 \times \mathbb{R}$ 中与柱心 S^2 合痕的极小嵌入 S^2, 我们应能给出 Smale 猜想（ Hatcher 定理）的一个新证明. 在 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上易给出一个度量，使得仅有的非平凡的极小 S^2 是柱心 S^2. 希望了解在嵌入 S^2 的空间中的极小化过程，以便证明这样的空间是可缩的. 寻求 $\mathbb{R}^3$ 中嵌入闭曲线的经典流，以确定一条曲线是否是不打结的，这也是精彩的问题.

31. S^n 中是否存在非平凡的连续的一族余维数为 1 的紧致嵌入极小超曲面？在 $\mathbb{R}^3$ 中, 利用共轭曲面的概念, 可构造连续的一族极小曲面. 对于 $n > 3$，在 $\mathbb{R}^n$ 中是否存在其他的完备极小超曲面的连续族？若 S^3 中不存在非平凡的嵌入极小曲面的连续族，则著名的 Choi-Schoen 定理 (Inv. Math., 81(1985)，387-394) 将意味着对每个亏格， S^3 中只存有限多个该亏格的紧致嵌入极小曲面. 极小超曲面的体积和谱的性态是十分有趣的. 极小超曲面的体积值的集合是闭的吗？如所知，大球面的体积是所有紧致极小超曲面中最小的. 由球面乘积给出的极小超曲面的体积是否是所有非全测地的极小超曲面中有体积的最小值？ B.Solomon 认为是这样. 他 ([SI]) 也计算了 S^n 中许多等参极小超曲面的谱. 它们基本上是由代数数给出的. 是否可预料，由紧致极小超曲面决定的 ζ 函数具有类似于数论中所产生的那些特殊性质？它们是否满足某类泛函方程？能否把 S^3 中闭极小曲面的谱与它的共轭曲面的谱联系起来？在 S^n 中一嵌入极小超曲面围成一个区域. 能否把区域的谱与极小超曲面的谱联系起来？ $\mathbb{R}^n$ 中完备极小子流形的谱的结构怎样？有本征值吗？

32. 寻求一种有效的方法来构造 $\mathbb{R}^n$ 或 S^n 中的完备极小超曲面，使之具有有限拓扑且没有连续等距群. 标准的 Weierstrass 表示和反射原理在高维没有有用的类似. R.Hardt 和 L. Simon 利用在 S^n 的极小超曲面上的极小锥的扰动，构造了许多例子. Meeks([Me]) 已证明，在非平凡的三维完备平坦流形中，具有有限拓扑的完备嵌入极小曲面必有有限全曲率. 但仍然不知道，螺旋面是否是 $\mathbb{R}^3$ 中仅有的全曲率非有限的非平凡嵌入完备极小曲面. 具有限全曲率的完备极小曲面能被紧致化，并且它们的理论与 Riemann 曲面理论有很大关系. 似应给出 $\mathbb{R}^3$ 中具有限全曲率的完备极小曲面的模空间的一种描述. 能否找到在高维的类似理论？

33. Osserman-Xavier-Fujimoto([O], [X], [Fu]) 的工作解决了 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面的 Gauss 映射之值的问题.（但仍然不知道，具有限全曲率的完备极小曲面的 Gauss 映射是否能不取三个点为值.）除了 Solomon([S2]) 关于所有第一 Betti 数为零的最小化超曲面的漂亮工作外，基本上还没有高维的推广. 能否找到 Solomon 定理在减弱后两个假设条件下的适当推广？对于 $n < 8$, $\mathbb{R}^n$ 中不容有圆群作用且不是乘积的非平凡完备极小超曲面的 Gauss 映射的像是否在 S^{n-1} 中稠密？对于 $4 \leqslant n \leqslant 7$， $\mathbb{R}^n$ 中是否存在非平凡的完备稳定的余维数为 1 的极小超曲面？

34. 把球面的所有等参超曲面进行分类. Munzner([M1], [M2]) 证明了，这些超曲面必是次数为 1, 2, 3, 4 或 6 的代数超曲面. 次数 $g \leqslant 3$ 的例子已被 Cartan([C]) 分类，全部是正交表示的轨道. $g = 4, 6$ 的轨道例子也被项武义和 Lawson([HL]) 所分类，但 $g = 4$ 的非齐次例子后来被 Ozeki 和 Takeuchi([OT]) 及 Ferus-Karcher-Munzner([FKM]) 找到了. $\mathbb{R}^8$ 是能容有非平凡的面积最小化超曲面的最低维空间，并且已知有两例：在 $S^3 \times S^3 \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ 上的锥面和在 $2S^4 \times \sqrt{2}S^2 \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$ 上的锥面. 其他还有吗？

9.3 偏微分方程

35. 自然界中的许多双曲方程组提供了几何学家研究的自然奇异集. 例如，广义相对论中的 Einstein 方程构成适定的 Cauchy 问题的双曲方程组. 如果我们从非奇异数据开始，则可能以奇异时空终止. 最具挑战性的问题之一是刻画由这种方法引起的奇异性. Penrose 的著名“宇宙检查”猜想是刻画这种奇异性的一个尝试. 另一具挑战性的问题是寻求广义相对论中二体问题的显式解. 寻求允许非平凡引力幅射的 Einstein 方程的显式解是重要的. 在广义相对论中，创立了许多重要的时空，它们近似地满足场方程. 能否把这些近似解摄动到精确解？基本问题是寻求广义相对论中二体问题的半显式解.

36. 伸缩或迭代的概念在现代动力系统理论中起了非常重要的作用. 漂亮的图画通过研究动力系统来创作. 具分形维数的几何对象也经常被创造. 这些集合的任一个能作为由一变分问题产生的某个自然定义的方程的奇异集吗？

例如：设 Ω 是 S^n 上的开区域，它允许一个具正数量曲率的完备共形平坦度量. Schoen 和丘成桐 (Inv. Math., 92(1988), no. 1, 47-71) 证明了， $S^n \setminus \Omega$

的 Hausdorff 维数小于 $n/2$. 能够表征这类区域吗？在数量曲率能作成常数的情况下，闭集 $S^n \setminus \Omega$ 是自然的 Yamabe 方程的奇异集. 这方面的某些结果可参见 Schoen 的深刻工作.

37. 作用在非紧流形的 P– 形式上的 Laplacian 的谱一般是非离散的. 在大多数情况下，它组成一连续谱，并且它的离散谱部分可能嵌入在连续谱中. 连续谱是较稳定的. 当流形的曲率有界时，若我们取流形的覆盖，则连续谱的哪部分是稳定的？当我们一致变化度量时，连续谱的整体结构稳定吗？连续谱中何时出现带宽？它们的稳定程度怎样？（若流形覆盖一紧致流形，则这些问题应有更好的答案. 我们也应研究系数在平坦丛中的形式.）

嵌入于连续谱中的那些本征值是较少稳定的. 我们如何从数值上计算它们？当流形具有有界曲率和有限体积时，我们能否证明它们有有限的重数，并且对应的本征值有适当的增长控制？

在 Schoen- 丘成桐的工作 (Inv. Math., 92(1988), no.1, 47-71) 中，对于共形 Laplacian，能保证 Green 函数的 L^p 模的有限性的最小 p 具有重要的几何意义. 应当对 Green 形式提类似的问题，尤其对覆盖紧致流形的那些流形和中间维数的形式.

38. 设 $\{\omega_i\}$ 是紧致流形 M^n 上 Laplacian 的本征形式组成的一个正则化系列. 对所有 $\varepsilon > 0$，集合 $\{x : ||\omega_i|| < \varepsilon\}$ 的体积定义一函数 $F_i(\varepsilon)$. 是不是存在一系列 $\{\varepsilon_i > 0\}$ 使得 $0 < \lim\limits_{i\to\infty} \sup F_i(\varepsilon_i) < \infty$, 我们希望 ε_i 只跟 ω_i 的本征值有关. 当然，我们也可以考虑 $\lim\limits_{i\to\infty} \inf F_i(\varepsilon_i)$.

39. 设 M^n 是 n 维紧致流形，M' 是 M^n 的紧 (Galois) 覆盖. 能否用 Galois 群的阶数和 M 的几何来估计 M' 的第 p 个 Betti 数 b_p？特别，当 Galois 群的阶趋向无限时，b_p 何时趋向零？若 $2p \neq n$ 且 M 具有负曲率，则也许这是真的.

40. 在完备 Riemann 流形 M^n 上已给一不同调于零的奇异闭链 C，是否总能找到一闭形式 w, 它使得在 C 上的积分不是零？同时可在无穷远控制它的性态？例如，在什么条件下我们能选取 w 是 L^2 调和形式？当闭链具有像代数闭链，Lagrange 子流形等那样更多的结构时，我们想在形式上附加更多的结构，并且提反问题.

41. 二维球面上 Laplace 谱是非常刚性的. 有一种好的可能，即谱可以完

全确定度量. 最近郑绍远证明了一个漂亮定理: 若一度量的谱的重数与球面的谱的重数相同, 则该度量的所有测地线是闭的. 换言之, 曲面必是 Zoll 曲面, Zoll 曲面的谱能有 S^2 的谱的相同重数吗? 对高亏格曲面的谱的重数能说些什么吗? 例如, 若环面上一度量的谱的重数与正方形环面上的谱的重数相同, 则我们能对该度量说些什么呢?

42. 在文献 [U] 中 K. Uhlenbeck 证明了, 对于紧致流形上的一般度量, 每个本征值都是单的而无重数. 能否给出关于度量的一个有效条件, 以保证该度量是这意义下的一般度量? 具有特殊性质的度量不大可能是一般的. 例如, Einstein 度量具有退化本征值吗? (一种方法是寻求与 Laplacian 可交换的非平凡算子. 表征这些流形.) 能否刻画使一切本征值均为单的区域? 只有有限多个重本征值的区域存在吗? 若存在作用于流形上的紧致群, 则谱显然不可能是单的. 但我们可用了解群的表示是否是不可约的来代替这问题. Weyl 估计告诉我们本征值的计数函数渐近性态的主项. 误差部分是否反映了流形拓扑的某些方面? 例如, 环面能否容许一个度量, 它的谱性态像是球面的谱去掉 Weyl 项那样? λ_i 的重数的增长与流形的拓扑有关吗? 仅从函数的谱中我们能获取哪些类型的拓扑信息?

43. Laplacian 或 Schrödinger 算子的本征函数几何学的研究是非常有趣的. 需要估计本征函数的水平集和临界集的大小. 对于前者, 有 Donnelly-Fefferman ([DF]), Hardt-Simon 和 Dong([Do]) 的精彩工作. 对于后者, 实质上什么都不知道. 另一个十分重要的有关问题是, 当我们把 L^2 模规范化为 1 时, 估计本征函数的极大模. 对于哪类流形能估计极大模而与本征值的大小无关?

44. 在作者与 Singer, Wong 和 Stephen Yau 的联合工作 (An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, Ann.Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 12(1985), 319-333) 中, 对于凸域找到了 $(\lambda_1 - \lambda_2)d^2$ 的一个下界估计, 其中 λ_1, λ_2 是前两个本征值; d 是区域的直径. 对于这样的下界估计, 最佳常数量是什么? 是否存在极值区域? 对于非凸域或有边界流形, 能否找到 $\lambda_2 - \lambda_1$ 的好的下界估计? 设 M_ε 是 n 个 S^3 的积流形中由 $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon\,(\forall i)$ 和 $d(x_i, x_n) < \varepsilon$ 所确定的流形. 假定 $\varepsilon = 1/n$, 那末, 对算子 $-\Delta + c[\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})^2 + d(x_1, x_n)^2]$ 估计 $\lambda_2 - \lambda_1$ 将是感兴趣的.

45. 最近, Melas (On the nodal line of the second eigenfunction of the

Lalacian in $\mathbb{R}^2$, J. Diff. Geom., 35(1992), 255-263) 证明了任何第二本征函数的结点集不可能包围一有界凸域得紧致子区域. 对于高维 Euclid 空间有类似的结论吗？（最近 David Jerison 在这方面已作出了一个重要贡献.）对于带边界的紧致流形，这些结论在什么程度上成立？更高本征值的结点集的拓扑是什么？例如，能否找到本征函数的无穷序列，它们的结点域是胞腔的非交并？

46. 如所言，1984 年，Wente([We]) 最终解决了关于 $\mathbb{R}^3$ 中常平均曲率环面的存在性这个早就著名的 H. Hopf 问题. 接着 Kapouleas (N. Kapouleas, Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three space, J. Diff. Geom., 33(1991), 683-715) 构造了高亏格的常平均曲率曲面的例子. 这些曲面有物理意义吗？正如 Barbosa 和 do Carmo 已注意到，这些曲面在古典意义下是不稳定的. 这些曲面是否有可能在某个适当意义下是稳定的？常平均曲率曲面的模空间是什么？在 Reilly 的关于嵌入曲面的 Hopf 猜想的证明中，他实际上证明了曲面的浸入不可能是一个三维流形的浸入的边界. 因此，不是浸入的每个拓扑型都是可允许的. 这些浸入能在拓扑上进行分类吗？如果我们把曲面的面积规范化为 1，则它们的平均曲率的可能值是什么？

47. 具非正曲率的秩 1 紧致流形的通用覆盖的 Martin 边界是什么？注意，W. Ballman([Ba])(On the Dirichlet-Problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature, Forum Math., 1(1989), 201-213) 解决了这些流形的 Dirichlet 问题. 对于曲率介于两负常数之间的完备单连通流形，有 M. Anderson 和 R. Schoen 的深刻工作 ([AS])(Positive harmonic function on complete manifolds of negative curvature, Ann. Math., (2) 121(1985), 429-461). 当流形为乘积流形时，有 A. Freire 的工作 ([F], J. Diff. Geom., 33 (1991)， 215-232). 仍然未解决的一个问题是，寻求完备流形上的一般条件，以保证流形支撑非平凡的有界调和函数. 例如，若流形是完备单连通的、且曲率以一负常数为上界，则能否找到定义在流形上的非平凡有界调和函数？若流形是有限连通而不一定是单连通的，则会发生什么情况？显然，我们应假定体积是无限的.

对于具负曲率的完备 Kähler 流形，能提类似的问题. 可以研究这些流形的 Silov 边界. 然而，这是不成熟的，因为我们甚至还不知道如何只根据曲率和拓扑数据的知识来构造非平凡的有界全纯函数.

48. 设 M 是具非负 Ricci 曲率的完备流形. 具有多项式增长（当增长率固

定时）的调和函数空间是否是有限维的？ $\mathbb{R}^n$ 具有多项式增长调和函数的极大维数吗？自从作者在 1981 年国际数学家大会的演讲中宣布此问题后，李伟光和谭联辉 ([LT]) 已对此问题作了极好的工作．当 M 为 Kähler 流形时，我们想知道多项式增长全纯函数的代数是否是有限生成的？生成元将导致 M 到 $\mathbb{C}^n$ 的全纯映射．它的象和纤维看起来像什么，我们也可用具有界曲率的线丛的全纯截面代替全纯函数．

49. 在度量空间中应用 Richard Hamilton 流 (flow) 方面，已有许多精彩结果．也存在着有待研究的若干重要问题．当度量为 Kähler 时，曹怀东 ([Ca]) 证明了长时间的整体存在性．方程的渐近性态是十分有趣的．似应与流形的复结构的稳定性有关．当流形为三维时，流的奇异性也许与流形拓扑的约束有关．

50. R.Bartnik(Comm.Math.Physics, 94(1984)， 155-175) 证明了在某些坐标条件下极大叶片在无穷远和在内部的存在性．假设只是测地完备的并且是一个渐近 Euclid 的 Cauchy 曲面，这样的极大叶状结构存在吗？可能这与 Eschenberg， Galloway， Baum， Ehrlich， Markvorsen 和 Newman 等最近证明的分解定理有关． (J.H.Eschenberg, The Splitting theorem for Spacetime with strong energy condition, J. Diff. Geom.， 27(1988), 477491; R. Newman, A proof of the Splitting conjectue of S-T. Yau, J. Diff. Geom.， 31(1990), 163-184) 在分解猜测（见丘成桐编的 “ Problem Section ”，问题 115, Ann. Math. Studies, no. 102, Princeton University Press, 1982, 669-706—— 译注）的叙述中，我们能否把存在一直线的假设代之以存在一完整的稳定测地线？

51. 在广义相对论中，存在一组包含渐近平坦度量张量与另一对称张量的约束方程组．有四个约束方程，因而是欠定的．我们能以有效的方法来“解”这组方程吗？

最近， R.Bartnik(Quasi-spherical metrics and prescibed scalar curvature, J. Diff.Geom.， 37(1993), 31-71) 已找到一种方法将一大类 $\mathbb{R}^3$ 上具有非负数量曲率的渐近平坦度量参数化．他假设存在面积递增的圆球面的叶状结构．后面这个假设是为了防止极小球面的存在．最好是给出没有假设条件的完全分类．更一般地，在 $\mathbb{R}^3$ 我们有另一对称张量 p_{ij} ，它在无穷远处二次地衰减，使得

$$\frac{1}{2}\{R-\sum p_{ij}^2+(\sum p_{ij})^2\}\geqslant\left[\sum_i\left(\sum_j p_{ij,i}-\sum_j p_{jj,i}\right)^2\right]^2.$$

是否也能将渐近平坦度量连同这个张量 p_{ij} 的集合参数化？参数化这些初始数据集使得策划曲面 (trapped surface) 存在，这也是很重要的. 是否有证明策划曲面存在性的变分方法？ Schoen- 丘成桐 (Comm. Math. Phys., 90(1983) , 575-579) 利用物质稠密性找到了充分条件. 寻找包含引力内容的条件也是重要的.

9.4　Kähler 几何学

52. 试证：维数 ⩾3 的每个紧致殆复流形都容有可积的复结构. 对于 6 维球面，这个问题仍未解决. 一种方法是在殆复结构空间中作一抛物流，以便把殆复结构变形到可积的复结构. 能否利用流形的拓扑不变量给出流形上复结构模空间的分支数的估计？

53. 给定一复流形，我们能否找到一种操作程序来认定它是否允许 Kähler 结构？所有已知的不变量都出自 Hodge 结构. 存在挠不变量吗？若一流形容有两个具相同陈类的复结构且其中一个复结构容有 Kähler-Einstein 度量，则另一个复结构也是 Kähler 结构吗？（注意，若流形不是 Kähler-Einstein 的，则 Hironaka 已经构造了反例.）

54. 代数流形上全纯丛的陈类可用代数闭链来表示. 对于一个容有全纯结构的复向量丛 V，若我们允许取 V 与某平凡丛的直和，这是否是仅真的障碍？为使紧致流形 M 的上同调类表示成与 M 微分同胚的某复流形上全纯向量丛的陈类，其障碍是什么？显然，它们是整数的，并且对某个复结构它们必是 (k,k) 型的. 若我们把全纯向量丛限于由切丛生成的自然丛，则以 (k,k) 型作为障碍当然是不够的. 进一步的准则是什么？例如，一个 (k,k) 型整数类何时是流形上某个复结构的陈类？对于复曲面这与 C_1^2 和 C_2 的分布问题有关.

55. 若紧致复流形 M 可形变到具非正数量曲率的 Kähler-Einstein 流形，则 M 是 Kähler 的吗？一种特殊情况是 K–3 曲面. Todorov 有一个利用周期映射的满射性的想法. 在作者建议利用某种特殊 Hermite 度量的基础上，肖荫堂能够完成对于 K–3 曲面的证明. 也许这些想法的推广能应用于高维情况.

56. 试证：紧致 Kähler 流形能被形变到代数流形. 每个紧致 Kähler 流形能被嵌入到某个（奇异的）能形变到 $\mathbb{CP}^n$ 通用对象中，这可能吗？

57. 紧致复流形的代数维数是亚纯函数域的维数. 当它等于流形的维数 n

时，称该流形为 Moishezon 流形. Moishezon 证明了，经过沿子簇的膨胀变换 (blowing up) 后， Moishezon 流形就变为代数流形. 能否控制这一类子簇？通常是，在 Moishezon 流形上存在同调于零的复闭链. 这是一般现象吗？若代数维数为 $n-1$ ，则 Ueno(Springer Lecture Notes, 439) 证明了，它双有理同构于 Moishezon 流形上的一个椭圆滤子空间. 当代数维数更小时，对应的结论是什么？

58. 固定一复流形 M, M 上具有已给复结构的拟射影结构的模空间是什么？表征那些模空间维数非零的 M. 能确定那些仅与复结构有关的拟射影结构的双有理不变量吗？若我们用 M 上正则的双有理变换把拟射影结构等同起来，则是否能利用这些双有理不变量来确定模空间的分支数？使分支数等于 1 的较好条件是什么？（当 M 的第一陈类为负时，便是这种情况.）对 Kodair 维数较低的 M ，问题更困难. 特别，不知道 C^n 的每个射影紧致化是否是有理的？

存在着关于全纯向量丛的对应问题. 关于拟射影流形上的全纯向量丛，能否找到这样的内蕴条件使它们可扩充到流形的某个紧致化上？若拟射影流形上两代数向量丛彼此双全纯等价，则什么时候它们是代数等价的？著名的 Serre 猜想便是当流形为 C^n 时的特殊情况.

59. 设 M 为紧致复流形. 我们可用那些由全纯向量丛表示的元素构作拓扑向量丛之 K- 群的子群. 这两个群的相关位置似应告诉我们关于 M 上复结构之形变的信息. 当 M 为代数流形时，代数上闭链是子群在陈特征下的像. Hodge 猜想是说，这对应于整型 (p,p) 型闭形式. 在陈特征的映射下，哪类丛表示 (p,p) 型闭形式？

设 M 是代数流形. 令 $K_{a\lg}(M)$ 是 M 上所有代数向量丛的集合对下述等价关系取模（即代数向量丛按下述等价关系的等价类集合. —— 译注）. 所谓两个代数向量丛 V_1 和 $\widetilde{V}_1$ 是等价的，如果存在代数线丛 L_i 和代数向量丛 V_j ，使得 $\oplus(L_i\otimes V_i)$ 代数等价于 $\widetilde{V}_1\oplus V_i$. 在此等价关系下 $K_{a\lg}(M)$ 成为环. 它确定 M 的代数结构到何种程度？

60. 已给一代数流形 M ，在具有正规相交的除子 D 上使其补集为 $K(\pi,1)$ 或容有负曲率完备 Kähler 度量的条件是什么？能利用 (M,D) 的拓扑和 M 的模空间计算补集上拟射影结构的模空间吗？

61. 最近，Looijenga(E. Looijenga, L^2-cohomology of locally symmetric varieties, Comp. Math., 67(1988), 3-20) 和 Saper Stern(L. Saper and M. Stern, L^2-cohomology of arithmetic varieties, Ann. Math., 32(1990), 1-69) 在他们各自独立的工作中解决了著名的 Zucker 猜想. 对于一大类具有限体积的局部对称空间，L^2 上同调被证实是同构于有 Baily-Borel 紧化的空间的相交上同调. 一个具有限体积和非正曲率的完备流形，何时有有限维的 L^2 上同调？在这种情况下能否拢到一个适当的紧化使它的相交上同调为 L^2 上同调？

当流形为 Kähler 时，我们可以有一较好的回答. 也许具有限体积的完备 Kähler-Einstein 流形总有有限维的 L^2 上同调，它同构于一适当紧化的相交上同调. 也许紧化能用多重典则线丛的 L^2 全纯截面（对一切 $p > 0$）的环来描述. 这个环是有限生成的吗？

62. 设 M 是完备 Kähler 流形，它容许一个到同维数 Euclid 空间上一致 Lipschitz 的微分同胚. M 双全纯于复 Euclid 空间吗？这可看作高维 Kähler 流形的一种"抛物"一致化. 我们可用其他模型空间来代替 Euclid 空间. 例如，若用一紧致 Käihler 流形上全纯丛的全空间来代替 Euclid 空间，则我们可问：这 Kähler 流形是否是具相同纤维维数的全纯向量丛？

63. 设 M 是完备 Kähler 流形，它的体积增长不大于同维 Euclid 空间的体积增长. M 上是否存在非平凡的有界全纯函数？关于多项式增长的全纯函数又怎样？它们构成一有限生成的环吗？

64. 设 M 是具零 Ricci 曲率的紧致单连通 Kähler 流形. 是否能把 M 中所有稳定极小的 S^2 进行分类？它们关于 M 上某个复结构是全纯的吗？解决 $\mathbb{R}^n$ 中面积极小化曲面的问题也许也是有兴趣的. Micallef([MM]) 的工作已解决了这个问题的大部分.

65. 证明：一个具正的第一陈类的紧致 Kähler 流形容有 Kähler-Einstein 度量的充要条件是流形在几何不变量理论意义下是稳定的，切丛作为一个丛是稳定的，并且自同构群是可约化的. 至今所知的最有意义的结果属于田刚 (G.Tian, [Tl] 和 [T2]). 虽然自田刚工作之后有若干文章发表，但还未有更好结果. 距离全部都解决这个猜测还有一段距离.

66. 设 M 是具非负第一陈类的 n 维紧致 Kähler 流形. 令 ω 是整 Kähler 类. 是否能用 ω^n 来估计 $c_2 \cup \omega^{n-2}$ 的上界？除非 M 被环面覆盖，否则 $c_2 \cup \omega^{n-2}$

总是正的吗？对于每个维数，是否只存在有限个具非负第一陈类的流形的形变类？若 M 不是被环面覆盖，则 M 中是否总能找到有理曲线？当然 Mori([Mo]) 和 Wilson([Wil]) 的理论对此为我们提供了许多结果.

67. 设 M 是具正全纯截曲率的紧致 Kähler 流形. M 是否是单有理的 (unirational)?M 是否具有负的 Kodaira 维数？ M 是否为代数流形这一点也不大清楚.

如所知，这类流形必是单连通的，因为闭测地线的第二变分公式表明，一条闭曲线总能最短化. 当 M 为曲面时， Hitchin([H]) 证明了这类流形恰好是有理曲面类. 若具正全纯截曲率的紧致流形沿着一个子簇膨胀后得一代数流形，则此代数流形是否仍具有正全纯截曲率的度量？

寻找一个好的充分条件，使代数流形容有一负全纯截曲率的 Kähler 度量，这也是颇感兴趣的.

68. 寻找一般的几何准则，使一个代数流形是单有理的. 例如，怎样的 Fano 流形是单有理的？我们能否找到一个微分几何准则来区分单有理和有理的概念？

69. 设 $\widetilde{M}$ 是一般型紧致代数流形 M 的通用覆盖. 假定 M 具有有限拓扑并且不包含有理曲线. $\widetilde{M}$ 是否双亚纯于某个代数流形 N 的一个子域，使得 M 的覆盖变换群可表示为 N 的双有理变换群的子群？若 M 包含有理曲线，则我们应考察包含一切有理曲线的子簇的补集的通用覆盖. 若 $\widetilde{M}$ 是 C^n 中的有界域且若 $b_1(M)=0$ ，则 M 的模空伺紧致吗？具有 $\pi_i=0$（对于 $i>1$ ）的紧致 Kähler 流形是趋向于刚性的. 能否描述这个刚性？能否把这些流形的 π_1 分类？若 $\varGamma$ 是 Kähler 流形 $\widetilde{M}$ 的等距群的离散子群，使得 $\widetilde{M}\setminus\varGamma$ 是紧致的，则 $\varGamma$ 是否同构于某个紧致 Kähler 流形的基本群？若 $\varGamma$ 保持 Hodge 度量不变且它容有一个具有限指标的无挠子群，则这就是上述的情况.

70. 设 M 是一代数流形，它的切丛是半正定的. 若 M 的 Kodaira 维数为负，则 M 是齐性流形吗？若 M 的 Kodaira 维数为零，则 M 被环面所覆盖吗？当 $\dim M=3$ 时，郑方扬 ([z]) 能够给出一个肯定的回答. Campana 告诉作者，他和 Peternall 可证明同样的论述. (F.Campana and Th. Peternall, Projective manifolds whose tangent bundle are numerically effective, Ann. Math., 289(1991), 169-187.)

71. 设 M 是具正 Ricci 曲率的完备 Kähler 流形. 试证: M 是某个紧致 Kähler 流形的 Zariski 开子集.

72. Kähler 流形能看作辛流形. 辛结构与复结构之间的相互作用应是非常有趣的. 例如, Schoen 和 Wolfson 证明了, 2 维紧致 Kähler 流形中的闭 Lagrange 曲面的面积可在它的同伦类中极小化, 从而得到极小 Lagrange 曲面. 当 Kähler 曲面是具有 Ricci 平坦度量的 K–3 曲面时, 这样的曲面关于 K–3 曲面上的某个复结构必是全纯的. 对于具 Kähler-Einstein 度量的一般 Kähler 曲面, 这是真的吗? 特别, 每个单连通的 Kähler 曲面是否容有一复结构使它支撑一有理曲线?

当两个 Kähler 流形辛微分同胚时, 关于它们的复结构我们能说些什么? 构作一个 4 维辛流形使它不允许 Kähler 结构是颇为费劲的. 使一单连通的辛流形是 Kähler 流形, 除不等式 $3c_2 \geqslant c_1^2$ 外, 其他的拓扑障碍是什么?

73. 能否用代数几何方法表征那些第一陈类可用非正的半定形式来表示的代数流形? 这与下述丰满猜测 (abundance conjecture) 有关: 对于一个"极小"代数流形, 典则线丛的高次幂由整体截面生成 (见 Kawamata, Inv. Math., 79(1985), 567-588), Kawamata 也证明了, 若典则线丛是数值有效的且是大的, 则它的高次倍数没有基点. 这当然是与上述问题有关的. 能否证明: 对于某个仅与维数有关的整数 N, 典则线丛的 N 重将给出一个到射影空间的双有理映射, 如果典则线丛是数值有效的且是大的.

74. 设 M 是 Kodaira 维数为零的 Moishezon 流形. M 是否双有理等价于某个典则线丛平凡的代数流形 (具有适度奇性)? 最近 Kawamata 对三重形 (three fold) 证明了这个论断. 已给一具平凡典则线丛的三重形, 我们能否把相互双有理等价且微分同胚的所有其他的具平凡典则线丛的三重形加以分类?

75. 能否用代数几何表征那些第一陈类可用正的半定形式来表示的代数流形? 若典则线丛是无挠的, 则反典则线丛有非平凡截面吗?

76. 设 M 是第一陈类为零的紧致三维 Kähler 流形. 弦论学家们提出 M 的镜流形的概念. 它被假定为第一陈类为零的另一个紧致三维 Kähler 流形. 然而, Euler 数应是互为反号的. 若一个流形的第二 Betti 系数等于 1, 则存在着另一流形的复结构的模空间来计算这流形中固定次数的有理曲线个数的方法. 能否以数学方式来叙述这些概念并证明某些公式? 显然 M 的环路空间或 S^2 到 M 的映射空间与镜流形中相应的几何有关, M 的模空间显然是镜流形

的 Kähler 锥所定义的管状城与一离散群的商空间. 无论怎样, 还不知道模空间是否是拟射影的.

77. 设 M 是第一陈类和第一 Betti 数均为零的紧致三维代数流形. 能否找到这样的稳定丛, 它是切丛的形变加上平凡线丛, 使得稳定向量丛在任何有理曲线上的限制是非平凡的? 对于流形 M 上使得 $c_1(V)=c_1(M)=0$ 和 $c_2(V)=c_2(M)$ 的秩为 3 的稳定向量丛 V, $|c_3(V)|$ 的最小可能值是什么? 能使 $|c_3(V)|<|c_3(M)|$ 吗? 一般地, 我们想要构造这样的稳定丛 V, 使得 $c_1(V)=0$, $c_2(V)=c_2(M)$ 和 $|c_3(V)|=6$, 并且 V 在任何有理曲线上的限制是非平凡的. 设 μ 是使 $c_1=0$, $c_2=c_2(M)$ 且它在任何有理曲线上的限制为非平凡的稳定丛的模空间. 这些丛在弦论中 ([Wi]) 是特殊的. 关于这个空间, 还能说些什么?

78. 在弦论中, 寻找那些使 $c_1=0$, Euler 数等于 ± 6 且其基本群为非平凡的三重形 (three fold) 是很有用的. 我利用在射影空间乘积中超曲面的完整交上取 Z_3 自由作用, 构造了一个例子以后田刚 ([TY]) 和我再推广到其他情形. 所有这些, 或相互微分同胚, 或用小分解来构造, 或取这些流形的轨道空间来构造. 因此, 这种作法可用来构造成千上万的例子 ([CGT]). 然而, 没有产生使 Euler 数等于 ± 6 且基本群为非平凡的本质性新例子. 看看是否有更多的某种例子, 这也许是有趣的.

79. 为了从分析上理解镜对称性, 寻找如下形式的 Hermite 度量是有兴趣的. 局部上应存在 $(1,0)$ 形式 ω_α 使得 $g_{\alpha,\beta}=\omega_{\alpha,\beta}+\omega_{\beta,\alpha}$, 并且要求 $\sum_j(\Gamma_{ij}^j-\Gamma_{\overline{ij}}^{\overline{j}})=0$. 在紧致复流形上容有这样的 Hermite 度量的条件是什么? 且如何将它们参数化?

80. Donaldson 不变量是在研究紧致四维流形上自对偶联络的模空间时被构造的. 对于代数曲面, 能否用某些易算的代数几何不变量来表达 Donaldson 不变量? 例如, 能否用多重典则环来计算它们? 对于维数大于 2 的复流形, 可以用 Hermite 杨 –Mills 联络代替自对偶联络. 于是可以定义类似的不变量. 关于它们, 我们能说些什么?

81. 设 M_1 和 M_2 是两个具有有界曲率和有限体积的完备 Kähler 流形. 假定 M_1 和 M_2 是相互 (正常) 同伦的. 能否找到 M_1 和 M_2 之间的具有有界能量的同伦等价? 这在研究刚性问题 ([JY]) 中是重要的. 若问题的回答是否定的, 则对那些不支撑这种同伦等价的流形的拓扑进行分类将是有意思的. 对于具有

有限体积的局部对称空间，同样的问题也属未知.

82. 设 M 是完备 Kähler 流形，它是某个紧致流形的 Zariski 开子集. 假定我们要研究能被紧致化的 M 的形变. 能否推广 Kuranishi 理论，用 $H^1(T)$ 中的 L^2 模来表示这些形变. 显然，关于 Kähler 度量需要某些条件. 这些条件是什么？ Y. Kgwamata([K]) 已发展了一种对数形变理论，它涉及理论的代数方面. 然而，在分析方面似乎有更多的工作要做. 一个有趣的例子可描述如下. 设 M 是 Ricci 曲率为零的完备 Kähler 曲面. 令 ω 是 Kähler 形式 Ω 是一全纯 2 形式使得 $\Omega\wedge\overline{\Omega}=\omega\wedge\overline{\omega}.\Omega$, $\overline{\Omega}$ 和 ω 的线性组合将在 M 上定义一个新复结构. 我们如何描述这个复结构？

83. 对于 $\mathbb{CP}^n$ 中的区域，寻找一个判别准则，使它能支撑一个满足下述条件的完备 Kähler 度量： (1) 正的全数量曲率； (2) 正数量曲率； (3) 正 Ricci 曲率； (4) 正全纯曲率： (5) 正的双截曲率； (6) 严格负的 Ricci 曲率； (7) 严格负的全纯截曲率； (8) 严格负的双截曲率. 对于前五种情况，我们想研究区域的补集. 它有小的 Hausdorff 维数吗？它是复子簇之并吗？

84. 有一个漂亮的 Belyi 定理 ([Be]) ，一条代数曲线被定义在 Q 的代数闭包上，当且仅当它能在 P^1 上分枝，最多具有 P^1 中的三个分枝点 (Belyi, G. V., On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. Mathematics of the USSR, 14(1979), 1-3, 247- 257). 能否给出这个定理在高维代数流形的推广？例如，Hermite 对称域的商可以用代数几何表征 (见 [YI]). 能否用代数几何的数据来区分哪些是定义在 $\overline{Q}$ 上的？给出作者下述定理的纯代数几何证明是重要的：球体的商由陈数所表征. （作者也证明，其他的 Hermite 对称域的商也有代数几何的特征. ）这样的证明有希望能挑选出哪些是算术群的商.

85. 给出全纯向量丛 V 容有平坦联络，即由 $\pi_1(M)$ 到 $GL(n,C)$ 的表示所产生丛的代数几何准则. 自然，对一切 i, $c_i=0$ 是必要条件. 若它由 $\pi_1(M)$ 到 $U(n,C)$ 的表示所产生，则根据 Donaldson([D]) ；和 Uhlenbeck-Yau([UY]) 的定理， $c_1=c_2=0$, 且丛的稳定性是充分必要的. 在 V 上设置 Higgs 结构，Simpson([Si]) 已得到了类似的准则. 也应提及 Corlette 的工作 ([Co]). 知道了丛是由基本群的表示所产生的之后，我们能否用代数几何数据来发现表示的特征？射影平坦结构结果变成是非常自然的. 它们出现在弦论中产生的有关问题中. 如何能用代数几何表征它们？若流形是拟射影的，则会发生什么？

86. 已给两个非紧型的局部不可约的 Hermite 对称空间 M_1 和 M_2. 若对每个纤维维数, M_1 和 M_2 上的平坦向量丛的模空间是互相同构的, 则 M_1 同构于 M_2 吗?

87. 若紧致 Hermite 流形的和乐群能约化为 $U(n)$ 的真子群, 则我们关于流形能说些非平凡的东西吗? 问题是联络未必是 Riemann 的. 例如, 若和乐群是离散的, 则流形被一复 Lie 群全纯地覆盖. 从切丛构造出来的全纯丛, 例如切丛与平凡丛的直和等, 对于这种丛上的 Hermite 联络研究同样的问题也是很感兴趣的. 也应允许和乐群是非紧致的.

88. 设 M_t 是圆盘上的紧致代数流形的全纯族, 使得当 $t \neq 0$ 时 M_t 容有 Kähler-Einstein 度量. 当 $t \to 0$ 时 Kähler-Einstein 度量怎样变化? Green 函数和谱怎样变动? Ji([J]) 和 Wolpert([Wo]) 对 Riemann 曲面研究了这个问题. Jorgenson([Jo]) 和 Wentworth([W]) 也研究了当度量是从 Jacobian 诱导出来时的有关问题.

89. 对于作为广义相对论中精确解出现的不少流形(具有奇性)可以"Wick 旋转"([P])其度量来得到非奇异的 Ricci 曲率为零的完备 Riemann 流形. 这是否是一种偶然性, 或是否在这种构造背后有一个有用的原理? 能否从完备 Kähler 流形回归到物理上感兴趣的时空?

90. 设 M^n 是一般型的紧致代数流形, 它能微分同胚于一个非一般型的代数流形吗? 在一般型的紧致代数曲面上, 代数结构的模空间是连通的吗? 哪种类型的基本群可作为一般型代数曲面的基本群出现? Toledo 的最近工作 ([To]) 给出一个基本群不是代数的紧致代数曲面的例子. 能否表征那种拟射影流形: 它是一般型代数曲面的模空间?

91. 设 M 是代数流形, G 是光滑作用在 M 上的有限群. G 是否必保持 M 上某个复结构不变? "特异"作用应是罕见的. 如何描述它们?

92. 设 X 是一紧致的代数簇. X 的哪一部分拓扑是双有理不变的? 假设 D 是任一有效除子, 它是相异不可约的子簇的直和. 由包含关系可知, 在诸 D 的集合上存在一个偏序. 取 $X \setminus D$ 上各种解析对象的极限, 便可定义 X 的双有理不变量. 例如, 可取 $X \setminus D$ 或 $H^i(X \setminus D)$ 的极限. 如何计算它们? 对于群 $\pi_1(X \setminus D)$ 研究它的表示论可能是有趣的. 若 $X \setminus D$ 被具有覆盖变换群 Γ_D 的非紧流形 $\widetilde{X}_D$ 所覆盖, 则我们可研究 $\widetilde{X}_D$ 的作为 Γ_D 模 L^2 上同调 Hodge 群.

我们能否取这些模的极限来给出 X 的双有理不变量？

93. 试把那些包含同构于 $\Omega \setminus \Gamma$ 的 Zariski 开集的紧致复流形进行分类，这里 Ω 是一紧致 Hermite 对称空间中的开区域， Γ 是这空间的双正则变换子群. 一切 ∇II_0 类的曲面大概都以这种方式出现.

我们期望见到一大类维数 $\geqslant 3$ 的非 Kähler 的紧致复流形. 对这些流形，Hodge 理论一般是无效的. 我们能引入哪种类型的解析不变量来研究它们的复结构？在 M^n 上满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-2})=0$ 的 Hermite 度量 ω 似乎对许多有用的解析论证特别有趣. 郑方扬向我指出了：在这些流形上全纯 1 形式必是闭的. 对于这些度量存在性能否找到有用的判别准则？对于非 Kähler 流形，能否找到其和乐群落在 $GL(n,C)$ 中的典则 Hermite 度量或典则联络的一个好的概念？

94. 田刚 ([T3]) 和 Todorov 已经证明：第一陈类为零的紧致 Kähler 流形的形变是无障碍的. 对全纯向量丛存在这种类型的定理吗？对于附加条件的一般型曲面，能否找到类似的定理？例如，若切丛是负的，则模空间将是无障碍的吗？多年前，当作者提出负曲率的紧致 Kähler 流形上复结构的刚性时，作者也提议研究这些流形上全纯切丛的刚性. 利用丛曲率找出使丛为刚性的充分条件，这可能吗？

95. 设 M 是具有丰富典则线丛的紧致代数流形. 作者 ([Y]) 证明了： M 能写成非平凡乘积流形之商，当且仅当 TM 全纯地分裂. 若 M 是一般型的且极小的，则这样的定理看上去亦真. 也许利用函数代数也有这样的定理的表述. 换言之，能否找到使一个函数代数成为子域的非平凡张量积或“挠曲”张量积的某种“线性”表征？进而能否找到这样的一个准则，它是利用代数流形的切丛来判别该代数流形是否是另一流形上的非奇异纤维空间？显然，切丛必是另一丛的全纯子丛的扩张.

若一个具有负的第一陈类的代数流形微分同胚于一个乘积流形，则该代数流形能写成全纯纤维空间吗？

96. 证明：任何同伦于紧致 Hermite 对称流形的代数流形必双全纯于这些流形的纤维积. 若我们只假定流形是 Moishezon，则会怎么样？若流形是三维的，则后一问题的回答是肯定的. （见 Kollar, Survey in differential geometry, 1991, 175 ）

97. （在 Kobayashi 和 Brody 的意义下是双曲的）复几何中许多概念在

Riemann 几何中都有它们的对应. 设 M 是一流形(或单纯复形). 若 M 上存在一度量, 使得不存在 $\mathbb{R}^2$ 到 M 的距离递减的共形调和映射, 则 M 被定义为拓扑双曲的. 由 Sacks-Uhlenbeck 的定理, 易见 M 是 $K(\pi,1)$. 根据 V. Bangert 和 V. Schroder 的最近工作 (Existence of flat tori in analytic manifolds of curvature, Ann. Scient. EC. Norm. Sup., 24(1991), 605-634), 我们也料想: 若具非正曲率的紧致流形在它的基本群中不容有非平凡的 Abel 子群, 则该流形是拓扑双曲的. 已给一个紧致的 $K(\pi,1)$, 在它的基本群中不容有非平凡的 Abel 子群, 那么该流形是拓扑双曲的吗? 若 $K(\pi,1)$ 不是有限维的, 则推广这概念的好方式是什么? (注意, 若流形边界非空, 则我们应要求边界是凸的.)

类似的"测度双曲"是说流形的 Gromov 体积非零. 复流形中一个类似的未解决问题是下列问题: Gromov 体积非零的紧致 n 维流形是拟双曲的吗? 拟双曲性是上述双曲性定义的如下修正: 允许从 $\mathbb{R}^2$ 出发的映射的像是一确定的低维子簇的子集.

数量曲率非负的紧致流形能否是拓扑拟双曲的或拓扑测度双曲的? 如果我们用余维 $\geqslant 3$ 的嵌入球面上的割补术修正流形, 则这些概念如何变化?

98. 设 M^n 是复流形. 取个数最少的从 C^n 到 M^n 的全纯映射使得 M^n 能被这些映射所覆盖, 我们可用这个最小数来定义 M 的一个全纯不变量. 若不能用这些映射覆盖 M^n, 则定义此数为无穷大. 在满全纯映射下这个数递减. 对于有理流形, 能否计算此数? 若在上述定义中我们要求映射是浸入或嵌入, 则会怎么样? 若我们观察 $C^k\,(k<n)$ 到 M^n 的映射, 则我们可以寻找这种不可约全纯映射族的个数.

99. 对于一维 Kähler 流形, Green 函数是一个有力工具, 并且由于 Laplacian 共形不变性, 对于它是相当了解的. 在高维 Kähler 流形, 我们寻找函数 φ 使得 $\omega+\partial\bar{\partial}\varphi\geqslant 0$ 并且 $(\omega+\partial\bar{\partial}\varphi)^n$ 由 delta 函数的某个倍数所给出. 能否利用这个非线性 Green 函数来作出有界全纯函数? 也可通过观察 Laplacian 在 $(n,0)$ 形式上的作用来研究线性 Green 形式.

100. 在 Riemann 几何中, Laplacian 的谱与闭测地线的长度之间有着密切的关系. 对于 Laplacian 在形式上的作用, 是否存在类似的那些公式? 对于 Kähler 几何, 我们想研究 Laplacian 在 (p,q) 形式上作用的类似公式. 极小球面的面积与作用在流形的环路空间上的某类算子的谱有关联吗?

参考文献

[AS] M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, (2) **121**(1985), 429-461.

[B] M. Berger, Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes Riemannians, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262**(1916), 1316-1318.

[Ba] W. Ballman, On the Dirichlet Problem at infinity for manifolds of non-positive curvature, *Forum Math.* **1**(1989), 201 -213.

[Be] G.V. Belyi, On Galois extensions of a maximal, cyclotomic field, *Math. of USSR*, Vol. **14(1-3)**(1979), 247-257.

[C] E. Cartan, Sur les families remarquables d'hypersurfaces isoparametrique dan les espaces spheriques, *Math. Zeit.* **45**(1939), 335-367.

[CGT] P. Candelas. P. Green and T. Hubsch, Connected Calabi-Yau Com pactification in "Strings'88", 155, (ed. by Grates, Preitschopf, and Siegel), World Scientific, Singapore, 1989.

[Ca] H.-D. Cao, Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifold, *Inv. Math.* **81**(1985), 359-372.

[Col] K. Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, *J. Diff. Geom.*, **28**(1988), 361- 382.

[C] S.K. Donaldson, Connections; cohomolog and the intersection forms of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **24**(1986), 275-342.

[DFr] S. Donaldson and R. Friedman, Connected sums of selfdual manifolds and deformations of singular spaces, Nonlinearity **2**(1989), 197-239.

[Do] R. -T. Dong, Ph. D. Thesis, UC San Diego, 1990. *J. Diff. Geom.*, **36**(1992), 493-506.

[DF] H. Donnelly and C. Fefferman, Nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on surface, *J. AMS*, **3**(1990), 333-353.

[FKM] R Ferus, H Karcher and H. Munzner, Cliffordalgebren und neueisoparametrische Hyper flachen, *Math. Z.*, **177**(1981), 479-502.

[F] A. Freire, On the Martin boundary of Riemannian products, *J. Diff. Geom.*, **33**(1991), 215-232.

[Fu] H. Fujimoto, Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces, *J. Diff.*

Geom., **29**(1989), 245-262.

[GY] L.Z. Gao and S. T. Yau, The existence of negatively Ricci curved metrics of three manifolds, *Inv. Math.*, **85**(1986), 637-652.

[G] Gerhard, unpublished.

[HS] R. Hardt and L. Simon, Boundary regularity and embedded solutions for the oriented plateau problem, *Ann . Math.,* **110** (1979), 439-486.

[H] N. Hitchin, On the curvature of rational surfaces, *Diff. Geom. (Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. 27, Part 2, 1973), 65-80.

[HL] W.Y. Hsiang and H. B. Lawson, Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Diff. Geom.*, **5**(1971), 1-38.

[Hu] Huisken, unpublished.

[Ja] P.S. Jang, *J. Math. Phys.*, **141**(1976).

[I] L. Ji, Spectrum degeneration for hyperbolic Riemann surfaces, to appear in *J. Diff. Geom.*

[Jo] Jorgnson, to appear.

[JY] J. Jost and S. T. Yau, The strong rigidity of locally symmetric complex manifolds of rank one finite volume, *Ann. Math.*, **275**(1986), 291-304.

[J] Y. Kawamata, On deformations of compactificable complex manifolds, *Ann. Math.*, **235**(1978), 247-265.

[LT] P. Li and L. F. Tam, Positive harmonic functions on complete manifolds with nonnegative curvature outside a compact set, *Ann. Math.*, **125**(1987), 171-207.

[L] C.S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 213-230.

[Me] W. Meeks, Recent progress on the geometry of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ and on the use of computer graphics as a research tool, *Proc. I.C.M.*, 1986, 551-560.

[MY] W. Meeks and S. T. Yau, The topology of three manifolds and the embedding problems in minimal surface theory, *Ann. Math.*, **112**(1980), 444-484.

[MM] M. J. Micallef and J. D. Moore, Minimal two-sphere and the topology of manifolds with Positive curvature on totally isotropic two-planes, *Ann. Math.*, **127**(1988), 199-227.

[Mo] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, *Ann. Math.*, **116**(1982), 133-176.

[M1] H.F. Munzner, Isoparametrische hyperfachen in spharen, *Ann. Math.*, **251**(1980), 57-71.

[M2] H.F. Munzner, Uber die zerlegung der sphare in Bal bundel II, *Ann. Math.*, **256**(1981), 215-232.

[O] R. Osserman, *A survey of minimal surface*, Van Nostrand Reinihold, New York, 1969.

[OT] H. Ozeki and M. Taketichi, On some types of isoparametrische hyper flachen, *Math. Z.*, **177**(1981), 479-502.

[P] M. Perry, *Gravitational in stantons*, 603-630. Seminar on Differential Geometry (ed, by

S. T. Yau), Princeton Univ. Press, 1982.

[PR] J. Pitts and J. H. Rubinstein, Applications of minimax to minimal surfaces and the topology of 3-manifolds, Mini conference on geometry and PDE, 2 (Canberra, 1986), 137-170. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univer. 12, Austral. Nat. Univ. Canberra, 1987.

[Scl] R. Schoen, Recent progress on non-linear problems in geometry, To appear in Survey in Differential Geometry (published by *J. Diff. Geom.*, 1991)

[SY] R. Schoen and S. T. Yau, The structure of manifolds with positive scalar curvature, *Directions in PDE*, Academic Press, 1987, 235-242.

[Si] C. Simpson, Ph. D. Thesis, Harvard, 1987.

[S1] B. Solomon, The harmonic analysis of cubic isoparametric minimal hypersurfaces I; dimension 3 and 6, *Amer. J. Math.*, **112**(1990), 157-203.

[S2] B. Solomon, On the Gauss map of an area-minimizing hypersurface, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 221-232.

[St] S. Stoltz, to appear in the proceeding of AMS conference in Los Angeles.

[T1] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1 > 0$, *Inv. Math.* , **89**(1987), 225-240.

[T2] G. Tian, On Calabis conjectur for complex surfaces with positive first Chern class, *Inv. Math.* , **101**(1990), 101-172.

[T3] G. Tian, Smoothness of universal deformation space of Compact Calabi-Yau mani- folds and its Peterson-Weil metric, 629-646 *Mathematical Aspects of String Theory* (ed. S. T. Yau), World Scientific, Singapore, 1987.

[TY] G. Tian and S. T. Yau, Three dimensional algebraic manifolds with $a = 0$ and $X = -6$. 543-559, *Mathematical Aspects of String Theory* (ed., S. T. Yau) , World Scientific, Singapore, 1987.

[To] D. Toledo, to appear in the proceeding of AMS conference in Los Angeles.

[U] K. Uhlenbeck, Removable singularities Yang-Mills fields, *Comm. Math. Phys.*, **83**(1982), 911-30

[UY] K.Uhlenbeck and S. T. Yau, On the existence of Hermitran Yang- Mills connections in stable vector bundles, *Comm. pure Appl. Math.*, **39**(1986), 257-293.

[We] H. Wente, Counter example to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.*, **121**(1986)no. 1, 193-243.

[W] R. Wentworth, The asymptotics of the Arakalor-Green's function and Faltings' delta invariant, *Comm. Math. Phys.*, **137**(1991), 427-459.

[Wi] E. Witten, New issues in manifolds of SU (3) holonomy, Princeton, Preprint.

[Wil] P. Wilson, Calabi-Yau manifolds with large Picard number, *Inv. Math.*, **98** (1989), 139-155.

[Wo] S. Wolpert, Spectral limits for hyperbolic surfaces I and II, Preprint, 1990 and 1991.

[X] F. Xavier, The Causs map of a complete non flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, *Ann. Math.* **113**(1981), 211-214.

[Y] S. T. Yau, *Uniformization of geometric structures, Proc. Symp. Pure. Math.*, H. Weyl memorial volume.

[Z] F. Zheng, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1989.

附录 I 几何学的未来发展[1]

校长、院长及各位同学，今天很荣幸能够在这里演讲，尤其今年是交通大学一百年校庆纪念，能到一个比较注重工程的学校来讲数学，表示交通大学也注重理科方面的工作，这是很有意义的．因为基础科学对于工程学有很重要的启发性．今天我讲的题目是林松山教授给我的．但是学术的未来很难猜测，很多有学问的人都曾经得出错误的结论．所以我不作任何猜测，我只能够根据以前的历史来做一些建议．

今天要讲的历史主要是从个人的体验来看．我不是一个历史学家，我讲的很可能是错误的．可是这不重要，因为我想讲的是我从做学问得出来的观念，希望能够以我自己的经验来做一些建议．清华大学和交通大学都曾赠予杨振宁先生荣誉博士，我看过杨先生写的一篇文章，杨先生讲做物理好像画图画一样．我想做几何也跟画图画差不多，不过我们画的图画更广泛一点．物理学家要画的基本上只有一张图画，就是自然界的现象．但是几何学家可以随意去画，我们可以画广告画，画工程学需要的画，也可以画印象派的画和写实的画．广告画可以在商业上有很大的用处，过几年后可能成为收藏的对象．但是由于商业气氛浓厚，一般画家不大愿意认同它们的价值． 广告画或工程画却可能对写实派的画和印象派的画产生相当的影响．不过画印象派的画或山水画，一定要有很深的技术、功力和想法才能画得好．出名的画家往往花很多时间在磨练、猜测，将他的工具不停地推进，在好的气质修养下，才能够画出好的印象派的画或山水画．一般数学家和几何学家也有同样的经验，有意义的工作即使是个很小的观察（ observation ），往往花了数学家很大的精力去找寻．找寻的方法不单是从大自然吸取，也从美学和工程学来吸取．怎样去寻找有意义的工作，跟我们气质的培养有密切的关系．

现在我想谈几何的历史，看看从前，再预测未来．因为我没有想到林松山教授给我这么长的时间，所以会讲长一点．从前我们念中学的时候，念国文、

[1]本文是丘成桐教授 1996 年在台湾交通大学的演讲辞，由林松山整理．

念文学批评，总会说一个时代有一个时代的感慨. 文学上有古文学、有诗经、有汉赋、有唐诗、有宋词，从一个时代去学习一个时代，很少能够学得刚好一样. 我们现在看诗经写得好得不得了，可是我们学不到诗经里面的情怀意念. 时代不同，感慨也不同了. 随着时代的变迁，因为时代不同的需要，我们培养出不同的感情，取舍自然不一样. 数学基本上也是一样，我们可以很羡慕从前大数学家做的工作，可是我们不可能也不一定要跟他们一模一样. 就好像我们现在学苏东坡的诗和词，我们不可能也不需要学得一样，但是我们可以从他的诗词里得到想法，帮助我们去理解大自然，找寻表达自己感情的方法. 从几何来说，我们所要寻找的跟物理学一样，就是真和美这两个观念. 还有一个很重要而容易忽略的动力，是由工程学对数学需求所产生的. 这三个想法推动了几何学的发展.

美的观点在不停地改变，改变的方式跟我们当时认识的自然界有很大的关系. 一、二千年前我们认识的自然界跟现在我们理解的自然界完全不同，所以数学或者几何学不停地受到这个变动的影响. 在几何学来说，美可分为两方面：静态的美和动态的美. 静态的美，譬如一朵花或雅致的山水，我们大致知道怎样准确地去描述它们，甚至将我们的感受表达出来. 如何描述动态的美对我们来说是一个很困难的问题，例如水在流或天在下雪，在不同的时间、空间，事物会产生剧变，这是一个相当美的图画. 可是到目前为止，剧变的研究对理论物理学家、数学家跟几何学家都是一个很大的挑战. 为了对时空作深入的描述，几何学家有不同的研究的路径：有人从物理学的角度去了解，有人从微分方程的角度去了解，这都成为几何学的重要课题.

从古至今大家都讲美，但是没有很客观的标准来决定什么叫美或者不美. 最重要的观念只有一个，就是简洁 simplicity. 这往往是我们审美的一个主要标准. 在做几何、做数学、做物理的研究时，我们都在描述一个很复杂的几何现象. 假如我们没有办法将几何现象用很简洁的语言表达出来的话，我们不算有一个好的定理或者好的文章. 用很简洁的语言来推导和描述繁杂的几何现象，在欧几里得的时代就归纳为用三段论证方法得出的过程. 当时有很多定理，从希腊或埃及早期就发现了很多不同的平面几何现象，但是没有办法有系统地放在一起. 欧氏很重要的贡献，就是能够将定理统一起来，用公理来解释所有当时发现的定理. 例如两点之间可以用惟一的直线连接起来这个事实，可以推导

出很多定理. 追求用简洁的语言来解释复杂的几何现象，是几何学家的目标. 物理学也是一样，物理上很复杂的现象也希望用统一场论来描述. 从前中国也发展了平面几何，可是始终没有办法发展成完美的严格数学理论. 这是中国数学不如西方数学的一个原因. 公理化以后我们才能够统一处理和了解繁复的现象，也因此知道欧氏几何所能解释的只是很简单的理想化的几何现象.

我们在自然界里面发现的现象远比平面几何要复杂得多，阿基米德和牛顿开始用微积分的方法来描述变动的曲线和曲面. 引进了微积分以后，几何学有长足的进步，我们开始知道直线或是圆以外的图形都可以用严格的数学来描述. 牛顿从物理的观点来看质点怎么变动成一条曲线，从而发展了微积分. 几何学家发现描述几何图形非靠微积分不可，几何学从希腊的公理化到牛顿的微积分是一个很大的进步.

古典力学无论在阿基米德，牛顿或是现代，对几何学的影响力都是很深远的. 它引进了变分法的观念，例如我们研究一个简单的问题：两点之间最短的线是直线. 这是平面几何要求的. 可是假如中间有障碍，就不再是一条直线，并且最短的路径并不惟一. 这是简单的变分问题，问两点间最短的线是什么？怎么找这些曲线及它的分布情形，到现在为止还是微分几何的一个有趣问题. 我们知道在圆球上所有的测地线 (geodesic) 都是大圆. 假设我们将圆球变形一下，变成凸曲面 (convex surface)，这问题就变成一个很复杂的数学问题. 它的测地线分布状态并不明显，到目前为止没有办法处理这个问题，只有在简单的椭圆体时可以全部解决这个问题. 古典力学帮忙我们发现很多不同的工具来解释测地线的问题.

到了 20 世纪，我们又发觉古典力学和量子力学有密切的关系. 一个重要的问题问，当普朗克常数趋向于零的时候，古典力学和量子力学中间的关系如何描述，在这方面有很多重要的工作，例如： WKB 的近似方法. 它在几何上产生了有趣的影响. 例如 Hamiltonian Mechanics 里面的 classical path 和光谱的关系，引起了微分几何学家和微分方程学家企图联系 Laplace 算子的谱和测地线长度的工作. 古典力学通过 geodesic，量子力学通过 Laplace 算子得到很多几何现象，如何将它们联系是一个很有趣的几何问题. 我想这方面的研究会有很大的发展. 从古典力学到量子力学，更进一步，就是量子场论，这里有无穷多个质点，相空间变成无穷维空间. 由于在古典的量子力学里，有限维流形上的谱分析

和 classical path 有关，在无限维空间时，我们就期望某种极小曲面和量子场论出现的 partition function 有关系．在这方面，弦理论已经得到相当大的进步．可是物理学家讨论场论的时候，遇到很多困难，起源于无穷维流形算子的谱分析不知如何处理．一个重要例子是 loop space ，这是将给定的流形上的所有封闭曲线放在一起的空间，我们要寻求在它上面的谱分析，这是一个很困难的问题．量子场论还缺乏严格的数学基础．用 Renormalization 的方法，出现很多无穷的 cancellation 问题．在物理上出现的问题在数学上会更为困难．因为物理学家愿意接受直观的证明的观念，而数学家难以接受．可是从量子力学、量子场论推导出来的数学，几何学家往往惊叹他们如魔术般的奇妙直觉（ intuition ）．在有限维空间时，由物理学引起的几何，我们大致上都可以理解和证明．可是在无穷维空间里面，我们发觉古典几何学的直觉与真理有相当远的距离，没有办法将有限维空间的想法简单地推导到无穷维空间几何上去．这十五年来，自从弦理论产生以后，我们惊讶地发觉从物理直觉产生的几何结论往往是正确的．

虽然量子场论本身的基础不够精确，它的物理意义也不见得能够说服所有的物理学家，可是得出来的几何结论即使不能以物理学的思维来严格证明，却意义深厚且往往可以用不同的数学方法来验证．现在举一个例子，这是一个很深奥而古典的问题，已经有一百多年的历史：一个五次方程，它有五个变量，这是中学生都看得懂的方程．我们要解这个方程，我们问一个很简单的问题，假如要求寻找这个方程的函数解，它是可以写成一个参数 t 的有理函数，问这个方程有多少个这样的函数解．这是一个很古典的问题，跟 Fermat 问题很相似．我们的解可以分为不同的类别，我们可以用 t 的阶数来将解分类，一般来说解有无穷个．可是我们可以问阶数等于 1 的时候有多少个解，等于 2 时有多少个解．古典的几何学家算出来阶数等于 1 的时候有 2875 个，等于 2 的时候也可以算出来，等于 3 是近几年才找出来的，我们猜想它有无穷多个解，阶数越大时解可能越多．数学家没有办法解答这个问题，连猜测都没有办法做．这个问题在十年前，用弦理论的镜对称猜测到一个公式，来表达所有解的个数．这个镜对称理论是十年前我的一个博士后研究员和在得克萨斯州的一个教授跟他们的同事们建立的．镜对称没有办法严格地去证明这个公式，当时用古典方法一个一个地去检查，发觉阶数小时公式基本上是对的．可是这种检验不是公式的证明，从量子场论得来的结果一般来说不能当作定理．今年年初这个公式终于

由刘克峰、连帮豪和我、以及俄国数学家 Givental 用数学的方法给出严格的证明. 虽然最后的证明跟路径积分的想法无关, 但是得到这个公式的过程有很大的意义, 因为在量子场论找到这个公式以前, 数学家连怎样找这个公式都不知道. 等到这个公式找出来以后, 我们才有办法从公式本身去着想, 得到它的证明. 我为什么要讲这个问题呢? 因为无穷维空间在物理上有许多直观的想法, 从数学的观点来看, 几乎是不可能接受的. 这种公式往往是从路径积分加上正规化的观念导出来的, 在严格上和直观上数学家都不能够接受, 但却得出正确的答案. 因此, 我们要追究物理学家在量子场论的直观是怎样训练出来的, 我们几何学家缺乏这方面的训练. 近十年来, 从量子场论得出来的重要观念, 解决了很多我们以前没有办法解决的问题, 可以看出古典力学、量子力学、量子场论对几何的影响是很深远的. 我想这个发展会继续下去, 21 世纪的上半叶, 无穷维空间的几何要不断地受到量子场论的影响. 如果单从数学出发, 我们很容易地定义什么叫做无穷维空间上的几何, 可是往往没有办法得出任何有意义的结论. 这是因为几何学家对现代物理的观念搞得不清楚, 而无穷维的几何往往不是古典的直观可以得到的. 所以我们要接受从现代物理或其它自然界供给的观念. 这是一个很重要的交汇, 数学家自以为很漂亮的工具, 往往不能够解决任何问题. 假如物理上的直观可以代表真的话, 这种直观会成为几何学的骨干.

我刚才强调从物理得来的几何观念, 可是我们也应当知道几何或数学本身有它生存和美的意义, 也有生存和美的价值. 我们可以不受到客观世界的影响, 推导很多很漂亮的理论. 只要这个理论漂亮而同时能够解释很多几何上的现象的话, 它一定有存在的意义, 这是我们做数学的人相信的. 举个例子来说, 从牛顿以来, 古典力学对微分几何确有深远的影响. 到了 19 世纪, Gauss 却有一个很重要的发现, 把牛顿以后的微分几何带进一个新的纪元. 这个定理引进所谓内在曲率的观念, 曲率的观念在 Gauss 以前就有了. 自微积分被创立以后, 我们就知道怎么处理二维的曲面, Euler 等很多重要的数学家在这方面有很大的贡献. 曲率测量二维曲面在三维空间里面的扭曲性, 一般来说有两个不同的方向, 一个得出 h, 另一方向得出 k, 它们的乘积 hk 定义为二维空间的 Gauss 曲率. Gauss 重要的贡献是发现 Gauss 曲率只与曲面的本质计量 (intrinsic metric) 有关. 二维曲面变形时, 只要本质计量不变, 它的曲率就不变. 例如圆形柱中

间切一条线以后，张开来变成一个长方形．这个过程并没有改变度量，所以圆柱的曲率为零． Gauss 自己也认为这是一个很重要的发现．发现的过程跟物理或其它的科学没有直接的关系，大概跟测量地形有间接关系．是 Gauss 经过很复杂的微积分计算，发现出来的公式，他发现曲率只跟本质计量有关． Gauss 的公式并不容易看得懂．事实上，用不适当的坐标表达的时候，微分几何的公式可以变成很复杂，但这也是微分几何漂亮的地方，往往在选取好的坐标时可以得到很简单的公式．目前在课堂上就可以很容易将 Gauss 的公式写下来．这是因为我们已经将 Gauss 的想法全部吸收而融会贯通的缘故．有了 Gauss 定理以后才有 Riemann 几何的发展． Riemann 根据 Gauss 的发现，发觉我们可以推导一个全部本质的几何学（ intrinsic geometry ）．我们只要知道两点之间的距离怎么度量，就可以引进曲率的观念，距离可以决定曲率，这是 Riemann 几何一个重大的突破， Riemann 几何要求欧氏几何在一个无穷小的领域上成立，然后推导了曲率及一系列微分几何上主要的观念．

当时 Riemann 创造这个理论，基本上是好奇．因为他希望能够重新解释 Gauss 定理，同时又将 Gauss 公式推导到高维空间去，并解释了几个重要的观念，例如欧氏几何里所谓平行公理的问题．一直到 19 世纪后期，微分度量几何的发展与理论物理关系并不大．当年引进了很多不同的观念都是基于微分几何学家的好奇心．他们发现很多欧氏空间上能够做的事情，都有办法在 Riemann 流形上面做，微分和积分的观念全部可以推导到流形上去，到了 19 世纪末叶他们已经将微分几何推广到抽象而完美的状态，当时的推导是基于公式的简洁和优美． 1915 年， Einstein 引进广义相对论，使 Riemann 几何得到进一步的改变．

Riemann 几何在 Einstein 的广义相对论上有很大的贡献．由于 Einstein 对微分几何不太了解的缘故，刚开始推导出来的方程式是有缺陷的．到数学家跟他合作以后，他才推导出正确的方程，对 Riemann 几何来说，这是一个很大的鼓舞，抽象的想法竟然得到物理学上的重要应用．反过来说，广义相对论成功以后，对于 Riemann 几何的发展产生了很大的刺激，整体微分几何跟广义相对论因此有着密切的关系．在 Riemann 几何本身，我们当然能够找到有意义和漂亮的问题，可是有一些观念，几何学家没法单凭几何直觉得出．到了物理学家要追求一些实际的问题时候，我们才了解它的重要性和解决它的可能性．

十多年前，我跟一个朋友做一个广义相对论上的题目，这是一个好几十年的老问题. 当时几何学家不太懂这个问题，物理学家向我们解释清楚以后，我们才知道，它的特殊情形基本上是一个几何问题. 因此我们对它有很浓厚的兴趣. 我们将它用几何的方法解决以后，才去处理物理学家要求的原始问题，我们从古典几何的观念来看这个问题的一般情形时，我们认为这是不可思议的. 事实上，当我们将这个问题全部解决了以后，一个很有名的几何学家还坚持这不可能是对的，可以见到古典几何的直觉有一定的规限. 反过来说，物理学家也有他们的规限，例如刚才讲这个问题，他们想了很久也没有办法解决，而我们用几何的方法却将它解决了. 所以这是一个互补的情形，有些命题在我们来说几乎是不可能对的，物理学家却极力坚持，认为物理的直观会遇到挑战，所以我们愿意花很大的功夫去了解它. 假设当时物理学家没有极力坚持的话，恐怕我们不可能花这么多时间去考虑它. 以后物理学家引进超引力的观念，简化了上述问题的证明，反过来对几何学有很大的帮助. Einstein 的引力理论给几何注进新的生命，物理学和数学的交流至为重要，这是几何发展的一部分，这条路线会走下去，这是无可置疑的.

未来半个世纪，几何学家会解决从古典广义相对论里面出现的问题，物理学家大概发觉这方面的数学问题有相当的困难性，所以不大愿意做古典广义相对论的理论问题. 他们的兴趣是时空的量子化，这当然是很重要的，它是统一场论的最关键问题：也产生了很多有意义的几何问题，例如熵的定义就是一个有挑战性的命题.

古典的 Einstein 方程是一个很漂亮的方程，产生了很多重要而有意义的几何现象. 其中最重要的是时空的奇异点问题. 这几十年来数学家研究奇异点，在代数几何方面有很长远的进步. 一个很出名的定理是 Hironaka 的 Resolution of singularity，这是三十年前做的，与微分几何不同的地方是代数几何的奇异点是比较容易定义的. 因为代数流形是用一组多项式定义的，流形本身可以定义奇异点. 代数几何学家有很有效的方法来了解奇异点的结构. 另一方面 Mather 和 Arnold 等好几个数学家考虑了所谓平滑奇异点 (smooth singularity) 的问题；不一定由多项式定义，而是由平滑函数（ smooth function ）定义. 他们引进了很多拓扑学的工具. 基本上的方法还是变成多项式的情形来解决. 可是这些方法对于时空的奇异点问题暂时没有帮助.

研究一般性的奇异点，无论在物理上、微分方程上或者几何上，都是基本的问题，这些研究正在萌芽，可是对于真正了解它们还是相差很远．例如在广义相对论里，奇异点没有一个很好的定义．我们知道奇异点是在时空的边界上，与我们现在所看到的 Minkowski 时空是不同的．这是简单的事实，它的局部性质跟一般时空不一样，但我们不了解它们的内在结构，连该问的问题我们都不太清楚，真是一个很困扰的状况．广义相对论的进步，要依靠我们对微分方程的了解．为什么呢？因为古典的广义相对论本身是由 Einstein 方程来决定的．假如我们脱离了 Einstein 方程，得出来的结论只不过是一个抽象的架构，不能够说符合广义相对论的要求．不幸的是 Einstein 方程式是一个很复杂的非线性双曲线方程组．我们对它的了解极为薄弱．我们希望能够从 Einstein 方程得到时空的奇异点观念．当 Cauchy problem 的初始值是光滑的时候，时间向前走，我们要问奇异点是怎样产生的．了解了奇异点产生的机制，我们才能了解奇异点的结构．在广义相对论里，有两个重要的奇异点：一个就是黑洞，一个就是裸的奇异点 (naked singularity)．这两个不同的奇异点有浓厚的物理意义，我们期望从方程上能够了解它们．当初始值光滑时，这两种奇异点如何产生．对一般的光滑初始值，裸奇异点可否出现？这是古典相对论最重要的问题．

一般物理学家研究黑洞时，用几个主要的解来解释它们的特性，这就是 Schwarzs child 的解和 Kerr 的解，可是这两个解不见得有一般性．我们希望从微分方程或者几何的观点来了解这些一般解的性质．例如证明星云毁减时，时空会渐近一些基本解，或者在这些解集合里跳跃，也希望知道这些基本解奇异点的结构．找出奇异点的结构，不单对黑洞本身的了解有重要意义，重力辐射 (gravitation radiation) 的问题也会得到帮助．现在的观察仪器差不多可以观察到重力辐射．可是从观察得到的资料的意义，还不清楚．因为无论从理论上或计算数学上，我们都没有办法从 Einstein 方程里将辐射公式很透彻地了解．这个问题跟奇异点应该有关，在这几十年内希望能有很大的进展．

我们看到的几何现象都会有某种奇异点．我们怎么去分类它？奇异点有不同的类型，一种是人为的，一种是自然的，这两类奇异点我们都要去研究．人为的奇异点在工程计算往往会出现，而自然的奇异点则从物理方程可以推导出来． Einstein 方程里边的奇异点是最困难的问题．规范场的坐标没有选好也可以得出奇异点．

Einstein 方程不单是一个最重要的非线性微分方程，也影响时空的拓扑，对微分几何学家来说是一个挑战，因为奇异点可以将时空的拓扑吸取．一般来说，微分几何从几个背景来建立我们的理论，拓扑结构就是最重要的背景．当奇异点破坏了这个背景时，我们有时会手足无措．

微分几何学家对拓扑学一直都很重视．现在讲最近拓扑学的走向，跟微分几何的关系．微分几何跟拓扑学的密切关系可溯源至 Euler 公式和 Poincare 天文物理的研究．而复分析却是微分拓扑萌芽的一个关键．它在 19 世纪已经有很深入的发展，不过很多自然的复函数有单值化的问题．例如 log 函数在平面上有 branch cut，所以复数分析要处理这个问题．从此处可以引出 monodromy 群对同调群的作用和整体拓扑学的一个发展，其实 monodromy 群可以看作规范场理论的一部分．用 monodromy 群来控制整体几何和代数系统仍然是一个蓬勃的方向，通过群表示理论，它在几何学里起着很大的功用．由复分析理论引出 Riemann 曲面的理论，可以说是近代拓扑的第一块基石，我们开始研究外微分形式的周期问题，例如 $d\log$ 可以在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上定义而且在任何绕零的闭曲线有同样的周期，这影响了 de Rham 定理的发现．拓扑学和复数分析结合起来以后产生了复几何．高维空间复流形和代数几何的发展息息相关，homology 的观念和代数 Cycle 的理论相关而互相辅导，Lefschetz Pencil 和 Morse 理论的发展也是互助的． 20 世纪初期对流体方程和电磁方程的研究，使得几何学家引进了 Hodge 理论，以后的 Yang-Mills 理论源于高能物理方程，却可以看成为非交换的 Hodge 理论．为了解如何处理整体微分几何的问题，Cartan, Whitney 等引进了很多重要的观念，其中纤维束和特征类是其中最重要的．这几个观念影响了 20 世纪整个数学的发展，包括了微分几何、代数几何、代数和数论． Whitney 考虑了 tangent bundle, normal bundle 和一般的 vector bundle 的观念． Vector bundle 在 Whitney 手上变成拓扑学里面一个最重要的工具．他考虑了 classifying space 的观念并研究 Grassmanian 空间及它的同调群，因此引进了特征类．他的乘积公式影响至今． Pontryagin 和陈省身更进一步考虑实数和复数空间的特征类．

Pontryagin Class 和 Chern Class 都可以用曲率表示，它们代表了大范围的拓扑学观念，而曲率是一个局部的观念，这两个观念结合起来以后，我们就可以将局部的微分几何跟大范围的拓扑比较．微分几何从古至今都期望从局部的结构来了解大范围的几何结构，这也是物理学家的期望，他们希望由微小的粒

子理论和微分方程来推导宇宙的结构，可见物理学家跟几何学家有很多共同的想法. 也因此我们都想了解奇异点的局部结构.

决定了流形的结构后，我们要研究它上面的规范场，由不同的 vector bundle 可以得到不同的 Yang-Mills 场. Grothendick 建议将所有 vector bundle 放在一起，然后做简单的等价和加法就得到所谓 K 群的观念，这是几何学很重要的不变量， Atiyah 和 Bott 利用它解决了多个重要的问题，对时空的结构本身有基本的贡献. 通过特征类，我们可以得到由 K 群到同调群的一个很重要的映射，这映射与 Riemann-Roch 定理有密切关系，这定理可以解决代数流形上的存在性问题，它能够计算代数方程的解. 从前 Riemann 与 Roch 在一维情形下首先得到这个公式. 到了 50 年代由于 Sheaf 理论和特征类的发展， Hirzebruch 成功地将它推广到高维空间. 这可以说是本世纪一个伟大的定理.

有了 Riemann-Roch 定理，Atiyah-Singer 将它普遍化成 index theory.Atiyah-Singer 发觉 Riemann-Roch 定理不单在代数流形上成立，同时也可以推广到一般流形上. 事实上这是椭圆微分算子指针的问题. 加上 Bochner 的消灭理论，index 理论可以将椭圆算子的解的个数变成拓扑学上的算法. 这个发展对近代物理，尤其是高能物理里的 anomoly 理论有很大的贡献.

Yang-Mills 理论在物理上有基本性的贡献. 在近代拓扑学上也是举足轻重的. 事实上数学家对规范场论的观念很早就有了. 从 Whitney 发展 vector bundle 理论后，几何学家也考虑其上的联络和曲率，但很奇怪的是他们没有发展 Yang-Mills 理论. Yang-Mills 理论考虑规范场的曲率，将它平方积分然后做变分得到 Yang-Mills 方程. 从前的几何学家对方程的兴趣不大，有些古典几何学家认为只有工程师才会去解方程. 70 年代中叶才将 Atiyah-Singer 的理论用到 Yang-Mills 理论上去，得到长远的进步. 以后最出名的工作当然是 Donaldson 的理论. 以前物理学家只讨论 S^4 上的规范场，问 Yang-Mills 方程的解的维数有多少或者怎样去描述解的样子. 可是很少人问在一般的流形上，我们怎么去解这个方程. Uhlenbeck 首先考虑一般空间上的规范场的性质，而 Taubes 用 Singular perturbation 的方法更证明一个很重要的存在性定理. Donaldson 用了 Taubes 的存在性定理再加上 Atiyah-Singer 的理论，研究四维空间上 Yang-Mills 场的 moduli space，他因此构造了四维拓扑学的不变量. 这是很重要的贡献，他解决了四维空间里一个很重要的拓扑学问题. 这里可以看出来几何学家的走法和物

理学家不一定相同，物理学家当时只想解决 S^4 上面的问题. 可是我们基于好奇心，发展了一套美丽的一般理论，然后解决了拓扑学上重要的问题.

Donaldson 的工作以后， Mrowka 和 Kronheimer 做了重要的贡献. 他们将 Donaldson 的多项式结构搞得很清楚，引起了 Witten 的注意， Witten 企图要从量子场论来解释这个公式. 物理学家对 Donaldson 的不变量一直在注意，可是始终没有办法将它解释得很清楚. 到了 Kronheimer 和 Mrowka 将这个公式搞清楚了以后， Witten 才用路径积分的方法来了解 Donaldson 的不变量究竟在物理上是什么意义. 他与 Seiberg 用 supersymmetric Yang-Mills 的想法，得出所谓 Seiberg-Witten 不变量. 这两年来极为流行，在代数拓扑、微分几何跟代数几何发展里面是一个很重要的工具. 很多 Donaldson 理论没有办法解决的问题，例如 Thom 猜测，却可以用 Seiberg-Witten 的办法解决. Seiberg-Witten 不变量跟原来 Donaldson 的不变量关系密切，但有惊人的简化. Seiberg-Witten 方程是非线性 $U(1)$gauge 方程 coupled with spinor 得来的. Seiberg-Witten 理论的最重要的定理是 Taubes 定理. 他证明 Symplectic 流形的 Pseudo-holomorphic curve 的个数与 Seiberg-Witten 不变量基本等价，这是一个很深入的存在性定理，对四维的 Symplectic 流形有深刻的贡献，解决了很多古老的惟一性问题. 究竟 Taubes 定理在高维空间有没有好的推广仍然悬而未决. 一般来说， Symplectic 空间的自构群是无限维的，所以椭圆形方程方法比较难以应用，但 Taubes 定理指出它的可行性，以后应当有进一步的发展.

很多四维甚至三维空间的问题由 Seiberg-Witten 不变量得到解决. 是不是所有四维的问题都可以由此解决呢？我想差得很远，四维空间的拓扑学实在很复杂，不可能由一两个想法全部解决. 由于复曲面是四维空间最基本的例子，任何四维空间的结构性理论都将与复结构有关，椭圆方程理论应当想办法找出可积的复结构的条件. 这样会给出重要的信息，也将是一个困难的工作. 但可以确信的是，低维空间的几何和拓扑息息相关. 物理学指出八维以下的空间的理论都可能有交汇的地方.

三维空间的问题是一个很基本的问题，我想这里面有一个很重要的工具还没有完全掌握的. 这就是存在性的问题. 微分方程学常问什么时候存在解？事实上在数学发展的历史上，一个主要的突破是找到存在性定理的证明. 我们在四维三维空间的存在性问题还没有完全解决. 我们希望微分方程能够帮忙：椭

圆系统存在性运用于低维的拓扑学上会有宏大的威力. 我猜至少要几十年我们才能够将这些结构全部搞清楚. 但是可以看出微分几何会是物理、方程跟拓扑结合在一起的领域. 从前 Thurston 用 Riemann 曲面和三维拓扑的方法得到一个重要的几何结构存在性的定理, 但他的假设使得他的定理不能概括所有三维拓扑. 二十年前我建议 Hamilton 用他的方程来创造几何结构, 并解决 Thurston 的问题, 由于 Hamilton 顽强的分析能力, 此事已有长足的进步. 希望在未来二十年内, Hamilton 方程能够发挥威力来解决三维甚至四维拓扑的古老问题.

偶数维空间都与复几何有关, 但在四维和八维时有更丰富的几何结构. 它们可以有 sp(1) 和 sp(2) 为和乐群的结构. 而八维时更可以存在 spin(7) 的结构, 在七维空间则可以有 G_2 结构. 它们的 Ricci 度量都等于零, 而它们之间息息相关. 物理学家很重视这些具有超对称的结构, 给我们带进新的观念, 但是微分方程还是主要的工具. 如何证明这些结构的存在性是极为有意义的分析问题, 这些自然的几何结构很有可能具有某些简单的奇异点, 这些奇异点往往有自然的物理和几何意义, 我们一定要解释它在整体空间的地位.

在研究这些结构时, 我们要考虑它的模空间, 一般来说, 有意义的几何结构的模空间是有限维的. 同时在可能的情形下, 保持 Hausdorff 的性质. 在 Geometric invariant theory 的理论中, 引进了结构稳定的观念, 就是为了对付这个问题. 有时为了达到结构的稳定, 我们可能在原来的结构上再加其它新的构造.

二十多年前, 我考虑 Calabi 猜测这个问题, 解决了相当广泛的代数流形上的 Kähler Einstein 度量的存在性问题, 这是重要的几何结构. 当时我应用它得出代数流形的重要拓扑量的不等式, 在差不多同时, 代数几何学家 Bogomolov 和 Miyaoka 利用代数稳定性理论亦可以得出类似的不等式, 所以我开始寻找代数流形稳定性和 Kahler Einstein 度量的关系. 第一个重要的结论是 Donaldson 在代数曲面和 Uhlenbeck 和我在一般复流形上的定理. 在 holomorphic vector bundle 稳定的情形下, 我们证明它有 Hermitian Yang Mills 场, 这是一个很重要的结论, 无论在物理学和代数几何学上都有它的贡献. 以后李骏、郑方阳和我更利用这个定理用来解决一个重要的复曲面的问题. 因此我进一步猜测假如第一陈氏类可用 Kähler 的常数倍来表示, 则 Kähler- Einstein 度量的存在性和流形本身的稳定性等价, 在我的讨论班上, 这是一个主要的讨论项目. 我曾经提出一系列的研究这个问题的方法, 我的研究生例如田刚、罗华章等的博士论

文都与这个问题有关，但这个问题还待深入理解.

我认为几何稳定性理论除了对复几何外，对一般非线性方程亦会有贡献. 我相信非线性微分方程，几何稳定性和几何结构的交汇是一个很基本的问题，在未来的几十年里将会有深入的互动，更可以想象的是它跟物理学上的 renormalization flow 会有密切关系. 当结构稳定后，我们希望将全部结构完成一个紧致空间，因此要引进半稳定结构的观念，而这些结构可以看做模空间的边界，也因此一般来说它们有奇异点，这种自然产生的奇异点是微分几何学里面重要的奇异点，在这些空间上，研究它们的几何结构，规范场和子流形是很有意思的事情，往往经过 singular perturbation 后，我们对原来光滑的几何结构会有更深入的了解.

除了研究几何结构的模空间外，还有规模场、子流形和全纯映像空间的模空间，周炜良在代数子流形模空间上有伟大的贡献. 这些模空间的拓扑和陈氏类都是代数流形的重要不变量. 它们有重要的物理意义，Donaldson 的不变量是从规范场的模空间引出，上述的弦理论在代数几何上的应用是从全纯映像的模空间得出，如何了解这些模空间的拓扑意义是极为重要的. 事实上，Donaldson 理论的一个重要起点在于 Hermitian Yang Mill 和 anti-self-dual connection 的等价性，而后者在一般的四维流形亦可定义，其模空间在 generic 的 Riemann 度量下最为清楚. 代数几何的工具可以计算 Donaldson 不变量. 而后者让 Donaldson 证明它是微分不变量. Donaldson 对这些模空间的了解是他的理论成功的一个原因.

代数几何学里一个最重要的问题乃是 Hodge 猜测. 如何知道一个拓扑同调类可以由代数子流形来表示，这是一个困扰了数学家大半世纪以上的问题，它在数论上亦占一个重要地位，在未来的世纪里它应该得到解决. 与此相关的一个极为重要的问题问：复的 vector bundle 在甚么流形下有全纯结构？及复流形什么时候存在可积的复结构？这都是极为重要的问题. 它们的模空间如何描述？Hodge 结构和 Torelli 定理就是很重要的关键，它在高维空间的推广和在 vector bundle 的意义是值得发展的方向.

弦理论引进了奇妙的对偶观念，我们需要深入地了解其中的几何意义，这些对偶将上述各种几何结构、规范场和子流形漂亮地连结起来而得到出乎意表的结果，我们不可能漠视它们的重要性. 基本上，几何学家应当有宏观的视野，

表面上不同的结构可藏有深入的联系.

算术几何的发展使代数几何开阔了视野，它引进了重要的工具，也渐渐地影响了微分几何的看法，尤其是 Calabi-Yau 流形与算术几何的关系日益密切，弦理论的对偶理论和算术几何的 L 函数的发展应当指日可待.

算术和几何的互动无可避免会考虑 Arakalov 几何和由此引出的微分几何问题. 有限域上的几何可以提供微妙的方法来了解一般代数流形的性质. 在这方面最著名的定理是 Mori 在有理曲线方面的著名工作. 我们希望能够从不同的角度用几何方法来了解 Frobenius action. 最近几年来在 Calabi-Yau 流形上的工作，显示它在算术上的关系将会愈来愈密切. 我们需要一个通盘的考虑，将算术几何、代数几何、微分几何、分析和弦理论的保角场理论结合在 Calabi-Yau 流形上来讨论.

Shimura 流形在算术几何和分析中有很重要的应用，但我们对它的拓扑和种种几何性质了解并不清楚. 我想在这个问题上，高维拓扑的理论会重新发现它的重要性. 举例来说，如何决定一个流形拓扑与 Shimura variety 同胚是一个有趣的问题.

更进一步的问题是，什么时候可以决定一个流形是某些自然结构的模空间. 研究模空间的拓扑性质需要融合几何几个不同领域的学问，它的 intersection cohomology 和 L^2 cohomology 的关系就是一个例子.

微分几何经过种种的融合后将会是多姿多彩的，但是它能否有足够丰富的结构来迎合近代物理时空量子化的需要，这是一个意义深长的问题，有人建议用非交换几何的架构，有人建议碎形几何，让我们拭目以待吧.

开始时，我谈到几何的发展受到应用数学的影响. 在古代测量地形和建造房屋、金字塔的时候很明显地意识到平面和立体几何的重要性，以后 Kepler 对二次曲线和正立体的兴趣更指出天文物理和几何的密切关系.

自从古典力学和工程学得到良好的结合以后，很多自然界的现象，例如水流、湍流、光波散射的种种问题都得到某些认识并引出优美的几何现象，例如 geometric optics 和孤立子 soliton 等理论都是很有意思的问题，近代计算机的进步影响了图论的发展，更引进了很多几何的观念，而 pattern recognition, computer graphics 更是直接的用到几何的方法，例如多维图形的剖分，离散群和格点的分布等等，可以见到几何学家不应忽视工程上的问题.

微分几何确是一门丰富的学问，本文并未概括所有有意义的工作，但已经看出 21 世纪的几何学将会是数学和一般科学的中心.

附录 II　几何与分析回顾 [1]

在本文中，我们将讨论几何学与相关学科中作者认为比较重要的问题.

自从古希腊数学家的时代开始，几何学就被认为是科学的中心. 科学家总是无法抗拒用几何学的语言去解释自然现象. 确实，我们完全有理由把几何对象看作自然界的一部分. 事实上几何学中几乎所有美妙的定理都在经典的或现代的物理学中找到了应用. 为了更好的理解几何学的未来，我们也许有必要回顾一下已知的结论. 当然，我所认为重要的问题也许在他人看来并非如此. 同样的，我们也应该牢记，现在热门的问题也许今后并非如此.

一套理论只有当它的结论能够帮助我们更好的理解几何学的基本结构和内在美感的时候，才能被认为是成功的.

虽然我们要把这个学科分成几个门类来讨论，但是这种分类其实是人为的，因为每个分支的发展都强烈的依赖于其他的分支.

I. 子流形.

经典几何学中的许多非常重要的问题现在仍然没有解决. 描述三维欧氏空间中的曲面已经成为计算机图形学与数据压缩中的重要命题. 同时它们也在现代电影制片中起着重要的作用.

其实，三维空间中的曲面理论是几何学的中心论题. 许多困难的问题至今仍没有解决. 从 Gauss 的时代开始，几何学家就对曲面的内蕴度量结构与它们在外围空间中的外蕴几何性质之间的关系抱有浓厚的兴趣.

A. 曲面的等距嵌入. 一个熟知的问题是刻画曲面上所有可以实现为到三维空间中嵌入的内蕴度量. Minkowski 在这个问题上作了第一个重要的进展，证明了任何凸多面体都是可以实现的 [152]. 对具有正曲率的光滑曲面，由于 Weyl 做出了第一个重要的估计 [221]，所以这个问题被称为 Weyl 问题. H. Lewy 在

---

[1]本文(Reviews of Geometry and Analysis)是丘成桐教授 2000 年 3 月发表于 Asian J. Math. Vol. 4, No. 1, 235-278 的文章，由徐浩翻译，丘成桐校订.

实解析范畴下解决了这个问题 [124]， Pogorelov[169] 和 Nirenberg[162] 解决了光滑的情形.

Weyl 问题能够解决的一个重要的原因是它的解必定是惟一的，这是 Cohn-Vossen 和 Pogorelov 的一个定理. 这里的惟一性是指，曲面的任何等距嵌入都相差一个三维空间中的刚体运动. 这样的整体刚性对非凸曲面而言，如何找出好的定理是困难的. A.D. Alexandrov 研究了下一个最简单的情形，即曲面曲率的正部的积分等于 4π[1]. 他只对实解析度量证明了刚性. Nirenberg 做了一个非常漂亮的尝试来证明光滑的情形 [163]. 我们只要证明曲面上至多存在一条闭的渐近曲线，就可以套用 Nirenberg 的论证. 理解曲面上的渐近曲线仍然是一个显著的问题. 它们在负曲率曲面的整体等距嵌入问题中具有基本的重要性，因为它们是等距嵌入问题的特征曲线. 负曲率曲面的等距嵌入问题是一个非常有趣的双曲问题. 同样地，证明对这类曲面的整体存在性定理是非常困难的. 其实，著名的 Hilbert-Efimov 定理说，一个具有强负曲率的完备曲面不能等距嵌入到三维欧氏空间中 [55].

一个重要的存在性定理是由洪家兴证明的 [98]，他假设了曲率按合适的方式衰减. 一个很有挑战性的问题是，给出 Efimov 定理的一个量化的证明. 也就是说，取一个半径为 r 的测地球，其上的曲率 $\leqslant -1$ 并且在圆心曲率等于 -1. 问使得它可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 并且第二基本形式小于一个给定常数的最大的 r 值.

整体刚性对一般的紧致曲面不成立，不论度量是否是实解析的. 然而，经典几何学中的一个显著的问题是，是否存在 $\mathbb{R}^3$ 中紧曲面的一个非刚体运动的连续族的等距嵌入.

R. Connelly[50] 和 D.Bleecker[15] 对多面体给出了这个刚性猜想的漂亮的反例. 他们的方法似乎不能改进来给出光滑情形的反例. 闭曲面的等距运动存在外蕴的不变量. 很可能只有有限多个这样的不变量，使得等距运动的空间是有限维的. Bleecker 的例子表明这种曲面所包围的体积不是一个不变量. 我们应该能够把这些多面体的例子推广到分段光滑的情形，并且了解这种运动是否是边界的运动造成的.

同样，Cohn-Vossen 发展了闭曲面的无穷小刚性理论 [47]. 其中的方程是线性的，所以更容易处理. 但是只有当曲率为正时才是椭圆型的. 所以对曲率变号的曲面来说，了解这个方程会很困难.

我们知道，对某些闭曲面存在非平凡的一阶等距形变．现在的问题是，怎样刻画这些曲面．这些是关于整体曲面上的混合型方程的自然的惟一性问题．对一般的一簇带负曲率的曲面，应当有无穷多个曲面存在一阶等距变形，有没有办法用微分方程的谱束找到这些曲面．

当然，我们也可以对开曲面问上面的问题． Cartan 证明了每个实解析曲面可以局部等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中 [35]．同样的问题在光滑度量时要困难得多．林长寿的一个重要的定理说，具有非负曲率的光滑曲面可以局部等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中 [140]．他也解决了曲率的梯度不为零的情形 [141]．一个公开的问题是说，是否这个假设可以去掉．这个问题最近由 Nadirashvili 找到了反例．

对带边紧曲面的等距嵌入的边值问题，我们可以有两种不同的表达方法．一种是 Neumann 问题，要求边界的平均曲率等于一个给定的函数 H．(我们要求 $H^2 \geqslant K$．) 当然，我们也可以要求边界曲线的象是某个曲面的子集．另一种是 Dirichlet 问题，要求边界的象是一条给定的 Jordan 曲线．在第一个问题中，如果曲率为正，平均曲率可以是有界的，并且能够保证正则性．后一个问题中，给定曲线的一个重要的必要条件是它的第二基本形式的长度必须控制原来边界的测地曲率．洪家兴已经对这个问题做出了重要的进展 [97]．

对 $\mathbb{R}^3$ 中的无边的闭曲面，它们的内蕴曲率存在许多约束．第一个重要的约束是，曲率在某一点必须为正，并且 $\int_\Sigma K^+ \geqslant 4\pi$，其中 $K^+ = \max(K, 0)$．

Nirenberg[163] 证明如果 $\int_\Sigma K^+ = 4\pi$, 那么集合 $\{K < 0\}$ 的每个分支都包含在两条闭的平面曲线所围的区域中．这个事实给出了可以等距浸入 $\mathbb{R}^3$ 的度量的一个约束．集合 $\{K > 0\}$ 和 $\{K < 0\}$ 的拓扑是否存在一般的约束？

如果 Σ 是嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的，则它的内部是区域 Ω．把 Σ 的谱和 Ω 的谱建立联系应该会很有趣．一个简单的论证表明 Ω 的体积的上界是 $\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Area}(\Sigma)\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$，其中 λ_1 是 Σ 的第一特征值．从这个陈述以及 Korevaar[116] 的工作可以得出 $\frac{\mu_i(\Omega)^{3/2}}{\lambda_i(\Sigma)\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \geqslant C_g > 0$，其中 $\mu_i(\Omega)$ 是 Ω 的第 i 个 Dirichlet 特征值， $\lambda_i(\Sigma)$ 是 Σ 的第 i 个特征值．这里 C_g 是一个只依赖于 Σ 的亏格的常数．什么是 C_g 的最佳值，以及是否存在一个曲面取到这个最佳值？是否集合 $\{\mu_i(\Omega)\}$ 决定了 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 以及反过来？如果曲面 Σ 可以等距嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中，它的谱 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 很可能是有约束的．那么约束条件是什么？我们知道 $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ 的渐近行为是和 Σ 的测地流的动力学性质密切相关的．是否测地流的动力学性质有约束？既然 Σ 不能有处处非

正的曲率，是否闭的嵌入曲面的测地流是非遍历的？如果它是非遍历的，是否可以用外蕴几何描述测地流的不变区域？什么是这个流的熵？是否可以用 $\mathbb{R}^3$ 的坐标描述这些测地线？

B. 几种不同的几何. 我们可以研究曲面在比正交群更大的群作用下保持不变的那些性质. 比如作用在 $\mathbb{R}^3$ 上的特殊线性群，共形变换群和射影变换群. 我们可以问曲面 Σ 在这些群作用下保持不变的性质. 它们分别称为仿射，共形和射影几何. 这些几何中有许多有趣的尚待解决的问题.

仿射几何中重要的不变量是仿射度量与仿射法线. 当曲面的所有仿射法线都汇聚于一点时，称该曲面为仿射球面. 这种曲面已经在 Calabi[23,24], Calabi-Nirenberg[26] 和 Cheng-Yau[39,40] 中做了广泛的研究. 从这些工作，我们知道对任意的凸锥，有一个完备仿射球面和它渐近（例如，曲面 $xyz=1$ 和坐标锥渐近）. 如何有效地构造这样的仿射球面将会是非常有趣的. 是否可以找到一个用全纯函数的表示 (参看 [218]) ？是否可以用闭形式写出这样的球面？多面体锥的情形是特别有趣的. 我们是否可以计算这些情形下的仿射度量？当然，我们可以对高维情形问同样的问题，这和线性优化问题有联系 [110].

到目前为止，大多数进展假定了曲面是凸的. 当曲面具负曲率时会有什么结果？怎么样的仿射球面具有完备的负曲率的诱导度量？

仿射极大曲面的概念是由一个四阶的椭圆方程定义（参看 [25] ）. 我们所以可以固定曲面的边界和沿着边界的法向. 如果我们固定一个三角形的边界，那么是否有一个有效的方法来解这个仿射极大曲面的边值问题？如果我们固定 $\mathbb{R}^3$ 中的一个多面体，我们可以尝试构造一个通过多边形所有棱的 C^1- 曲面，并且该曲面在每一面都是仿射极大的. 在所有这样的 C^1- 曲面中，我们可以试图找出一个具有极大全仿射面积的曲面. 最近， Trudinger 与汪徐家 [214] 解决了仿射极大曲面的 Bernstein 问题. 我们希望今后会有更多关于仿射极大曲面的估计的工作出现.

如同我们在 Cheng-Yau[40] 中所讨论的，$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的仿射球面的仿射度量在经过一个 Legendre 变换以后成为了 $\mathbb{R}^n$ 中一个凸区域的上的射影不变度量. 所以把 $\mathbb{R}^n$ 中曲面的射影不变性质和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的仿射球面的超曲面的仿射性质联系起来会是一个有趣的问题.

我们知道如果 $\mathbb{R}^3$ 中的一个闭曲面是无穷小（度量）刚性的，那么它在射影

变换下的象也是无穷小刚性的. 是否可以在射影或仿射几何中找出好的不变量来解释这个现象？

$\mathbb{R}^3$ 中的代数曲面当然是重要的曲面. 然而，我们对它们几乎一无所知. 现在有一些关于它们的分支数目的信息. 但是它们的几何肯定是特殊的. 脐点的数目，闭测地线的数目，闭渐近线的数目，正曲率区域的拓扑， Laplace 算子的特征值，这些都是和定义曲面的多项式相关的有趣的不变量. 例如，我们希望用这些曲面和直线相交的情形来估计它们的值. 一方面，我们有从代数几何中得到的技巧和信息. 我们可以把曲面复化以得到它们的拓扑和相互间的关联信息. 不幸的是，代数曲面复化并不惟一，如何处理复化是很有意义的问题. 另一方面，我们希望用经典的方法来理解这些曲面的经典几何 - 偏微分方程和来自实射影几何的联系. 在这两种方法间建立沟通将会是非常重要的. 当我们复化这些曲面的时候，大多数情况，我们可以找到一个具有负的数量曲率的 Kähler-Einstein 度量 [207]. 既然这个度量在反全纯对合下是不变的，我们就找到了曲面上的一个典则度量. （典则是指如果有一个代数双射对两个代数曲面和它的复化曲面是双射时，它会是这个典则度量的等距映射. ）实代数簇上的一些定理可以用典则度量来加以证明. 我们如何把这个典则度量和曲面上的诱导欧氏度量联系起来呢？

在复代数几何中，了解一个代数流形上的代数曲线是非常重要的. 实代数曲面上的实代数曲线扮演了什么样的角色？这些曲线的拓扑与几何性质怎样？我们如何用定义曲线的多项式的次数来给出这些曲线的分支数目和测地曲率的上界.

很可能每个闭曲面都可以用次数足够大的实代数曲面来逼近. 什么是逼近一个给定曲面的代数曲面的最小次数？换言之，给一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得和给定曲面的 Hausdorff 距离小于 $\varepsilon > 0$ 的代数曲面的最小次数是多少？是否可以用曲面的合适的可计算的几何量给出一个估计（比如曲面平均曲率和它的微分的 L^2 范数）? 如果我们对次数小于一个给定整数的曲面的平均曲率的 L^2 范数取极小化，那么我们会得到什么样的代数曲面？

实代数曲面提供了很丰富的一类自然奇点. 研究奇点附近的主曲率的行为是非常有意思的. Laplace 算子的特征函数在这些点附近的行为也会是很有趣的.

相反的，如果我们有代数 1 －形式定义了一个（可能奇异的）叶状结构，如何找出闭叶和这些叶的数目的上界将会很有趣．什么时候这些叶是代数的？

C. 极小曲面．文献中研究的有几类重要的曲面．大多数是由变分方法得到的．

第一类主要的是极小曲面．这些曲面的平均曲率为零．当我们给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一条闭曲线，我们寻找边界是这条给定曲线的曲面中面积最小的．我们可以限制这些曲面的拓扑是属于某些类型的．比如，我们可以考虑所有亏格是 g 的曲面．那么面积的极小值 A_g 是一个依赖于亏格的数．一般而言，$A_g \geqslant A_{g+1} \geqslant \cdots$ [149]．当边界曲线是光滑的，Hardt-Simon 的一个著名定理说，对某个 g_0，$A_{g_0} = A_{g_0+1} = \cdots$ [90]．现在还没有有效的方法估计 g_0，这将会是一个有挑战性的问题．

现在还不知道是否 $\mathbb{R}^3$ 中的一条光滑简单闭曲线可以成为无穷多个极小曲面的边界．（如果曲线是实解析的，这种情况不会发生（Tomi[212]）．）是否有一个一般的算法来找到所有以一条给定闭曲线（或一个闭曲线的集合）为边界的极小曲面？计算以给定曲线为边界的非稳定极小曲面仍然是一个困难的问题．（现在也没有很有效的方法来计算面积极小的曲面．）我们不知道以给定的光滑曲线为边界的稳定或非稳定极小曲面的亏格可以有多大．是否可以是任意大？

有关极小曲面的定量行为的许多基本问题现在还没有解决．一个熟知的问题是，等周不等式的最佳常数，即 $\frac{4\pi A}{L^2}$ 的最佳上界是多少，其中 A 是面积，L 是边界的长度．自然地我们会猜测它等于 1．如果边界是一条约当曲线这是已知的（参看 Li-Schoen-Yau[132]）．这个问题和极小曲面的 Sobolev 不等式的最佳常数有关．这个是 L^1 的情形．L^p 的情形也同样有趣．

极小曲面的第一 Neumann 特征值的下界估计和第一 Dirichlet 特征值的上界估计是很有趣的问题．

虽然对于一条闭曲线的存在性问题已经解决了，多个边界分支的情形还所知甚少．同样，当边界是奇异的，只有非常少的结果．

给定 $\mathbb{R}^3$ 中一个同胚于 S^2 的单纯复形的一维骨架，我们可以极小化从 S^2 到 $\mathbb{R}^3$ 的通过这个一维骨架的映射的象的面积，其中象的面积的重数是 1．其中会产生什么样的奇点？比如，对一个同胚于四面体骨架的一维集合来说，是否

可以找到一个同胚于这个骨架上的锥的极小集合.

由于 Meeks,Hoffman,Jorge,Karcher,Rosenberg 和其他一些人的努力（参看 [58,96,148]），$\mathbb{R}^3$ 中完备逆紧极小曲面的拓扑分类已经接近完成. 然而，现在还不清楚如何分类相配的共形结构以及和第二基本形式联系的二次微分形式（虽然在 Collin-Kusner-Meeks-Rosenberg 最近的工作里有了进展 [49]）. 除了分类问题，许多和这些曲面上的分析相关的问题还没有解决.

例如，我们可以问关于 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面上的调和函数的问题. 如果调和函数是正的，是否它在曲面的每个末端渐近于一个常数？如果一个调和函数 U 有至多多项式增长，那么是否存在一个常数 α，使得

$$0 < \overline{\lim}_{|x|\to\infty} \frac{U(x)}{|x|^\alpha} < \infty?$$

这样的 α 组成的集合是不是无穷的，是否渐近于一个整数？对每个 α，这样的调和函数空间是有限维的. 在一个合适的加权 Sobolev 范数下，所有多项式增长的调和函数空间和函数 $|x|^2$ 所生成的函数环应该张成所有多项式增长的函数空间.

一个完备逆紧嵌入的极小曲面上 Laplace 算子的谱应该不会和 $\mathbb{R}^2$ 的情形相差太远. 此外，我们希望知道如何描述连续谱和近似特征函数.

也许研究算子 $-\Delta + \|x\|^2$ 的谱是很有趣的，因为它是离散的. 这应该与 $\|x\|^2$ 的临界点和连接这些临界点的经典道路有关.（经典道路是指那些相对于 Lagrange 函数 $\int |\nabla u|^2 + \int \|x\|^2 u^2$ 临界的道路）.

用共轭极小曲面的构造方法, 很容易构造极小曲面的非平凡连续族. 然而, 这族曲面中只有孤立的成员是嵌入的. 一些经典的嵌入极小曲面的例子, 如 Riemann 楼梯 (staircases) 和 Scherck 塔 (towers)，的确构成曲面族.（参看 Grosse-Brauckmann,Kusner 和 Sullivan[83] 最近的关于裤子形状的常平均曲率曲面的分类）. Kapouleas [108,109] 用奇异扰动方法构造了大量的 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面和常平均曲率曲面，但是构造极小曲面的非平凡连络族仍是很有趣的问题.

大多数完备逆紧浸入的极小曲面都是渐近平坦的. 了解这些曲面上的测地流的动力学性质应该是非常有趣的：测地线何时从无穷远发出？它们是怎么散开的？

我们知道存在逆紧浸入到球中的完备极小曲面. 这些曲面的几何性质怎样？

它们能否是嵌入的？既然曲率一定趋于负无穷，找出这些曲面在末端的精确的渐近行为就非常重要．它们的谱是否是离散的？

D. 闭的极值曲面．$\mathbb{R}^3$ 中最简单的极值闭曲面是指面积取到极值，同时保持内部体积固定．这些曲面具有常平均曲率． Wente 解决了如下的经典问题，证明了存在具有常平均曲率的浸入环面 [220]．虽然有更多的例子被构造出来，具有常平均曲率曲面的分类还远未完成．

Wente 曲面上的曲率线都是平面曲线．了解自相交线的组合结构，曲面上正曲率区域的拓扑及其渐近线都会是有趣的问题．

另一类重要的曲面是相对于泛函 $\int H^2$ 取极值的曲面． Leon Simon[189] 证明了取得整体极小值的环面的存在性，对高亏格曲面的存在性问题也取得了重要进展．计算这种曲面上 $\int H^2$ 的可能值毫无疑问是非常有趣的．这也将解决 Willmore 猜想，即环面上 $\int H^2$ 的整体极小值等于 $2\pi^2$[222].Willmore 问题有一个分段线性的版本（参看 Hsu-Kusner-Sullivan[101] ），但是甚至在这种情况下还不清楚如何保证极小化的存在性．

在一个三维流形上，我们可以将泛函 $\sqrt{A}(1-\frac{1}{16\pi}\int\|H\|^2)$ 极值化，其中 A 是曲面的面积．在相差一个正规化下，这个量被称为曲面的 Hawking 质量 [92]．

E. 曲面的运动．曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中有许多运动方式．我们已经提到了怎样描述曲面的保持内蕴度量的运动这个非常有趣的问题．什么是研究这些运动（模掉欧氏空间的运动）的好途径？如果我们移动曲面的边界，是否紧曲面的运动可以由有限多个参数所决定？如果曲面的曲率可以为负，这是一个困难的问题．

更一般的，是曲面允许度量随着第二基本形式变化的运动．也就是说如果 $X(t)$ 是一族曲面的嵌入，我们要求 $\frac{d}{dt}\langle dX(t), dX(t)\rangle$ 由 $X(t)$ 处的第二基本形式决定的一个对称张量所决定．我们期待这样一族曲面会有怎样的奇异行为呢？由于 Weyl 定理，这个问题在凸曲面情形是适定的．在这样一个运动下保持曲面凸性的条件是什么？

更多的熟知的曲面运动是把速度 $\frac{dX}{dt}$ 和曲面法矢的某个数量倍数相等起来．这个数量可以是曲率，平均曲率或平均曲率的逆加上一个合适的正负号．一套漂亮的理论已经由 Hamilton,Huisken 和其他学者建立起来(参看 [87],[102])．对奇点的完全理解还没有完成（除了 Huisken 和 Sinestrari[104] 在正平均曲率曲面的工作）．在出现奇点后这个流会发生什么情况？

在这些曲面的运动过程中，观察基本的几何量的变化会是非常有意思的. 其中包括第二基本形式，测地线，脐点和曲面的谱等等的行为.

自然运动中创造出的奇点也许是自然界中最普遍的奇点. 或许对简单运动而言，有某个“奇点消解”定理可以帮助我们理解奇点是怎样发展的. 考虑方程的“图”和奇点的一个典型的方法是通过投影或者与平面相交. 是否可以推广这类构造来理解 3 维空间中曲面的运动？例如我们可以考虑曲面和它的切空间在 $\mathbb{R}^3$ 的切向量丛上的移动.

除了用前面方法定义的运动外，还有 3 维空间中曲面的波运动. 当我们观察水滴，表面波，和振动膜的时候，我们会看到漂亮的几何图画. 我们应该如何期望去描述这些图画，虽然我们对支配它们形成的方程还了解得很少？

对振动膜而言，我们熟知波运动可以用膜的特征函数展开来很好的逼近. 如何解释这种逼近？有两个方程和振动膜有关. 一个是 $\frac{dX^2}{dt^2} = -HN$，其中 H 曲面的平均曲率，N 是曲面的法矢. 我们也可以研究平坦 Minkowski 时空中的类时极小超曲面. 在两种情形下，我们对超曲面的整体时间行为了解得很少. 对线性波方程，有明显的具有时间周期的波. 还不清楚这对上面的非线性方程意味着什么.

F. 欧氏空间中曲面的表示. Minkowski 给出了表示 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的第一个系统的方法. 他成功的处理了凸多面体的情形 [152]. 一般而言，Minkowski 的纲领是通过将法矢平移到原点的方法把曲面 Σ 映射到球面 S^2 上（Gauss 映射）. 如果曲面 Σ 是严格凸的，Gauss 映射就是一一的. 因此曲面的所有信息都可以通过 Gauss 映射在 S^2 上表示出来. 其中 Gauss 曲率，特别的，可以写成 S^2 上的一个函数. 著名的 Minkowski 问题是当我们知道 S^2 上的曲率，再生出曲面 Σ. 如果给定的曲率函数是光滑的，那么曲面 Σ 是光滑的. 同时它在至多相差一个平移下也是惟一的. 这些事实是由 Pogorelov[169] 和 Nirenberg[162] 证明的.

有几个重要的问题有待解决. 我们如何用数值方法有效的解决 Minkowski 问题？当我们离散化球面时，很明显离散化要和曲率函数值的分布相适应. 曲率函数值很大的地方，这些点的领域里应该包含更多的节点. 什么是选择这些点的最佳途径？在经典几何的许多应用中，我们需要在 Σ 上积分. 是否可能通过 S^2 的离散化给出 Σ 的一个有效的离散化，使得任意光滑函数的积分可以用这些点处的函数值来最佳的表示出来.

当曲面是凸的，无边界时， Minkowski 问题已经作了很好的研究．可是要去掉凸性或无边界的假设都是困难的．

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一条闭曲线 τ 和一个定义在 S^2 上的正函数 K，什么时候我们可以找到一个以 τ 为边界的凸曲面 Σ, 使得 Σ 的 Gauss 曲率在 Σ 的 Gauss 映射下等于 K. 对于 K 和 τ 有相当多的相容性条件．首先， τ 是某个凸曲面 $\widetilde{\Sigma}$ 的边界．其次， $\frac{1}{K}$ 在 D 上的积分大于以 τ 为边界的曲面面积的极小值．第三， 2π 和 D 的面积之差的绝对值不超过 τ 的第二基本形式长度的积分．了解是否这些是解带有 Dirichlet 边值的 Minkowski 问题的所有的相容性条件将会很有趣．当然可以在要求 $\partial\Sigma$ 在一个给定的闭曲面上的条件下提出类似的问题．

如果曲率允许改变符号，那么 Minkowski 问题甚至对闭曲面也是困难的．很明显曲面上曲率等于零的部分产生了分歧．也许从一开始就应该假定 K 是实解析的． Gauss 映射不再是一一的．结果， Minkowski 数据成了一个集值映射．一般的，曲率函数的值是一个带有阶数的有限集合．阶数是从 S^2 上的点所定义的支撑函数得到的．如果一切都是在适当定义的实解析的条件下，是否这个数据可以决定这个闭曲面？

取 p 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点．考虑所有通过 p 的直线．它们和一个给定的曲面相交，然后按几何光学原理反射．反射可以持续若干次．这样，我们就得到了从以 p 点为圆心的单位球面到曲面上的集合的一个集值映射．

这个映射通过拉回曲面的表面密度，给出了单位球面上的一个密度．对这个密度有何说法？它如何依赖于点 p 的选择？

当曲面是闭的且是凸的，同时 p 在曲面的内部时，我们应该能够回答这个问题．给定 S^2 上的一个密度，我们能否找到一个闭曲面实现之？

类似的，如果我们有一个和曲面不相交的平面，它接收到从 p 点发出经由曲面反射的光线．这样就得到了 L 上的一个密度．了解这个密度可以在多大程度上决定这张曲面是很有意思的．如果曲面是凸的，通过移动 p 或 L 的位置，应该能够得到这张曲面．如果曲面不是凸的，情况又是如何呢？

G. 三维流形中的极小曲面．极小曲面和 $\int H^2$ 的极值曲面是三维流形中最自然的特殊曲面．对 S^3 中的这些曲面进行分类并非不切实际．估计这些曲面上的几何不变量也是非常有趣的．多年以前，作者猜测 S^3 中的嵌入极小曲面的第一特征值等于 2. 虽然这个问题仍未解决， Choi 和 Wang[43] 已经做出了进展．

S^n 中的极小超曲面的 zeta 函数是否有很好的表现？能否找到这些 zeta 函数的算术性质？这些是否和通常的泛函方程类似？ Laplace 算子的行列式应该有特殊值.

考察 S^3 中是否存在非平凡连续族的闭极小曲面会很有意思. 如果这样的族确实存在，那么对每个亏格，都有有限多个 S^3 中的极小曲面. 如何对它们进行分类以及它们的面积是多少？

除了自身的美以外，研究 S^n 中的极小曲面与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中极小子流形的孤立奇点的研究有关系. S^n 中的极小子流形上的锥是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个具有孤立奇点的极小子流形. 所以 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小子流形和 S^n 中的极小子流形之间有密切的关系. S^n 中极小曲面的特征函数和对应的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小子流形上的齐次调和函数有关. 这个共同的次数 α 和 S^n 中的极小曲面的特征值有关. 其实，特征值就是 $\alpha^2 + k\alpha$ ，其中 k 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中子流形的维数. 和这种对应相关的有一些自然的问题. $\mathbb{R}^n$ 中极小子流形上的调和函数空间的维数的估计是 Peter Li[131] 和 Colding-Minicozzi[48] 给出的. 特别的用曲面的面积给出了 S^n 极小子流形的特征值的重数的估值. 当极小子流形是线性的， α 是一个整数. 这可以从调和函数的可去奇点定理得到. 能否用极小曲面的面积给出 α 的一个合理的约束？当 α 很大时，它在一个误差下渐近于一个正整数. 我们如何估计这个误差？当子流形是测地球面时，它的重数很可能最大. 能否证明这个论断？

在 [133] 中， Peter Li 与作者引进了 Riemann 曲面上共形结构的共形面积的概念. 这和 Riemann 曲面的特征值有密切的关系. 一般来说，对闭 Riemann 曲面上的一个给定的共形结构，我们可以对每个共形度量赋一个数 $\lambda_i A$ ，其中 λ_i 是度量的第 i 个特征值， A 是面积. 由 N. Korevaar[16] 的定理，这个数有一个上界，找到一个取到这个上界的极值度量将是非常有意思的. 球面中的许多极小曲面应当会给出这样的极值度量. 能否给出一个精确的关系？

对 S^n 中的一个不包含在任何 S^{n-1} 中的闭极小曲面，这个曲面的第 cn 个特征值是否 $\geqslant 2$ ，其中 c 只依赖于曲面的亏格？是否有可能估计 c ？是否它和亏格无关？特别的， $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一张通过原点的超平面应该把这张曲面切割为至多 cn 个分支.

H. 高维空间中的子流形. 自从 John Nash 在流形 M^n 到 $\mathbb{R}^N$ 的等距嵌入的基本工作以来，对这种嵌入的理解只有很少的进展. M^n 的余维数太高，以

至无法讨论任何有意义的刚性问题.（很大的余维数是为了用拓扑方法帮助证明等距嵌入的存在性）为了使等距嵌入可见，应该找一类可以完全描述其形变的嵌入. 如我们所知，流形 M^n 可以等距嵌入的最小维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$. 然而，对 $n \geqslant 3$，我们不知道任何有意义的关于 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中 M^n 的刚性或等距形变理论.（对 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中的 M^n，有更多已知的刚性定理.）

对足够大的 N，我们可以在所有从给定流形 M^n 到 $\mathbb{R}^N$ 的等距嵌入中，极小化 $\int H^2$. 什么是这个泛函的临界点？

一般来说，一个等距嵌入在 $\mathbb{R}^N$ 中的完备非紧流形 M^n 的平均曲率不是有界的. 如果 Ricci 曲率有下界，那么很可能找到等距嵌入，使得平均曲率是有界的. 什么是使得流形具有有界平均曲率的等距嵌入的最优条件？从 Michael-Simon 定理 [151]，对这些流形满足一个等周不等式.

一个限制更大的问题是，把一个完备非紧流形嵌入到 R^N 中成为极小子流形. 对曲面来说，Weierstrass 表示可以用来刻画这些度量. 当维数大于 2，目前仅知的限制是度量是实解析的，Ricci 曲率是非正的，以及等周不等式和热核上的某些不等式 [38] 成立.（例如，热核在每一点的迹都不超过 $\frac{C_n}{t^{n/2}}$，其中 n 是极小子流形的维数.）可以在某个极小子流形上实现的全体度量构成的空间一定是一个瘦 (thin) 集. 我们应该如何描述它？是否每个非紧流行同胚于一个欧氏空间中的完备极小子流形？是否每个紧流形同胚于一个球面中的极小子流形？当维数大于 3，只知道很少的关于极小子流形的具体例子. 甚至极小图也还没有被分类.

极小图具有这样的性质，它是用极小子流形叶化欧氏空间得到的一片叶子. 相反的，能否分类 $\mathbb{R}^n$ 的所有以极小子流形为叶子的叶状结构？这样的叶子一定是面积极小的. 是否一个余维数为 1 的没有奇点的极小叶化必须由图生成？有许多具有某些奇点的极小叶化. 例如，某片叶子可能是一个极小锥. 分类具有孤立奇点的余维数为 1 的极小叶化将会很有意思.

具有更高余维数的一类很丰富的极小子流形来自复子流形. 实际上，大部分高余维数的极小子流形都是这样构造的，不是把它们和复子簇联系起来，就是从带奇异点的极小子流形用扰动方法得出或是把问题通过作用在欧氏空间上的一个紧群降到更低的维数. 对后面的方法，总是和计算一个奇异度量的测地线有关. 这个奇异度量下的极小曲面值得研究.

欧氏空间中的极小子流形和球面中的极小子流形密切相关. 球面 S^n 中的极小超曲面在 $n \geqslant 4$ 时很难构造. S^n 中的非奇异极小超曲面族是否只有有限多个? 目前还不知道 S^n 中是否有一个非平凡的非奇异嵌入极小超曲面族. 如果余维数是一的超曲面形成的锥是稳定的, Schoen[179] 注意到在这个情况下, 极小超曲面容许一个正数量曲率的共形度量, 这就给 S^n 中极小超曲面的几何与拓扑加上了很强的限制. 我们应该能够分类这些超曲面.

S^n 中的极小超曲面的体积是重要的不变量. 什么是可能值? 作者猜想对嵌入极小超曲面, 第一特征值等于 $n-1$. 这个应该和子流形的体积估计非常有关系. 从 Cheng-Li-yau[38] 的工作, 我们可以构造极小子流形 M^k 的热核的迹的一个上界估计 $c_k \mathrm{Vol}(M^k)t^{-k/2}$. 既然 S^n 的坐标函数给出了 M^k 的特征值为 k 的 $n+1$ 个特征函数, 可以证明当 M^k 不是 S^n 的任何子球面的一个子集时, $\mathrm{Vol}(M^k)$ 有一个下界估计 $c_k^{-1}(\frac{2}{e})^{k/2}(n+1)$.

是否极小子流形 M^K 的体积的值的集合是离散的? 存在一个具有同样体积的极小子流形的连续族. 一个自然的例子是从 $\mathbb{CP}^n$ 或 $\mathbb{HP}^n$ 中的一个子流形上的连续族的 Hopf 纤维化的逆像得到. 还不清楚是否在球面中存在一个连续族的偶数维极小子流形 $M^{2k}, k>1$.

明显的, 处理 Cauchy-Riemann 方程是比较简单的, 因为它们是一阶的椭圆方程组. 对这个方程组, Atiyah-Singer 指标定理可以用来计算解空间的维数. 不幸的是, 极小子流形是由二阶椭圆型方程组定义的, 很难理解它的形变理论. (给定一个极小子流形上的 Jacobi 场, 什么时候可以找到沿着这个场的一族极小子流形的形变?) 有可能存在一类面积极小的子流形, 和某个一阶方程组密切相关.

为了找到这一类特殊流形, 通常我们要求外围流形有特殊的和乐群. 对 Kähler 流形 (和乐群是 $U(n)$), 这个想法追溯到 Wirtinger 不等式. 这个想法就是找一个 L^∞ 范数点点为 1 的闭的 k- 形式. 那么任意的满足 $\omega|_M$ 为体积元的 k 维子流形 M 必定在它的同调类里体积极小. (从 Stokes 定理得出.) 通常对具有特殊和乐群的流形, 可以从和乐群构造出一些特殊的闭形式. 这些形式其实是平行的, 所以有常值的范数. 当外围流形是欧氏空间时, Harvey 和 Lawson[91] 把对应的极小子流形称为校准的 (calibrated). 现在构造这样的子流形仍然很困难, 除了那些从复子簇产生的以外. 一个重要的例子称为特殊 Lagrange 子流形. Kähler

流形 M^{2n} 的一个子流形 L^n 称为是特殊 Lagrange 的，如果 Kähler 形式限制到 L 上是平凡的. 如果 M^{2n} 的和乐群是 $SU(n)$ (Calabi －丘成桐流形)，那么有一个全纯 n- 形式 Ω. 我们可以要求在 L 上 $\mathrm{Im}(\Omega) = 0$ 并且 $\mathrm{Re}\Omega$ 是 L 的体积元. 这样的子流形被 Havey-Lawson 称作特殊 Lagrange 流形. 它们在弦论中被独立的重新发现出来，这是几年前 Becker-Becker-Strominger 的工作 [10]. 他们是想要找到 Calabi －丘成桐 3 维流形中的超对称闭链 (cycle)，即那些保持一半超对称的 3 维闭链.

特殊 Lagrange 子流形的形变理论是由 Mclean 研究的，他证明了这些子流形的 Jacobi 场可以和调和 1- 形式等同起来. 这个碰巧分类了 L 上的平坦 $U(1)$ 联络. 在 Strominger-Yau-Zaslow[195] 的文章中，我们研究了由 L 和 L 上的一个 $U(1)$ 联络一对组成的模空间. 这个模空间有一个自然的复结构和一个很好的 “半平坦” 的 L^2 度量. 这个模空间的复维数是 $b_1(L)$.

当 L 是一个 3 维的环面，模空间就是复 3 维的并且有一个全纯 3- 形式. 基于物理学的推理，我们猜想这个复流形其实是另一个 Calabi －丘成桐流形，和原始流形构成镜像. 特别的，这两个复流形的 Hodge 图表是互为对偶的，并且有理曲线条数的计算可以从它的镜像的周期推出.

基于对镜像的解释，我们可以对“量子”单值群做更进一步的猜测. 例如，我们猜测上面提到的半平坦度量可以通过边界在特殊 Lagrange 环面上全纯圆盘修正到一个非奇异的 Ricci 平坦度量. Hitchin[94], Gross-Wilson[82], Gross[80,81], Barannikov-Kontsevich[8], 和 Fukaya-Oh[59] 在这个猜测上做出了进展.

我们希望在其他具有特殊和乐群 (比如 G_2 或 Spin(7)) 的流形上也可以做类似的构造，这个反过来会让弦论学家很感兴趣.

不幸的是，还没有太多的构造特殊 Lagrange 流形的办法. 他们可以通过研究反全纯对合的不动点集或复的 Lagrange 子流形来得到. 同样， Schoen 和 Wolfson[181] 已经发展了基于特殊 Lagrange 子流形体积极小化性质的一条途径. 另一方面，找到一个类似于扭子 (twistor) 理论的方法来构造这些面积极小的子流形会很有意义.

给定紧流形上的一个丛，使得丛与流形都具有特殊和乐群，我们可以用和乐群的结构来要求丛上的一个联络的曲率是特殊的. (例如，如果这个丛是全纯的，具有平凡第一陈类，以及联络是 Hermitian 的，我们可以要求曲率的迹等于

零.)这些特殊联络的一个序列不一定收敛; 它可能沿着某些极小子簇爆破 (blow up). 一般而言, 这可能是开子簇的一个不可数并集. 在 Hermitian-Yang-Mills 的情形, 爆破集可能是一个整体全纯子簇. 这个程序可能给出用丛理论构造极小子簇的一个办法.

另一类极小子流形的例子是球面中的等参子流形. 它们是通过满足一个过定方程组的函数集合定义的. 如果余维数是 1, 它们的主曲率是常数并且它们提供了一类重要的常数量曲率极小超曲面. 对余维数大于 1, 一个定义要求法丛是 (几何) 平坦的并且主曲率是常数. 所有紧对称空间可以这样实现.

II. 内蕴几何.

一个让人着迷的事实是, 定义在流形的切丛上的非退化二次形可以给出流形的众多整体信息. 到目前为止, 关于正定二次形或 Lorentz 二次形的主要结果都是来自直接的几何直观或时空物理学. 当二次形不是以上两种情形时几乎毫无结果. 在一个复流形上, 发展一些全纯二次形的理论也许是很有趣的. 这些理论都没有获得很大的成功, 部分的是因为我们还不了解和他们相关的不变微分算子. Laplace 算子和波算子有更成熟的历史. 确实, 我们了解正定度量要好过 Lorentz 度量, 部分是因为 Laplace 算子理论已经发展了一整个世纪, 而波方程理论在解的精确定量行为方面只有很少进展.

当我们讨论这些二次形时, 第一个重要的问题是构造出在容许坐标变换下行为良好的量. (有时候流形有一个特殊结构只允许某种类型的坐标变换.) 除非我们是在比较两个不同的结构, 对度量做一次微分不能提供一个不变量. 最重要的不变量出现在当我们对度量作两次微分时. 二次导数在坐标变换下不变的部分构成了曲率张量. 曲率给出的局部信息可以在很大程度上决定流形的全局结构, 至少如果我们自然的假定每条测地线都可以无限延伸. 是否这个假设可以被减弱一些? 例如, 如果我们只假设在所有点, 导致不完备测地线的单位切向量集合是一个零测度的闭集, (或者是一个给定维数的子簇), 是否我们可以实现大部分的全局定理? 也许我们可以加上流形沿着每条不完备测地线的曲率都是有界的这个假设, 并且问这个度量空间的完备化的结构?

A. 全曲率张量的约束. 全曲率张量比度量张量有更多的成分. 所以对于全曲率向量上的假定是一个过定条件. 但是, 还是可以问许多几何直观的问题.

一个自从 Rauch[170],Klingenberg[113], 和 Berger[12] 的时代以来的就非常

热门的研究问题是有关正曲率流形的结构. Toponogov 比较定理 [213] 是这个领域里的重要工具. 下面的基本问题还没有回答：当维数足够大时，拓扑意义下是否存在具有正曲率的非局部对称流形.

在低维时，双重陪集空间的构造给出了许多非局部等距的例子. 它们一般是从同调群的扭元素发现的. 了解是否这些流形的实同调群和局部对称的流形一样将会很有趣. 特别的，一个有趣的问题是是否 Betti 数的总和被同样维数的环面所控制. Gromov 确实给出了一个只依赖于维数的上界 [76].

我们熟知在非负曲率和正曲率度量之间有非常微妙的差别. 著名的 Hopf 问题问是否 $S^2 \times S^2$ 容许一个正曲率度量. 也许我们应该问一个更一般的现象. 如果一个流形 M 容许一个环面 T^k 在其上的局部自由的作用，是否任何非负曲率的度量必须容许一个点 p，使得截曲率在所有切空间的二平面组成的 Grassmann 流形 $G(2, T_p(M))$ 的一个子集 K 上等于零，其中 $\dim(K) \geqslant \dim(G(2, \mathbb{R}^k))$ ？

一个相关的问题是 Gromoll-Meyer 试图在怪球面上构造正曲率度量的工作 [75]. 它们构造了非负曲率的度量，其中截曲率在一个瘦集上等于零.

D. Moore 和 M. Micallef[150] 注意到 Sacks-Uhlenbeck[177] 的著名定理可以用来研究具有正的各向同性曲率（这是说各向同性平面的截曲率为正）的单连通流形的同伦群. 特别的，这就可以推出 Klingenberg 的著名的拼挤定理 [113]，这个定理原来的证明依赖于三角形比较定理. 有趣的是，从变分的论证中可以获得更多信息.

我们还不知道一个具有正曲率算子的流形是否是一个球面，这是很令人尴尬的. Hamilton 用他的 Ricci 流的理论分类了具有正的各向同性曲率的四维流形，并且证明了具有正曲率算子的四维流形是一个球面 [88].

给定一个定义在流形的切丛的二维平面的 Grassmann 流形上的函数，什么时候它成为某个 Riemann 度量的曲率函数？

B. Ricci 张量. 取曲率张量的迹就得到 Ricci 张量. 它和度量张量有相同的类型. 它也从数量曲率的第一变分得到. 这个非凡的事实用来给了广义相对论一个变分的处理方法. 著名的 Einstein 方程是从 Ricci 张量出发，构造一个等于物质张量的无散度的张量. 已经有人试图推广全数量曲率的变分到曲率张量的 L^2 范数的变分. 得到的方程阶数更高，从几何上更难理解. 不过它确实推广了 Einstein 方程，很可能最后会发展成为一套丰富的理论.

当 Ricci 张量是度量张量的常数倍，这个流形就被称为 Einstein 流形．这也许是几何学中最自然和最美妙的一类流形．几何学中最基本的问题是决定哪些流形可以容许 Einstein 度量．如果它们存在，又有多少？这些是有意义并且困难的问题．

当流形的维数大于 5 时，不知道任何存在性的阻碍．也许每个这些维数的流形都存在一个 Einstein 度量．很难断定是否，对一个给定的紧流形，所有 Einstein 度量的模空间有无穷多个连通分支． Einstein 度量的连续族存在，已知的例子与具有特殊和乐群的度量有关．最著名的是来自 Kähler-Einstein 度量．

当维数不大于 4 时， Einstein 流形更具刚性．要求例如（参看 Hitchin[93] ）$\chi(M) \geqslant \frac{3}{2}|\tau(M)|$ ，其中 $\chi(M)$ 和 $\tau(M)$ 分别是流形的欧拉数和指标．也许存在这样一般性的结构定理，每个四维流形都是通过连接 (1)Einstein 流形， (2) 曲面上的曲面丛（也许有类似 Seifert 纤维化的可控制的奇点），和 (3) 三维流形上的圆周丛，都是沿着球面或环面上的圆周丛连接而成．这个可以看作 Thurston 纲领在 4 维情形的推广．

我们希望在三维和四维情形， Hamilton 的方程可以用来证明 Thurston 的双曲化猜想和上面的推广（参看 [89] ）．关键的问题是理解 Hamilton 方程的解发展时奇点的相应变化．

Einstein 方程的解的构造是一个困难的任务．物理学家首先用了对称（群作用）的方法来降低维数．这已经成了一个非常重要的工具．不幸的是，大多数这些解都是局部的并且有奇点．当度量是正定的， Mckenzie Wang,Ziller 等人已经作了系统的研究，并且找到了许多重要的 Einstein 流形（参看 [219] ）．最近 Böhm 发现了 5 到 9 维的球面上的非齐性 Einstein 度量的例子．

对于具有轴向对称并稳定 (stationary) 的四维满足 Einstein 场方程的 Lorentz 度量， Geroch[67] 引入了 Bäcklund 变换，把一个解变到另一个解．这些变换是极度不平凡的．不幸的是大多数理论都是局部的．我们非常希望了解从这些变换构造的度量哪些是完备的．研究 Bäcklund 变换在正定度量下如何操作也是非常有意思的．

其实，在 70 年代， Hawking 和其他学者 [68] 提议了一条途径（称为 Wick 旋转），把 Lorentz 真空解解析延拓到正定的 Einstein 度量．把一个 Einstein 方程解的奇点用 Wick 变换进行修正，是非常了不起的．特别的， Schwarzschild

解变成了 $S^2 \times \mathbb{R}^2$ 上的一个漂亮的非奇异 Ricci 平坦度量. 其上没有 Kähler 结构. 不过 Wick 旋转不是一个良定义的过程, 因为它依赖于局部坐标的一个巧妙选取. 系统的研究 Wick 旋转对 Einstein 方程的作用对物理学和几何学都是非常值得的.

Penrose 的扭子纲领和辛约化的思想在理解超 Kähler 的 Ricci 平坦度量上都是非常有效的 [95]. 这些方法, 和度量的全局理解一样, 都存在同样的问题.

到目前为止, 构造 Einstein 度量最有效的方法是基于 Kähler 几何. 在这个几何中, 度量是 $\sum g_{\alpha\overline{\beta}dz^\alpha\otimes d\overline{z}^\beta}$, Ricci 张量是 $R_{i\overline{j}} = -\frac{\partial^2 \text{logdet}(g_{\alpha\overline{\beta}})}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}$.

正是 Ricci 张量的简洁的表达式使 Calabi 确信构造 Kähler 几何中的 Einstein 度量要简单的多. 如果我们通过 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}$ 形变一个给定度量 $\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}}$, 其中 φ 是一个标量函数, 那么 Einstein 方程 $R_{\alpha\overline{\beta}} = cg_{\alpha\overline{\beta}}$ 可以写成

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}\text{logdet}\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}\right)\\ &= c\left[\overset{\circ}{g}_{i\overline{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right].\end{aligned}$$

如果有一个体积元 $Vdz^1 \wedge \cdots dz^n \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^n$ 使得

$$-\frac{\partial^2 \text{log} V}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} = c\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}},$$

我们也可以把这个方程写成

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\left\{\log\left[\det\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}\right)V^{-1}\right] + c\varphi\right\} = 0.$$

在一个紧流形上, 我们必定可以推出

$$\det\left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}\right) = Ae^{-c\varphi}V,$$

其中 A 是可以被 V 吸收的常数. 体积元 V 的选择成了构造 Kähler-Einstein 度量的非常重要的部分, 特别对非紧流形而言 (参看 [41,207]).

从偏微分方程的观点看, 明显的 $c < 0$ 是如上方程的最简单的情形. 在这个情形下, M 容许一个负常数曲率的 Kähler-Einstein 度量的充要条件是流形 M 的典则线丛是丰富的 [6, 225]. 当 $c = 0$, 假设条件就成为存在一个体积元 V ,

使得 $\frac{\partial^2 \log V}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = 0$. 在这个情形下，每个 Kähler 类都容许一个惟一的 Ricci 曲率为零的 Kähler-Einstein 度量 [225].Ricci 曲率为零的 Kähler 度量空间可以被复结构的模空间和每个这样的复结构的 Kähler 锥参数化.

两个非常重要的 Kähler-Einstein 度量存在性的结果是有关陈数和切丛稳定性的一些关系. 全纯丛的稳定性是 Mumford 用复流形 M^n 的极化定义的 [159].（一个极化是由一个 Kähler 类 $[\omega]$ 给出的.）对每个秩 r 的向量丛 V， V 的相对于 ω 的次数是由 $\deg(V) = c_1(V) \wedge \omega^{n-1}$ 定义的，且 V 的斜率定义为 $\frac{deg(V)}{r}$. 丛 V 称为是 Mumford- 稳定的，如果 V 的任何凝聚子层的斜率都小于 V 的斜率. 验证一个给定丛是否稳定不是件平凡的事情. 注意到取子丛使曲率减少，Lübke[143] 证明一个容许 Kähler-Einstein 度量 ω 的流形的切丛相对于 ω 定义的极化是稳定的. 当数量曲率不为零时，所以，极化不是 $c_1(M)$ 就是 $-c_1(M)$. 在这样的情形下，决定切丛相对于其它的极化是否是稳定的就很有意思.

我们注意到甚至当 ω 不是闭的时候也有稳定性的概念. 既然第一陈形式的定义相差一个 $\partial\bar{\partial}f$，其中 f 是一个整体定义的函数，只要 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$，$\int_M c_1(V) \wedge \omega^{n-1}$ 就是良定义的. Gauduchon[61,62] 研究了具有这个性质的 Hermitian 度量，他证明了方程 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ 总是可以用一个给定的 ω 的共形形变解出来.

就在作者 70 年代中期关于 Kähler-Einstein 度量的工作后不久，作者和其他学者试图找到全纯向量丛上类似的典则度量. 自然的概念是一个 Hermitian 的 Yang-Mills 联络. 考虑向量丛 V 上的 Hermitian 联络. 缩并曲率 F 的两个基本指标，那么 $\mathrm{tr}(F)$ 就成为 V 的自同态. 我们要求 $\mathrm{tr}(F) = cI_V$，其中 c 是一个常数， I_V 是一个恒等自同态.

还有另一个概念， Gieseker 稳定性，从几何不变量理论的角度看也是同样的自然. 一个全纯丛 V 相对于一个正线丛 L 是 Gieseker 稳定的，当且仅当对 V 的任何非平凡凝聚子层 S，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{rank} S} \sum_i (-1)^i \dim H^i(M, S \otimes L^k) \\ &< \frac{1}{\mathrm{rank} V} \sum_i (-1)^i \dim H^i(M, V \otimes L^k) \end{aligned}$$

对足够大的 k 成立.

从 Riemann-Roch 定理，我们知道 $\sum_i (-1)^i \dim H^i(M, S \otimes L^k)$ 是一个关于 k 的多项式给出的，称为 S 相对于 L 的 Hilbert 多项式. Gieseker[69] 与

Maruyama[145] 证明了一个射影曲面上的 Gieseker 稳定向量丛空间构成一个拟射影簇.

为了解释 Gieseker 稳定性是如何产生的，我们注意到存在一个只依赖于 V 的大整数 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，对 $i > 0$ 成立 $H^i(M, V \otimes L^k) = 0$，并且 $V \otimes L^k$ 是由整体截面生成的. 考虑具有固定 Hilbert 多项式的全纯丛 V 的族，使得 $\wedge^r V$ 同构于一个固定的线丛 H.（这里 $r = \text{rank}V$.）令 $W = H^0(M, H \otimes L^{rk})$.

那么从 Riemann-Roch 定理，$\dim H^0(M, V \otimes L^k)$ 是常数且 $H^0(M, V \otimes L^k)$ 可以与一个固定的向量空间等同. 我们有一个自然的同态

$$\bigwedge^r S \longrightarrow W$$

决定了 V 的全纯结构. 群 $SL(S)$ 作用在 $\text{Hom}(\wedge^r S, W)$ 上，得到的商空间，合适的加以定义，就是所有这样的 V 的模空间.

Gieseker 证明了在几何不变量理论的意义下，Gieseker 稳定性等价于这样的 $SL(S)$ 的一个作用.

我以前的学生 Conan Leung[121] 在他的博士论文中考虑了从上的酉联络的空间 U，来解释 Gieseker 的工作. 设 D_A 是丛 V 上的这样一个联络，令 B 与 C 是 U 在 D_A 的切向量. 同样，令 ω 是流形上的 Kähler 形式，且 $k > 0$ 是一个整数. 那么我们定义 U 上的一个如下 2 形式

$$\Omega_k(D_A)(B, C) = \int_M \text{tr}\left[B \wedge e^{(k\omega I_V + \frac{i}{2\pi} R_A)} \wedge C\right]_{\text{sym}} \text{Td}(M)$$

这里 $[\ ]_{\text{sym}}$ 表示形式的分次对称积，R_A 是 D_A 的曲率 2 形式，ω 是 Kähler 形式，I_V 是恒等自同态，及 $\text{Td}(M)$ 是 Todd 类.

当 k 足够大时，$k\omega$ 控制 R_A，且 Ω_k 成为非退化辛形式. 规范群 G 相对于这些辛形式辛作用在 U 上.

力矩映射可以计算出来如下

$$\mu_k : U \longrightarrow (\mathcal{G})^*$$
$$\mu_k(D_A) = \left[e^{k\omega I_V + \frac{i}{2\pi} R_A} \text{Td}(M)\right]^{2n},$$

其中 $(\mathcal{G})$，G 的李代数，可以等同于 M 上的自同态值的最高次形式.

一般来说 $\mu_k^{-1}(0)$ 可能为空. 所以我们选择 ω^n 的一个常数倍, 且力矩映射方程如下给出

$$\left[e^{\frac{i}{2\pi}R_A+k\omega I_V}\mathrm{Td}(M)\right]^{2n}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{rk}(V)}\chi(M,V\otimes L^k)\frac{\omega^n}{n!}I_V$$

这是 Leung 的方程. 他注意到当 $k\to\infty$ 时, 方程就成为 Donaldson-Uhlenbeck-Yau[5] 方程. 他证明了如果 V 不可约, 上述方程对足够大的 k 的一致有界曲率解的存在性就本质上等价于 Gieseker 稳定性.

Todd 类的引入也许对分析本身不是本质的, 虽然它确实给出了引导我们通向 Gieseker 稳定性概念的 Hilbert 多项式. 如果我们把 Todd 类用其他的类代替, 比如 $\hat{A}$ 类, 我们也许可以得到其他的稳定性概念.

如果 V 是流形 M 的切丛且 V 上的背景 Kähler-Einstein 度量是用来定义 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 方程的度量, 我们就得到 Kähler-Einstein 方程. 因此我们可以把 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 方程解释为完全非线性的 Kähler-Einstein 方程的（半）线性化. 既然丛的稳定性是前者方程的存在性标准, 作者很清楚的看到 Kähler-Einstein 度量的存在性会和流形的某种非线性稳定性有关. 所以在八十年代初期, 我提出具有正定第一陈类的代数流形的 Gieseker-Mumford 稳定性应该是 Kähler-Einstein 度量存在性的标准（参看 [227]）. 这个观点最近被田刚重新研究 [204]. 虽然他考虑了一个稍微不同的稳定性概念, 我想我的最初的猜测是正确的.

如果我们设流形上的 Hermitian 度量为 g 且切丛的度量为 h, 那么 g 不一定是 Kähler 的. 然而, 根据我与李骏的工作 [129]（参看 Buchdahl[21] 中的二维情形）, Hermitian-Yang-Mills 方程 $\mathrm{tr}(F(h))=\lambda I$ 在 g 非 Kähler 时仍然有意义. 丛相对于度量 g 的稳定性概念仍然有意义, 只要 $(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-1}=0$, 其中 ω_g 是 g 的相配 (1,1)- 形式. 如果丛相对于 ω_g 是稳定的, 依然可以证明存在一个满足 Hermitian-Yang-Mills 方程的 Hermitian 度量 h. 经过一个 h 的共形变换, 我们得到 $\hat{h}$ 满足条件 $(\partial\overline{\partial}\omega_h)\wedge\omega_h^{n-1}$[61]. 因此如果是切丛, 那么我们就有一个满足 $(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-1}=0$ 的 Hermitian 度量 g 的空间到它自身的映射. 我们忍不住相信这个映射的不动点的存在性和 Kähler-Einstein 度量的存在性有关. 了解是否存在其它的非 Kähler 的不动点会很有意思. 在流形合适的稳定性条件下, 上面

Hermitian 度量空间自映射的迭代可能收敛到一个不动点. Uhlenbeck-Yau[215] 中的论证也许可以加强来得到所需要的估计. 这是一个有价值的方案：它不仅仅提供了 Kähler-Einstein 度量存在性问题的解答，而且可能给出非 Kähler 流形上的典则 Hermitian 度量.

虽然只有有限多个非 Kähler 曲面，很明显高维情形存在更多的非 Kähler 流形. 此外，当我们下面给出更详细解释时，非 Kähler 流形上的典则 Hermitian 度量会在弦论里发挥作用，因为根据 Reid[172] 的一个想法，这种流形可以用来连接所有 Calabi － 丘成桐三维流形的模空间.

用这种丛度量来寻找非 Kähler 曲面上的典则 Hermitian 度量的想法早已被李骏，郑方阳和我 [103] 在给出 Bogomolov 定理 [17] 的第一个全面证明中用到了，即不包含全纯曲线的 VII_0 类曲面是 Inoue 曲面 [105]. 这里一个很重要的观察是全纯曲线的非存在性其实可以帮助我们建立切丛在李骏和我在 [129] 里描述意义下的稳定性. 一个还没有解决的问题是分类包含有限多条全纯曲线的 VII_0 型曲面. 这不禁吸引我们去考虑一个类似的论证可以应用到余切丛，其上具有沿着这些曲线的极点.

对有很多子簇的流形，切丛稳定性的证明不是一件平凡的任务. 特别是对于我们在 [129] 中介绍的稳定性概念.

Roček 在他的收录于镜像对称 I 文集 [173] 的文章中，提出了一类容许 (2,2) 超对称的非 Kähler 流形. 他所加的条件非常强以至于至今无法得出有价值的例子. 一个条件是流形 M 的切丛必须分裂为两个丛 $V_1 \oplus V_2$ ，其中 $\det V_1$ 同构于 $\det^{-1} V_2$. 此外，V_1 和 V_2 要求定义 M 上一个保证叶子是 Kähler 的叶化，即 M 容许一个整体的 Hermitian 度量，当限制到叶子上时是 Kähler 的. 了解这样一类流形的限制到底有多大是很有意思的问题.

当流形容许具有负数量曲率的 Kähler-Einstein 度量，我能够刻画那些被球和其它 Hermitian 对称域单值化的流形 [224, 228]. 前者的刻画只依赖于陈数，而后者依赖于某些丛的非平凡全纯截面的存在性. 陈数刻画已经被广泛的使用. 然而，一个非常有趣的问题还没解决. 也就是，我们怎样从几何上刻画那些由算术群定义的秩一 Hermitian 局部对称流形？我们当然可以用许多 Hecke 对应，不过这些条件不容易验证.

对可以被对称域覆盖的流形找一个拓扑刻画是一个非常有趣和困难的任

务. 在三维流形当然已经有 Thurston 的深入的定理. 自然的我们可以通过假定流形是 Einstein 的来简化问题. 是否有一个 Riemann 几何中的合适的稳定性概念来帮助刻画局部对称流形？直到最近， Besson 等人 [13]， LeBrun[119],Gursky-LeBrun[86]，和 C. Leung[123] 能够在是秩一对称空间的 Einstein 流形的刻画方面做出了进展. 第一项工作是基于重心的概念，后面的工作都依赖于 Seiberg-Witten 不变量且只应用于四维流形. 如我们前面提到的那样，主要的问题是缺少一个深入的 Einstein 流形的存在性定理.

最近， Taubes[198] 证明了一个出色的定理，一个四维流形在经过有限个点处的爆破以后，有一个具有自对偶曲率的度量（即度量的曲率形式在星算子作用下不变）. 这是由一个非常漂亮的奇异摄动的论证得到的. 然而，这种度量的模空间很难控制，它们的存在性的拓扑含义也不明朗. 如果可以应用类似的论证来产生 Einstein 度量将会是很有意义的. 要指出的是， Taubes 的定理产生出许多复三维流形，也就是具有 Taubes 度量的四维流形的扭子空间. 什么是这些三维流形上的典则非 Kähler 的 Hermitian 度量？

现在我们讨论非 Kähler 的 Einstein 度量的几个问题. 对这些度量，负的数量曲率的情形了解得相当多，甚至是非紧 Kähler 流形. 可是，许多问题，特别是和 Arakelov 几何的关系，还需要继续研究.

在复的一维情形，这些度量就是 Poincaré 度量. 可是，一个很难的问题是，用定义射影空间中代数曲线的齐次多项式来给出这个度量的显式的表达式. 这个问题相当于用上半平面给出这条曲线的一个显式的单值化. 我们可以用 Weierstrass $\wp$ 函数单值化 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线. 对某些非紧曲线，可以在 Picard-Fuchs 方程帮助下，通过超几何级数找出单值化. 在他的论文中 [53]， C. Doran 详细的研究了这类方程，他是通过观察一条曲线上的以椭圆曲线或 $K3$ 曲面为本质纤维的纤维空间.

在 1979 年我在普林斯顿提出的一百条几何问题，其中一条是猜测代数流形上的这些度量可以用通过典则线丛高次幂来射影嵌入到射影空间中所诱导的度量来逼近，其目的是想研究 Kähler-Einstein 度量和几何稳定性的关系. 在我的指导下，田刚在他的哈佛论文 [201] 中，用了萧荫堂和丘成桐的 $\overline{\partial}$- 局部化方法 [191]，证明了我的猜想. Zelditch[233] 在最近的文章中用渐近谱分析方法改进了估计. 这种嵌入在 Arekelov 几何中有应用，如张寿武的研究 [234].

一个相关的对象是拟射影流形 $M\backslash D$ 上的完备 Kähler-Einstein 度量，在 1978 年的赫尔辛基数学家大会上我指出在 Ricci 平坦和 Ricci 为负的基本做法以后 [229][230]，在 Ricci 为负时，由郑绍远 - 丘成桐做了研究 [41]，后来是田刚 - 丘成桐 [207] 等等．（这里 M 是代数的，D 是一个正规相交的除子，以及 $K_M \otimes [D] > 0$．）度量在 D 附近的主项已知，应该可以找到度量沿 D 的一个渐近展开．在 Ricci 平坦和非紧的情形，一部分结果由田刚和我在 [208] 写出．

Kähler-Einstein 度量的用途之一是提供了研究复流形的解析工具．给一个射影流形 M，它的万有覆盖是一个非常超越的对象．可是，我们可以抓住它的代数含义．作者在十多年前提出的一个自然的问题是，找一个从 M 的万有覆盖到另一个代数流形 N 的开子集的亚纯映射，使得 M 的覆叠变换可以延拓为 N 的一个双有理变换．虽然这个命题也许对所有射影流形来说太过于乐观，但是它应该不会差得太远．一个重要的问题是，怎样生成具有最慢增长的全纯函数．例如，如果我们想要把 M 的万有覆盖实现为有界区域，我们需要生成有界全纯函数． R. Schoen 与作者的确有一个可以产生覆盖紧流形的流形上有界调和函数的方法 [187]．（对具有强负曲率的流形，这个问题首先由 Sullivan[196] 和 Anderson[2] 做了研究．）另一方面，全纯函数有更强的限制，还没有得到任何处理它们存在性的方法．

在负数量曲率的 Kähler-Einstein 度量理论中， Kähler 类是典则的．在这个情况下，度量是由复结构决定的．因此，任何 Kähler-Einstein 度量的不变量都给出了复结构的内蕴不变量．例如，这种度量产生的 Laplace 算子作用在流形的各种自然丛上．和这些 Laplace 算子的特征值相关的 zeta 函数应该具有和复结构关联的有趣性质．但是，除了 Ray-Singer[171] 引入的全纯扭矩，对这些 zeta 函数所知甚少．用这些关于特征值的信息给出 Kähler-Einstein 流形模空间的一个紧化会很有趣．能否用微分几何方法证明流形上的射影结构族只有有限多个分支？ Catanese-LeBrun[36] 和 Kotschick[117] 的一个有趣的结论说，确实存在两个微分同胚的 Kähler-Einstein 流形的例子，其上的数量曲率具有相反的符号． Seiberg-Witten 理论的一个最主要的成就是证明了对 Kähler 曲面，这是不可能的 [57].

为了理解模空间紧化的问题，一个自然的途径是研究它的 Weil-Petersson 度量．一般来说， Weil-Petersson 度量不是完备的，且有无界曲率．可是，它

的 Ricci 张量在一个紧集外可能是负定的，且它的行为应该反映出模空间上典则 Kähler-Einstein 度量的行为. Kähler-Einstein 度量模空间的具有负数量曲率的 Weil-Petersson 度量和 Kähler-Einstein 度量模空间上的 Ricci 曲率为零的 Weil-Petersson 度量有很大的不同. 在前面的情形，我们很可能期望 Ricci 曲率有一个上界；而在后者情形，Ricci 曲率应该有一个下界. 证明它们具有有限体积应该很有趣. C.-L. Wang[217] 已经理解了 Ricci- 平坦 Kähler 流形模空间上的 Weil-Petersson 度量在模空间的奇点处完备的条件.

能否紧化一个体积有限且 Ricci 曲率有下界的完备 Kähler 流形？许多年前，我倡议了用几何手段紧化具有有限体积的完备流形的纲领.（参看 Siu-Yau[191]）我建议莫毅明 - 钟家庆和我的学生郑方阳研究这个纲领. 虽然这个纲领还没有完成，已经有了很多进展，如 Mok-Zhong[154], Mok[153], Yeung[232], 以及郑方阳与我的未发表的工作.

自从理论物理中的弦论革命以来，Ricci 曲率为零的 Kähler 流形理论（即 Calabi － 丘成桐流形）已经经历了巨大的变化. Candelas,Horowitz,Strominger 和 Witten 的基本文章 [28] 研究了 Kaluza-Klein 模型，其中希望把一个十维时空通过具有非平凡平行转子的紧致六维流形来紧化成一个四维时空. 最后的分析表明，这个紧化是由一个具有复三维的 Calabi － 丘成桐流形给出的. 这篇著名的文章立刻引起了大量的构造这种流形的工作，特别是那些欧拉数等于 ± 6 和具有非平凡的基本群的流形. 刚开始，物理学家认为只有很少的三维 Calabi － 丘成桐流形. 在弦理论的第一次重要会议上 [226]，作者描述了许多构造这种流形的办法，物理学家们非常惊奇地发现至少存在上万个这样的流形. 作者提议通过对加权射影空间中的超曲面作完全交来得到一大类这些流形. 第一个重要的例子是 $\mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^3$ 中的两个三次曲面和一个 $(1,1)$ 次超曲面的完全交. 这个流形的欧拉数等于 -18. 我可以找到一个无不动点地作用在其上的 3 阶群. 那么商流形的欧拉数等于 -6 且具有非平凡的基本群. 田刚与作者 [206] 然后用类似的方法发现了更多的例子. B. Greene 注意到所有这些构造产生出的流形具有相同的拓扑. Greene 和他的合作者甚至讨论了我所构造的流形的现象学含义 [3].

Calabi － 丘成桐流形的第一个一般性理论是 Piatetski-Shapiro 和 Shafarevich 关于二维曲面的研究 [167](Burns-Rapoport[22] 关于 Kähler 流形的情形).

他们发现 $K3$ 曲面的模空间的周期映射是单的．满射的问题很晚以后才由 Kulikov[118] 和 Pinkham-Perrson[166] 做了研究．这两篇文章都是深刻的工作，需要大量的代数工具．

这些定理由于 Todorov 的一个观点得到了彻底的简化 [210]，即应用作者的 Ricci- 平坦度量的存在性定理．关键之处是 Hitchin[93] 观察到，这些度量提供了复结构的一个 S^2 族．这条复结构的有理曲线提供了进入模空间的一条途径．（更严格和详细的讨论由萧荫堂给出 [190]．）我们期望把这些方法推广到高维的 Calabi －丘成桐流形．虽然这个还没有实现， Bogomolov[17] 的关于全纯辛 Kähler 流形的无阻碍性定理已经被 Todorov[211] 推广到了高维 Calabi －丘成桐流形．在同一时间，田刚 [200] 在我的指导下，也达到了 Todorov 的结论．这个基本定理在 Calabi －丘成桐流形的后续发展中扮演了重要的角色．（这个证明无阻碍性的公式的一个类似被 Kontsevich,Fukaya 等人用来构造高阶的乘积，以试图给出镜像对称的代数解释 [8,59]．）

弦论依赖于 Calabi －丘成桐流形模空间上大量的计算．既然局部 Torelli 定理成立，最高维全纯形式的周期就决定了模空间的局部几何．物理学家 Candelas 和田刚 [200] 注意到 Kähler 位势可以写成 $\log\|\Omega\|^2$，其中 Ω 是最高维全纯形式的一个局部全纯族．全纯 n- 形式定义了 n 维上同调类的（平坦）丛的一个子线丛的事实可以用来计算具有额外数据的 Weil-Petersson 几何．这个平坦丛相对于线丛的商描述了复结构的无穷小形变，因此给出了模空间的切丛．

有两个团队研究了这种几何（ Candelas 等 [27] 和 Strominger[194] ）． Strominger 称它为特殊几何（他起初称它限制型的 Kähler 几何，作者建议改名为特殊几何）．特殊几何在后来镜像对称的计算中扮演了很重要的角色．

Gepner[66] 和 Greene-Vafa-Warner[74] 的工作勾勒了怎样给某些 Calabi －丘成桐流形对应上一个共形场论和一个道路积分．不久以后，Dixon[51] 和 Lerche-Vafa-Warner[120] 做了镜像对称的预测，断言对某个 Calabi －丘成桐流形，可以配上另一个 Calabi －丘成桐流形使得当从 M 过渡到镜像 M'，两个三点关联函数（一个和复形变相关，另一个和 Kähler 形变相关）互相映到对方． M 的复形变的关联函数就是 $H^1(T_M)$ 的自然的三重乘积（这个可行，因为 $\wedge^3 T$ 是平凡的）． Kähler 形变的关联函数要复杂得多．除了 $H^1(T_M^*)$ 上经典的拓扑上积 (cup product)，还需要校正由于在有理曲线上积分产生的误差．

B. Greene 与作者在 1990 年的 Berkeley 举办的首届镜像流形会议上，把上面的三重乘积称为量子上积. Vafa 把这个环结构产生的上同调称为量子上同调.

对 $\mathbb{CP}^4$ 中的五次代数簇的重要例子，Greene-Plesser[73] 基于共形场论的论证证明了镜像的存在性. 很快，Candelas 等人 [29] 在镜像存在的基础上，对关联函数做了完全的详细的计算. 把特殊几何的 Kähler 和复的方面等同起来起了非常重要的作用. 这样一个计算是数学上一项惊人的工作. 它依赖于研究满足一个 Picard-Fuchs 方程的全纯三次形式的周期，以及理解和复结构退化相关的单值化. Candelas 等人的工作极大的影响了过去十年的 Calabi - 丘成桐流形的发展. 特别的，他提供了计算五次代数簇上有理曲线数目（需要合理的加以定义）的一个漂亮的公式. 这个公式的存在性在数学文献里没有想到的. 以后的众多数学家的工作导致的进展基本上都是在不同形式下重新解释 Candelas 的公式.

当复形变空间是一维时，Candelas 的计算方法被许多数学家团体所采用. 当形变空间是多维时，计算需要一个新的方法，这是分别由 Hosono-Klemm-Thiesen-Yau[99] 和 Candelas-de la Ossa-Font-Katz-Morrison[30] 独立得到的. 更进一步的推广在 Hosono-Lian-Yau[100] 中. 在前一篇文章中，大量使用了 Frobenius 方法和 Gelfand-Kapranov-Zelevinsky[64,65] 的超几何方程组. Frobenius 方法的形式参数后来被等变几何中的超平面类所代替. 这就给了 Candelas 公式的正确的等变几何解释.

对任意 Kähler 流形讨论量子上同调环的结构是有意义的. 对具有正的第一陈类的流形而言，量子上同调的结合律有时候足以决定瞬子和. 这个结论来自 WDVV 方程，是一群物理学家的工作（参看 [223, 54]）. 对这些流形，数学家可以利用量子上同调的结合律来计算瞬子和. Frobenius 流形概念的提出是为了理解这些计算，同时又导出了齐性流形中曲线计数的公式. 另一方面，以后证明量子上同调的结合律的方法基本上是将物理学家的想法严格化.

这个结合律的第一个严格证明（对半正辛流形而言）是阮勇斌 - 田刚 [175] 给出的. 首先，需要定义瞬子和的含义. 当曲线亏格为零时，阮勇斌 [174] 对辛流形定义了一些特殊的情形. 然后阮勇斌 - 田刚把这个扩展到任意亏格的曲线 [176]. 想法是建立在 Donaldson 的关于它的四维流形的规范不变量的定义基础

上的. 一个基本的构成是伪全纯曲线的紧性论证, 本质上是 Sacks-Uhlenbeck[177] 的工作. Gromov[77] 注意到伪全纯曲线可以用来研究辛流形的刚性. 阮勇斌 - 田刚的关于量子上同调的结合律的定义和证明只在相对于近复结构的一个一般的选择的伪全纯曲线可行. 然而可积近复结构远不是一般的, 所以瞬子和需要重新定义, 如果我们仅仅限制到射影流形.

基于 Sacks-Uhlenbeck[177], Gromov[77], Parker-Wolfson[165] 等人的工作, Kontsevich[115] 定义了从带基点有理曲线到一个射影流形有理映射的模空间的**紧化**. 当这个射影流形是某个齐性空间中的完全交, 就有一种方法可以定义如上紧化空间上的某个阻碍丛. 如果阻碍丛与映射的模空间有相同的秩, 我们可以取丛的欧拉数. 一般来说, 要定义这个欧拉数, 需要用到李骏 - 田刚 [127] 做出的关于虚拟闭链的构造. 对射影超曲面的一个一般选择, 在一个固定拓扑下的曲线数目可以用这些欧拉数来定义. 对 5 次代数簇, 我们得到

$$K_d = \sum_{k|d} n_{d/k} k^{-3},$$

其中 K_d 是欧拉数, $n_{d/k}$ 是有理曲线的期望数目. 这个公式, 称为覆盖公式, 是由 Candelas 等人 [31] 发现的, 并且由 Aspinwall-Morrison[5] 和 Manin[144] 严格验证. 数 n_i 是一个射影不变量, 应该和上面提到的辛不变量有不同的称谓. 一个自然的名称应该是 Schubert 不变量, 来纪念 Schubert 在一个世纪前做的基础性工作.

Candelas 的五次三维簇的公式是如下的关于 T 形式幂级数方程:

$$\frac{5T^3}{6} + \sum_{d>0} K_d e^{dT} = \frac{5}{2}\left(\frac{f_1}{f_0}\frac{f_2}{f_0} - \frac{f_3}{f_0}\right),$$

其中 $T = \frac{f_1}{f_0}$, K_d 是如上的欧拉数, 且对 $i = 0, 1, 2, 3$,

$$f_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{d}{dH}\right)^i\Big|_{H=0} \sum_{d\geqslant 0} e^{d(t+H)} \frac{\prod_{m=1}^{5d}(5H+m)}{\prod_{m=1}^{d}(H+m)^5}.$$

其中 f_i 构成了 $L(f) = 0$ 的解空间的一组基, 其中 L 是如下的超几何微分算子

$$L = \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 5e^t\left(5\frac{d}{dt}+1\right)\cdots\left(5\frac{d}{dt}+4\right).$$

许多人认真地试图证明这个公式. Witten[223] 定义了线性 σ 模型, Plesser-Morrison[157] 试图（未成功）用这个概念证明 Candelas 的公式. 不过, 他们确实表明了线性 σ 模型的重要性. 不久以后, Kontsevich 努力试图用 Atiyah-Bott 局部化方法来证明 Candelas 公式 [115]. 虽然他成功计算了 5 次代数簇的次数为 4 的不变量, 他的表达式过于复杂, 以至无法一般性的实现. 很重要的一点是注意到上面的 H 在 Frobenius 方法中（参看 [99] ）解释为等变超平面类. 接着 Kontsevich 的工作, Givental[70] 做了另一个尝试, 用到了 Witten 等人的想法和引进了量子微分方程(这些就是决定某个典则定义的联络的平坦截面的方程). 可是他的证明还不完全. 最后, 基于 Witten,Kontsevich,Li-Tian 的工作以及一些关于欧拉数据概念的新想法, Lian-Liu-Yau[134] 在 1997 年给出了 Candelas 公式的第一个完整的证明. [134] 发表后六个月左右, 两项试图完成 Givental 纲领的工作出现了. 第一篇是 Procesi 等人 [14] 而另一篇是 Pandharipande[164]. 第一篇文章没有宣称证明 Candelas 公式的最终形式, 第二篇文章用了 Lian-Liu-Yau 的一些想法.

虽然 Lian-Liu-Yau 的工作没有给出镜像流形的一个构造, 但也确实提出了许多有趣的数学问题. 应该把这个理论解释成代数流形的映射空间 σ 模型上的示性类理论或 K- 理论. 这种 σ 模型的一个优点是它们允许我们把映射限制到从一个固定拓扑的曲线出发, 从而得到一个有限维的映射空间.

Lian-Liu-Yau 理论中的一个重要问题是: 给定一个代数流形 M 上的一个代数丛 V , 以及从亏格为 g 的曲线到 M 的具有同调类 $k \in H^2(C, f^*V)$ 的全体映射 $\mathcal{M}(g,k)$ 的稳定模空间, 我们可以构造 $\mathcal{M}(g,k)$ 上的一个虚拟丛 $\widetilde{V}$, 方法是通过观察 $H^0(C,f^*V) - H^1(C,f^*V)$, 其中 $f: C \to M$ 是 $\mathcal{M}(g,k)$ 中的一个映射. 给定一个示性类的理论, 也就是从全纯向量丛环到同调类的一个映射 b(可以改进到代数闭链) , 我们可以考虑 $b(\widetilde{V})$, 以及和 $b(\widetilde{V})$ 相关的几个数. 例如, 我们可以在 Li-Tian 类 [127]（ Li-Tian 定义为一个虚拟模空间闭链, 后来被 Behrend-Fantechi[11] 用不同的方法加以理解）上估计 $b(\widetilde{V})$ 的值, 或者我们可以考虑 $b(\widetilde{V})$ 和 $\mathcal{M}(g,k)$ 上的 tautological 线丛的陈类的乘积, 然后在 Li-Tian 闭链上估计这个乘积的值. Lian-Liu-Yau 的方法可以对很大一类丛 V 和 M 计算这些数. 这些类特别的包含了, 例如, 环面簇或气球流形上的凸的和凹的丛. $b(\widetilde{V})$ 的计算可以看作是代数流形的 σ 模型上的 K- 理论.

在尽可能一般性的情况下实现 Lian-Liu-Yau 的计算是很重要的. 同样重要的是解释计算所得数值的几何含义. 当 b 是欧拉类而 $H^1(C, f^*V) = 0$ 时, 这个数解释为与亏格为 g 的曲线计数有关. 这就是我们计算 $\mathbb{CP}^4$ 中的一个一般 5 次代数簇上的有理曲线数目的方法. 在那个情况下, 取 V 为 $\mathbb{CP}^4$ 上的线丛 $\mathcal{O}(5)$. 当 V 是 $\mathbb{CP}^2$ 上的 $\mathcal{O}(-3)$ ，我们其实是在处理“局部镜像对称”中出现的数, 也就是 $\mathbb{CP}^2$ 中的嵌入到某个 Calabi –丘成桐流形成为超曲面的那些有理曲线的数目（参看 Vafa 等人的工作 [112] ，以及 Chiang-Klemm-Yau-Zaslow 最近的工作 [42]). σ 模型上的所有这些示性数组成的集合与 Gelfand-Kaspranov-Zelevinsky[64,65] 的超几何级数密切相关. 了解这些数作为一个从 K- 群到 M 的映射的内在结构将会非常有意思.

当 b 是欧拉类, Li-Tian 的一个著名定理说这就等价于计算一个和给定辛结构相容的一般近复结构的伪全纯曲线条数（至多相差一个符号）. 用 Lian-Liu-Yau 的证明, 我们应该能够扩展 Li,Ruan 和 Tian 的方法, 用来证明生成函数的系数 n_d 都是整数. 这将让数论学家和组合学家都很感兴趣. 从超几何级数到生成函数的变换称为镜像变换. 一个同样了不起的事实是, 通过选择正确的坐标系, 镜像变换有一个很好的 q- 展开, 其中系数都是整数（如同在 Hosono-Klemm-Thiesen-Yau[99] 中实验性的计算, 由作者们公开化）. 当镜像流形的形变是一维的, 这个整性条件由 Lian-Yau[138] 验证. 这是一个非常重要的事实, 被 Lian-Yau 用来证明有理曲线数目的可除性. 例如, 证明了 n_i ， 5 次代数簇的有理曲线数目, 当 i 不能被 5 整除时, 可以被 125 整除. 可是, 镜像映射这样的整数性质在多变量情形还不知道, 这提出了一个富有挑战性的问题. 注意当 Calabi –丘成桐流形的维数是 1 和 2 时, 镜像映射和 j- 函数相关. 其实, Lian-Yau[135,136,137] 注意到当 Calabi –丘成桐流形是 K3 曲面或 Calabi –丘成桐流形包含一族 K3 曲面时, 镜像映射应该和自守型相联系, 这出现在关于大魔群的月光猜想里. 在 Chuck Doran 的哈佛论文里, 他在这个问题上做出了重大的进展, 他详细研究了 Painlevé VI 方程及其代数解 [53].

对偶性猜想在弦论最近的进展中在数论中有应用, 正如 Moore-Witten[156] 的工作中所指出的那样. 同样 G. Moore 提出了由变分原理决定的模空间上的某些特殊点处的镜像映射值的一些问题 [155]. 所有这些问题预示着在镜像对称理论中蕴藏着数论的非常丰富的结构. Klemm-Lian-Roan-Yau[11] 发展了镜像

映射中许瓦兹方程的一个推广. 正是基于这些方程我们发现了有理曲线数目的可除性.

虽然 Lian-Liu-Yau 的理论可以用来处理许多重要的计数几何问题，它不能解释镜像流形的几何含义. 如同我们在上面提到的，Strominger-Yau-Zaslow[195] 的构造，确实提供了这样一个框架. Vafa[26] 最近拓展了 SYZ 猜想以把向量丛包含进来. 虽然 Gross[80,81] 和 Hitchin[93] 在 SYZ 猜想上已经作了重要进展，离对 SYZ 理论的完全理解还很远. 缺少的关键环节是一般 Calabi - 丘成桐流形中特殊 Lagrange 子流形和边界在给定 Lagrange 子流形上的全纯圆盘的显式构造.

在一般情况下， SYZ 猜想的图景都很可能是正确的，把 Lian-Liu-Yau 的严格处理和 SYZ 的图景联系起来将会非常有趣. 他预测了 Ricci 平坦度量的构造，很可能在半平坦度量的基础上，可以用瞬息子知识来建立 Ricci 平坦度量.

许多年以前， Mukai[158] 注意到一个 K3 曲面上的 $SU(n)$ 丛的模空间有自然的超 Kähler 结构. （这可以推广到其他的超 Kähler 流形上去. ）他引入了 Mukai 变换的概念，很明显与上面的理论有联系. 我们有足够的信心，在不久的将来，会出现一个包含上面所有思想的理论.

另一个重要的问题是分类所有三维 Calabi - 丘成桐流形，以及那些是椭圆纤维空间的四维 Calabi - 丘成桐流形. 一个非常相关的问题是，理解和乐群为 G_2 和 Spin(7) 的流形的构造.

最近 Joyce[106,107] 能够构造这种流形的非平凡的例子. 它们是通过奇异摄动得到的，类似于 C. Taubes 有关四维流形上自对偶 $SU(2)$ 联络的构造. 虽然这些流形明显的在最近弦论的进展中扮演了重要的角色，他们的整体结构仍然非常难以了解. 我们如何对它们参数化？是否它们以系统的方式与 Kähler 流形相联系？我们应该如何理解这些流形上或 Calabi - 丘成桐流形上的具有特殊和乐群的丛的模空间？

一个最近的弦论进展要求一个给定的 Calabi - 丘成桐流形可以形变到另外一个. 既然这些流形可能具有不同的拓扑，我们必须通过奇异流形来达到这个目的. 我们允许把给出相同共形场论的流形等同起来. Aspinwall-Greene-Morrison[4] 已经研究了 Calabi - 丘成桐流形的共形场论的形变，在存在一个改变流形拓扑的 “flop” 构造的情况下. Greene-Morrison-Strominger[72] 也讨论了

当流形形变时量子场论的变化，来得到二重 (conifold) 点. 这些理论表明甚至当目标空间具有奇点时，仍然可能存在好的物理理论. 这意味着甚至当流形具有奇点时，我们可以发展一个好的几何理论. 这包括这种奇异流形上的一个好的度量，一个好的 Hodge 理论，一个好的丛理论，以及一个好的计数几何. 这些几何应该能够反映出上面提到的量子场论. 特别的，我们希望找到新的几何不变量来捕获当一个光滑流形趋向一个奇异流形时的量子几何的极限.

在联系不同 Calabi - 丘成桐流形的讨论中，一个特别重要的过程是由 M. Reid[172] 建议的 (一些最初的想法可以追溯到 Clemens[45]). 我们可以通过爆破具有负的法丛的有理曲线来消灭一个 Calabi - 丘成桐流形的第二上同调. 有 Clemens[44],Friedman[56] 和田刚 [203] 等人的关于如何把得到的奇异流形的复结构形变到一个光滑流形的复结构. 这些流形不一定是代数的. 通过这种过程， Reid 建议把所有 Calabi - 丘成桐三维流形连接起来. 这是一个相当诱人的猜想. 但是，通过光滑化得到的流形不是 Kähler 的，需要定义一个典则的 Hermitian 度量来说明那些类似于由 Ricci 平坦度量给出的性质. 基于这种典则度量的模空间上的 Weil-Petersson 度量将会很重要，因为它能够帮助识别镜像映射.

几年前， Zaslow 和我 [231] 证明了 K3 曲面中带节点的奇异有理曲线计数和自守型的关系. 在这个公式启发下， Göttsche[71] 对更一般的 Kähler 曲面做了如下的猜想:

设 C 是 X 上足够丰富的除子， K 是典则除子. 那么 $|C|$ 中的通过 $r = -KC + g - \chi(\mathcal{O}_X)$ 个点的亏格为 g 的曲线数目可以由 $q^{\frac{1}{2}C(C-K)}$ 在如下的 q 的幂级数展开中的系数得到:

$$B_1^{K^2} B_2^{CK} (DG_2)^r \frac{D^2 G_2}{(\Delta(D^2 G_2))^{\chi(\mathcal{O}_X)/2}},$$

其中 $D = q\frac{d}{dq}$ ， G_2 是 Eisenstein 级数

$$G_2(q) = -\frac{1}{24} + \sum_{k>0} (\sum_{d|k} d) q^k,$$

Δ 是判别式

$$\Delta(q) = q \prod_{k>0} (1 - q^k)^{24},$$

且 $B_i(q)$ 是某些万有幂级数.

当上同调类是本原时，Bryan-Leung[20] 在 K3 曲面的 Yau-Zaslow 公式的严格证明上走出了第一步. 引人注目的是最近刘艾克 [142] 得到了对一般的 Kähler 曲面的公式.(一些特殊的情形是与李天军合作得到的.)利用一族 Seiberg-Witten 不变量的想法，他也研究了同时是椭圆纤维空间的三维流形上的类似问题. 曲线计数的生成函数与自守型的关系相当神秘. 也许这些形式的一般性理论在不远的将来会发展起来.

除了 WDVV 方程和镜像对称理论，还有 Seiberg-Witten 方程理论. Taubes [199] 最早证明 Seiberg-Witten 不变量与一个辛流形中的伪全纯曲线的计数相关. 这个定理为四维辛流形的结构理论打下了基石. Taubes 定理的一个推论是，$\mathbb{CP}^2$ 上只有一个辛结构. （还不知道这是否对同伦 $\mathbb{CP}^2$ 也成立，我证明了与 $\mathbb{CP}^2$ 同伦的 Kähler 流形一定与 $\mathbb{CP}^2$ 同构. ）Taubes 关于 $\mathbb{CP}^2$ 的定理被刘艾克和李天军推广到了其他的有理曲面上 [126].

回到 Calabi - 丘成桐流形的分类，了解这些流形间的几何配边理论是很有趣的. 什么时候 Calabi - 丘成桐流形是同一个具有 G_2 和乐群的七维流形的边界？对 G_2- 流形，我们也可以问它什么时候是 Spin(7) 流形的边界. G_2 流形和三维或四维的 Calabi - 丘成桐空间有密切的关系. 如何描述呢？我们很可能需要容许带奇异点的空间.

对 Ricci 曲率为正的流形， Calabi 猜测的解给了正 Ricci 曲率紧 Kähler 流形的拓扑的一个很好了解. 当流形不是 Kähler 的，问题的解并不一样. 甚至对怪球面，这个问题也还没有全部回答. 一个诱人的猜想是如下的：

一个怪球面容许正的数量曲率当且仅当它是一个旋量 (spin) 流形的边界. 一个怪球面容许正 Ricci 曲率度量当且仅当它是一个可平行流形的边界. 一个怪球面容许正截曲率度量当且仅当它可以写成一个紧流形的向量丛.

第一个命题从 Stolz[192] 定理知道是对的，证明用到 Schoen-Yau[184] 和 Gromov-Lawson[78] 的手术结果. 同样，第二与第三部分的充分性也已知是正确的.

Cheeger-Gromoll[37] 的著名定理基本上把非负 Ricci 曲率的流形的研究简化到具有有限基本群的情形. 是否每个有限群都可以作为一个正 Ricci 曲率紧流形的基本群出现？特别的，还不清楚是否正 Ricci 曲率的连通和容许正 Ricci

曲率度量. Stolz[193] 建议用如下方法把著名的 Lichnerwicz 定理推广到环路 (loop) 空间：如果 M 的 Ricci 曲率是正的，且 $\frac{1}{2}p_1(M)$ 是零，那么 M 的 Witten 指标等于零. 注意 $\frac{1}{2}p_1(M) = 0$ 解释成 M 的环路空间是旋量的. 但是，对这样一个猜想还没有足够的证据. 一个有趣的问题是怪球可否嵌入到 Calabi- 丘成桐空间里面成为余维数为一的极小子流形.

找到一个条件来看是否有对正 Ricci 曲率的流形上正数量曲率的 Einstein 度量存在性的阻碍将会很漂亮. 对维数大于 5，很可能没有任何阻碍. 甚至当流形是 Kähler 的，正数量曲率 Einstein 度量的存在性也还是一个公开的问题. 虽然有自同构群是可约的（ Matsushima 的一个定理 [146] ）和 Futaki 不变量 [60] 必须为零两个已知的阻碍，作者相信关键的阻碍应该来自于极化复结构的 Mumford 和 Gieseker 的几何不变量理论中定义的稳定性概念.

有可能 R. Hamilton 的方程在这个问题中有用. 他的方程确实保持复结构，曹怀东 [32] 证明了这个方程的长时间解的存在性. 基本的估计如 Harnack 不等式也由曹怀东得到 [33]. 一些孤立子解也为曹怀东所发现 [34]. 一个重要问题是分类所有这样的非紧孤立子解. Kähler-Einstein 度量的惟一性问题分别由 Bando-Mabuchi[7] 得到. Hamilton 方程的渐近行为也许和稳定性问题相关.

C. 数量曲率. 虽然数量曲率是维数大于 2 的紧流形上最弱的不变量，它在广义相对论中扮演了重要的角色. 当 Lorentz 度量限制到一个类空超曲面时，数量曲率基本上表示质量的分布. （精确的质量分布包括来自类空超曲面的第二基本形式的贡献. ）

物理学上的解释需要数量曲率的正性比负性更有意义，因为通常的质量密度假定是非负的. 物理直觉是正数量曲率流形理论发展的非常好的向导.

第一个成果是狄拉克算子的结论. Lichnerwicz 证明了下面的消没定理 [139]：对旋量流形，从 Atiyah-Singer 指标定理，可以推出流形的某个 KO 示性数必定为零. 在很长时间里，这是仅有的知道的拓扑常数. 对几何学家来说，正质量猜想的问题是在 1973 年斯坦福大学微分几何会议时提出来的（在广义相对论来说，这是一个古典的问题）. 很快就注意到一个简单的问题是，三维环面上是否存在正数量曲率的度量. Schoen 和我成功地证明了这样的度量不存在 [182]. 证明依赖于不可压缩极小曲面的存在性定理（这也由 Sacks-Uhlenbedk 独立的得到 [177] ）以及对第二变分公式的细致研究. 特别的，我们证明了当一个

三维流形的基本群容许一个子群与亏格不小于 1 的曲面的基本群同构时，其上不存在正数量曲率的完备度量 [185].

到 1978 年，我们已经能够彻底的解决正质量猜测 [183]，我们也能够把关于正数量曲率度量的定理推广到高维 [184]. 基本的证明原则是对维数进行归纳. 我们发现对一个具有正数量曲率的流形中的稳定极小超曲面，我们可以（利用第二变分算子的第一特征函数）把度量共形形变到一个正数量曲率的度量. 外围流形的拓扑性质必须用来保证这种极小超曲面的存在性. 例如，流形的第一上同调必须有足够的类来提供非平凡的相交.

同年，利用我们证明正质量猜测的想法，我们证明了，直到余维数 3，可以在正数量曲率流形的范畴内作手术 [184].（这个基本的事实后来也被 Gromov-Lawson 用一个不同的构造得到 [78].）这个手术的结果使得旋量配边理论的工具可以应用到正数量曲率流形的研究中. Stolz[192] 证明了下面的重要结果：Lichnerwicz 定理中的阻碍是单连通流形类中惟一的阻碍.

虽然我们有了把 Lichnerwica 消没定理扩展到具有非平凡基本群的流形的初步结果，Gromov-Lawson 为之发展了一套广泛的理论. 他们认为来自 $KO[\pi_1]$ 的阻碍的消没对正数量曲率度量的存在性来说已经足够好了 [79]. 最近 Schick[178] 的工作显示这是不对的，因为 Schoen-Yau 的关于极小超曲面的阻碍没有考虑进来.

一个公开的问题是，找出一个流形容许正数量曲率度量的充分必要条件. 一个有趣的问题是证明，如果流形 M 表示 $H^*(K(\pi,1),\mathbb{Q})$ 中的一个非平凡的同调类，那么它不容许正数量曲率的度量. 在 Schoen 和我于 1981 年在 Berkeley 开设的一个关于正数量曲率度量流形的课程里，我们解决了这个问题当 $\dim(M)\leq 4$ 的情形. 在过去十年中，有 A. Connes 等人的利用算子代数想法的工作（参看 [9]）. 可是，还没有最后给出这个问题的解. 手术的论证方法在 $\dim(M)\leq 4$ 时得出来的结论不足以给它们非类. Schoen-Yau 的结果可以推出正数量曲率三维流形必是具有有限基本群的流形的连通和 [185]. 如果 Poincaré 猜想和球面空间形式猜想成立，那么相反的命题也对.

当 $\dim(M)=4$，最好的结果是刘艾克和李天军 [125] 给出的. 他们给出了一个辛流形容许正数量曲率度量的充要条件.

除了和拓扑有关的问题，正数量曲率流形的几何也是一个富有成果的课

题，既然它和广义相对论的问题密切相关．例如，下面的命题（参看 Schoen-Yau[186] ）在黑洞理论中有重要的意义：

对一个紧致三维流形 M ，算子 $-\Delta_M+\frac{1}{2}R_M$（具有 Dirichlet 条件）的第一特征值以 $\frac{4\pi^2}{3r^2}$ 为上界，其中 r 是任何沿着 M 中闭约当曲线 σ 的管子的最小半径，要求 σ 在管子内是同伦平凡的．

应该可以把这种结果推广到高维流形．

我们期望带边紧流形的正质量猜想的一个很好的表述，可是现在还不知道．正质量定理，以及 Schoen 关于著名的 Yamabe 问题的解 [180]，被 Schoen 和作者用来研究区域 $\Omega\subset S^N$ 的共形平坦的，正数量曲率度量 [187].

20 年前， Penrose 做了一个广义相对论中的猜想，全质量在相差一个常数的意义下，大于黑洞面积的平方根．当类空超曲面具有非负数量曲率，这个猜测最近被 Huisken-Ilmanen[103] 和 Bray[19] 所解决．处理数量曲率不是非负的情形还是一个公开的问题．

广义相对论的一个非常有趣的问题是如下的：对一个非负数量曲率的紧致三维流形，∂M 的 Hawking 质量不会大于 ∂M 的直径的一个固定的倍数，除非 M 中有一个闭的稳定极小曲面．当然，上述命题有一个到非正数量曲率流形的推广．这些命题和黑洞的形成有关．

III. 结论.

我想在这里总结一下这个报告中的最重要的部分，提出一些重要的问题也许是比较合适的．

1. 理解 n 维流形到 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维欧氏空间的等距嵌入的存在性与惟一性的准确内涵．当流形是紧致无边的，是否存在非平凡的等距形变？

明显的，在 $n=2$ 和 $n>2$，局部和整体的嵌入，度量的实解析和光滑的假设之间存在差异．对 $n=2$ 时的整体嵌入，有 Weyl[221], Nirenberg[162] 和 Pogorelov[169] 的工作．对局部嵌入，有林长寿的重要工作 [140].$n=2$ 时的整体惟一性是由 Cohn-Vossen 研究的 [46]．相应的线性化算子的惟一性问题也非常重要，有 Cohn-Vossen 做了研究．虽然线性化的问题本身是有趣的，它明显的和非线性问题有关系．对这样的线性算子，有可能既不是椭圆的又不是双曲的，发展一套整体的理论．假定 M^n 的度量是一般 (generic) 的而曲率算子是正定的，并且嵌入在 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中．是否线性化算子的核是只由无穷小刚体运动组

成？是否在这个情况下有任何应用指标定理的方法？

等距嵌入问题要求在抽象法丛上找一个 Riemann 联络，通过（未知的）第二基本形式与切丛上的 Levi-Civita 联络结合，一个平坦联络就形成了．（Gauss 方程和 Codazzi 方程都需要用到．）从这个观点看，注意到 $n > 2$ 时法丛一般是可以拓扑分解的．这也许是等距嵌入并非惟一的一个原因．也许需要把法丛分解为几个子丛，然后根据法丛的分解分几个部分来构造所需的 Riemann 联络和第二基本形式．几何上来说，我们考虑等距嵌入结构化的可能性，通过把 M^n 嵌入到 $M_1^{n_1} \subset M_2^{n_2} \subset \cdots \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 中，其中 $n < n_1 < n_2 < \cdots < \frac{n(n+1)}{2}$．如果我们在等距嵌入上加入某种结构化，也许会迫使惟一性和存在性定理变得更容易证明．例如，可以首先把一张任意亏格的曲面嵌入到合适的双曲三维空间中．我们也可以把亏格为一的曲面通过一个合适选取的三维流形等距嵌入到 $\mathbb{R}^4$ 中．

应该有一种有效的方法来验证是否 M^n 上的一个度量可以等距嵌入到另一个维数 $< \frac{n(n+1)}{2}$ 的流形中去．当 $n > 2$，当余维数不大于 $n-1$ 时我们有相当多的惟一性定理．当 $n > 2$ 时几乎不知道任何存在性定理．

一个有趣的余维数为一的整体存在性定理可以作为我与 Schoen 的工作的推论得到 [183]：给定一个三维流形上强渐近平坦的度量（质量为零）．假设对某个在无穷远处二次衰减的对称张量 h_{ij}，下面的不等式成立

$$\frac{1}{2}\left[R - \sum h_{ij}^2 + \left(\sum h_{ii}\right)^2\right] \geq \left[\sum_i \left(\sum_j h_{ij,j} - \sum_j h_{jj,i}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

那么这个度量可以等距嵌入到平坦 Minkowski 时空中，作为一张类空超曲面．

2. 理解一个完备流形的 Laplace 算子的谱．什么是 $\mathbb{R}^+$ 中的一个离散数集成为某个流形的 Laplace 算子的谱的精确条件？目前，只知道必要条件．当流形有一个特殊结构，例如，它有一个 Einstein 度量或是一个极小子流形，我们期望存在更多的对称．（对称性也许在相关的 zeta 函数中体现．）

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ 是一列非负数．（某些 α_i 可能重复有限次．）它们要成

为谱，有两个熟知的重要条件.

(a) 有一个正整数 n（维数）使得 $\sum_{i=1}^{\infty}\exp(-\alpha_i t)$ 有渐近级数展开 $t^{-n/2}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}a_i t^i$.

(b) 由 $\sum_{j=1}^{\infty}\exp(i\sqrt{\lambda_j}t)$ 定义的分布有奇异的紧支撑，在一列可数的数 $\{l_i\}$ 中.

(a) 和 (b) 都是关于序列 $\{\alpha_i\}$ 的渐近信息. 第一个是热不变量，第二个是波不变量. 除非我们有更多的关于流形的先验信息(比如是一个极小超曲面 [38])，我们不知道其它的使 $\{\alpha_i\}$ 成为流形的谱的约束.

既然这些都是渐近约束, 一个有趣的问题是研究当它们是一个流形的谱时，序列的有限部分会提供多少信息. 如果 α_i 和 β_i 是可以实现为两个流形的谱的序列. 如果 $t^{n/2}(\sum_i e^{\alpha_i t}-\sum_i e^{\beta_i t})=0(t^m)$ 对任何 $m>0$ 当 $t\to 0$ 并且如果 $\sum_j(e^{i\sqrt{\lambda_j}t}-e^{i\sqrt{\beta_j}t})$ 作为一个分布没有奇点，我们能否断定 $\alpha_j=\beta_j$ 对所有 j 成立.

热不变量是局部几何量的积分，而波不变量更具整体性且与闭测地线的长度有关. 能否通过考察其它的关于 Laplace 算子的函数，通过研究特征值的子序列空间，或者通过从特征值构造新的序列（比如取特征值的差)，来构造更多的几何不变量.

当我们说我们可以 “听到” 一个几何量 g，我们应该是指对所有的 $\varepsilon>0$，有一个整数集合 $\{n_1,\cdots,n_k\}$ 使得 n_i 只依赖于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_{i-1}}$ 和 ε，且存在一个定义在 $R_T^{n_k+1}$ 上的函数 f 满足

$$|f(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_k},\varepsilon)-g|<\varepsilon.$$

目前，还不清楚如何 “听到” 流形的任何几何量. 除非我们对流形有一个先验的了解，甚至还不清楚我们能否听到流形的维数. 对一个凸区域， Peter Li 和作者确实找到了听到它的面积的方法. 在我们知道 Ricci 曲率是有下界的情况下，能否听出流形的体积将是非常有意义的问题.

完成已知的 Einstein 流形和闭子流形的完整的谱是很重要的. 只有少数的例子已经得到了计算，它们是由群论的方法构造的.

3. 找到一个显式的方法来给出 $\mathbb{R}^n$ 或 S^n 中的一大类极小子流形. 是否所有的校准极小子流形可以用这样一个显式的方法得到. 在具有特殊和乐群的外围流形中生成它们将会特别有趣. （在 Calabi- 丘成桐流形的情形，我们考察特

殊 Lagrange 子流形.）计算这些极小子流形的模空间. 三维的双曲闭流形可否与 Calabi- 丘成桐流形里面的特殊 Lagrange 子流形同胚？

找出一类由一阶椭圆方程组定义的常平均曲率超曲面也许是很有意思的. 在大多数类中，我们也许需要参数化那些具有某些几何结构的校准子流形. 例如，在 Calabi – 丘成桐流形中的特殊 Lagrange 子流形的情形，我们和酉平坦线丛一起参数化. 在其他的情形，它可以是某些扭化的调和转子. 找到这些具有外在结构的子流形的模空间的一个好的紧化是一个有趣的问题. Weil-Petersson 度量在奇点附近的行为应该很有意思. 注意极小子流形的序列总是在几何测度论的意义下收敛到一个极小流，问题就是如何推广定义在这些极小流上的平坦线丛或扭化调和转子. 我们希望紧化的模空间有额外的结构，例如（可能奇异的）代数结构. 它们能否实现为某个代数几何对象的模空间？

4. 分类容许 Einstein 度量的紧致光滑流形. 如果 $\dim M > 4$，是否 M 总是容许一个 Einstein 度量？如果是的，我们能否对其参数化？

是否有条件保证 Einstein 度量的模空间具有有限多个分支？对奇数维 ≥ 5 的流形，有 Wang-Ziller 在 Journal of Diff. Geom.,1990 的例子，其中找到了无穷多个分支. 这个问题在维数等于 4 和 6 时已经很有趣了. 当我们改变 M 的拓扑，Einstein 度量的模空间的拓扑如何变化？大多数具有非平凡连续族的 Einstein 度量的流形来自于 Kähler-Einstein 流形上的环面丛或具有特殊和乐群的流形. 是否还有其他的？在 4 维情形，能否把 M^4 分解成如下形式的开的片 (a)Einstein 流形 (b) 常曲率 3 维流形上的圆周丛 (c) 另一张曲面上的曲面丛.

上面的开片据推测会沿着 S^2 或 T^2 上的圆周丛的三维流形彼此连通. 对维数 3，有 Thurston 几何化猜想的类似命题.

5. 分类具有特殊和乐群的紧致 Riemann 流形. 主要的和乐群是 $SU(n)$，Spin(7) 和 G_2. 证明在每个维数都只存在有限多个这种流形的形变类型.

非常可能的是，和乐群为 Spin(7) 和 G_2 的流形可以从那些和乐群为 $SU(n)$ 的流形的几何构造得到. 所以，找一个这些模空间上的类似于 Calabi – 丘成桐流形上的特殊几何的典则结构，将是很有意思的. 这些流形上还有校准子流形和具有特殊和乐群的丛. 什么是这些流形的“镜像对称”的确切含义？例如，在这种几何下，能否找一个计数校准子流形的方法. 一个和乐类被某个校准子流形表示的条件是什么？在 Kähler-Einstein 曲面中的 Lagrange 极小曲面情形

下，已经由 Schoen-Wolfson 作了广泛的研究.

6. 证明如果 M^{2n} 容许一个近复结构且 $n>2$，那么它也容许一个可积近复结构. 当 $n=2$ 时，存在熟知的阻碍. 任何第一 Betti 数为偶数的复曲面可以形变到一个代数曲面，任何代数曲面容许一个 Lefschetz 纤维化（可能经过几次爆破）. 所以，找到一个使曲面丛（具有 Morse 型奇点）容许一个复结构的充分条件是很有意思的. 找到一个四维流形同伦型容许一个奇异曲面丛结构的条件也很有趣. 这个方向上可以研究的一类很有意思的流形是复球的商，我们知道它是整体刚性的. 一个相关的问题是怎样把复流形粘连起来. Seiberg-Witten 不变量和相对的伪全纯曲线理论也许可以帮助我们理解这个粘连. 另一个方向是对分支覆盖在 $\mathbb{CP}^2$ 或 $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ 上的四维流形找一个容许复结构的充分条件.

从 Bogomolov 和 Li-Yau-Zheng[130] 的工作，我们知道怎样分类没有曲线的小平 VII 型曲面. 还剩下分类那些具有曲线的情形. [124] 中的论证也许会有用.

一个重要的问题是，找到一大类合适的具有典则 Hermitian 度量的非 Kähler 复流形. 弦论也许为寻找这种 Hermitian 度量的可能方程的提供了一些指导. 特别重要的是找到对 Calabi－丘成桐流形的奇点光滑化后得到的复流形上的典则 Hermitian 度量，而这些 Calabi－丘成桐流形是通过沿着一条具有负法丛的有理曲线爆破得到的. 我们希望找到的流形具有超对称性质，使得镜像对称仍然存在.

7. 找到一个复流形容许 Kähler 结构的必要和充分条件.

对一个 Kähler 流形来说，我们有关于上同调的著名的 Lefschetz 和 Hodge 定理. Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan 定理也要求有理同伦型形式上是确定的. 这些是除了它是复流形以外的不太知名的必要条件（它也基于指标定理给出了关于陈数的可积性条件）. 如果一个复流形在它的同伦型上满足所有这些条件，它是否就同伦等价于一个 Kähler 流形？对应的关于微分同胚型的问题要微妙的多. 例如，作者用陈数刻画了和具有常全纯截曲率的代数流形同伦等价的 Kähler 流形.

8. 给定第一陈类为 (k,k) 型的代数流形上的一个复向量丛 V，如果我们在 K 理论意义下对 V 加上或减去全纯丛，是否 V 容许一个全纯结构？证明 Hodge 猜想，即有理 (k,k) 类 Poincaré 对偶于代数闭链.

构造复向量丛上的可积复结构的仅有的进展属于 C. Taubes[198]，来自于一个四维流形上反自对偶联络的存在性. 可是这没有告诉我们太多关于高维流形的情况. 甚至在四维流形情形，我们也必须限制到当丛是通过冒泡过程拓扑的构造出来的. 我们非常希望有一个从已知数据出发，不用奇异摄动的构造方法. Uhlenbeck-Yau[215] 中的关于 Hermitian-Yang-Mills 联络的构造应该可以应用到更一般的拓扑丛中去. 丛上可积复结构的构造可能会遇到来自代数闭链的阻碍. 对他们关系的深刻理解是非常有益的.

9. 什么是一个椭圆变分问题的奇异集的结构？特别的，什么是一个面积极小簇的奇异集的结构？是否这样一个奇异集在外围度量的摄动下是稳定的？什么是平均曲率流和 Ricci 流的解的奇异集？

对双曲系统，最重要的是广义相对论中 Einstein 方程奇点的发展问题. 方程组的非线性性已经展示了物理与几何之间壮观的丰富联系.

很长时间以来，几何学家一直都对微分不等式的过定系统感兴趣. 例如，流形上正曲率度量的存在性是很长一段时间的活跃中心. （还不知道，比如，当维数足够大时，是否只有局部对称空间容许正截曲率度量. 现在仍不知道是否存在任何容许正截曲率度量的非平凡乘积流形.）一个自然的问题是研究，是否可以从微分方程的观点发展截曲率的稍弱形式的概念. 这种想法是为了这种度量的弱收敛. 了解这些度量的奇点应该也是很有趣的. 当然也可以对定态的系统提出这个问题，例如 Ricci 张量.

10. 给一个完整的和严格的关于 Calabi －丘成桐流形的镜像对陈概念的几何解释. 是否它在其他不具有特殊和乐群的几何结构中也存在？解释瞬子数的生成函数的结构和来自镜像对称的镜像映射的结构. 什么是这些函数的算术含义？

Lian-Liu-Yau 的称作‘镜像对称’ I,II 和 III 的工作 (Asian J.Math.,1997,1999)，开始了由镜像对称激发的对计数几何的系统了解. Strominger-Yau-Zaslow[195] 的工作开创了镜像对称的几何理解. Lian-Yau[136],[137] 开始了对镜像映射算术本质的研究.

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, *On a class of closed surfaces*, Recueil Math. (Moscow), 4 (1938), pp. 69–77.

[2] M. T. Anderson, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geo., 18 (1938), pp. 701–721.

[3] P. S. Aspinwall, B. R. Greene, K. H. Kirklin, and P. J. Miron, *Searching for three generation Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. B, 294 (1987), pp. 193–222.

[4] P. S. Aspinwall, B. R. Greene, and D. Morrison, *Calabi-Yau moduli space, mirror manifolds and spacetime topology change in string theory*, Nuclear Phys. B, 416:2 (1994), pp. 414–480.

[5] P. S. Aspinwall and D. Morrison, *Topological field theory and rational curves*, Comm. Math. Phys., 151 (1993), pp. 245–262.

[6] T. Aubin, *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes*, Bull. Sc. Math., 102 (1978), pp. 63–95.

[7] S. Bando and T. Mabuchi, *Uniqueness of Einstein Kähler metric modulo connected group*, in Algebraic geometry (Sendai, 1985), Adv.Stud.Pure Math. 10, North-Holland, Amsterdam-New York, 1987, pp. 11–40.

[8] S. Barannikov and M.Kontsevich, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices, 4 (1938), pp. 201–215, alg-geom/9710032.

[9] P. Baum, A. Connes, and N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, in C^*-algebras: 1943-1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math. 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 240–291.

[10] K. Becker, M. Becker, and A. Strominger, *Fivebranes, membranes, and non-perturbative string theory*, Nucl. Phys. B, 456 (1995), pp. 130–152, hep-th/9507158.

[11] K. Behrend and B. Fantechi, *The instrinsic normal cone*, Invent. Math., 128:1 (1997), pp. 45–88.

[12] M. Berger, *Sur certaines variétés Riemanniennes à courbure positive*, C. R. Acad. Sci., Paris, 247 (1958), pp. 1165–1168; *Sur certaines variétés Riemanniennes à courbure positive*, Bull. Soc. Math., Belg., 10 (1958), pp. 89-104.

[13] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement*

symétriques de courbure strictement négative, Geom. Funct. Anal., 5:5 (1995), pp. 731–799.

[14] G. Bini, C. De Concini, M. Polino, and C. Procesi, *On the work of Givental relative to mirror symmetry*, math. AG/9805097.

[15] D. D. Bleecker, *Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra*, J. Diff. Geom., 43:3 (1996), pp. 505–526.

[16] F. A. Bogomolov, *Hamiltonian Kähelerian manifolds*, Soviet Math. Dokl., 19:6 (1979), pp. 1462–1465.

[17] F. A. Bogomolov, *Surfaces of class VII_0 and affine geometry*, Math. USSR-Izv., 21:1 (1983), pp. 31–73.

[18] C. Böhm, *Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces*, Invent. Math., 134 (1998), pp. 145–176.

[19] H. Bray, *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*, J. Diff. Geom., 59 (2001), no. 2, pp. 177–267.

[20] J. Bryan and N. C. Leung, *The enumerative geometry of K3 surfaces and modular forms*, J. Amer. Math. Soc., 13 (2000), no. 2, pp. 371–410, alg-geom/9711031.

[21] N. P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann., 280:4 (1988), pp. 625–648.

[22] D.Burns and M. Rapoport, *On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) 8:2 (1975), pp. 235–273.

[23] E. Calabi, *Improper affine hypersurfaces of convex type and a generalization of a theorem of Jörgens*, Michigan Math. J., 5 (1958), pp. 105–126.

[24] E. Calabi, *Complete affine hyperspheres I*, Sympos. Math., 10 (1977), pp. 19–38.

[25] E. Calabi, *hypersurfaces with maximal affinely invariant area*, Amer. J. of Math., 104:1 (1982), pp. 91–126.

[26] E. Calabi and L. Nirenberg, , unpublished (see the introduction to [40]).

[27] P. Candelas, P. S. Green, and T. Hübsch, *Rolling among Calabi-Yau vacua*, Nucl. Phys. B, 330 (1975), pp. 49–102.

[28] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, *Vacuum configuration for superstrings*, Nucl. Phys. B, 258 (1985), pp. 46–74.

[29] P. Candelas, M. Lynker, and R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted* $\mathbb{P}^4$, Nucl. phys. B, 341 (1990), pp. 383–402.

[31] P. Candelas, X. De La Ossa, A. Font, S. Katz, and D. R. Morrison, *Mirror symmetry for two-parameter models I*, Nucl. Phys. B, 416:2 (1994), pp. 481–538.

[31] P. Candelas, X. De La Ossa, P. Green, and L. Parkers, *A pair of Calabi-yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. B, 359(1991), pp. 21–74.

[32] H. D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact kähler manifolds*, Invent. Math., 81:2(1985), pp. 359–372.

[33] H. D. Cao, *On Harnack's inequalities for the Kähler-Ricci flow*, Invent. Math., 109:2(1992),

pp. 247–263.

[34] H. D. Cao, *Existence of gradient Kähler-Ricci solitons*, in Elliptic and parabolic methods in geometry (Minneapolis, MN, 1994), AK Peters, Wlllesley, MA, 1996, pp. 1–6.

[35] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Pol. Math., 6(1927), pp. 1–7.

[36] F. Catanese and C. Lebrun, *On the scalar curvature of Einstein manifolds*, Math. Res. Lett., 4:6(1997), pp. 843–854.

[37] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Diff. Geom., 6(1971/1972), pp. 119–128.

[38] S. Y. Cheng, P. Li, and S.-T. Yau, *Heat equations on minimal submanifolds and their applications*, Amer. J. Math., 106(1984), pp. 1033–1065.

[39] S. Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the regularity of the Monge-Ampère equation* $\det((\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j)) = F(x, u)$, Comm. Pure Appl. Math., 30(1977), pp. 41–68.

[40] S. Y. Cheng and S.-T. Yau, *Complete affine hypersurfaces, Part I. The completeness of affine metrics*, Comm. Pure Appl. Math., 39(1986), pp. 839–866.

[41] S. Y. Cheng and S.-T. Yau, *Inequality between Chern numbers of singular kähler surfaces and characterization of orbit space of discrete group of* SU(2,1), in Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Main, 1984), Contemp. Math. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 31–44.

[42] T.-M. Chang, A. Klemm, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations*, Adv. Theor. Math. Phys., 3 (1999), no. 3, pp. 495–565, hep-th/9903053.

[43] H. I. Choi and A. Wang, *A first eigenvalue for minimal hypersurfaces*, J. Diff. Geom., 18 (1983), no. 3, pp. 559–562.

[44] C. H. Clemens, *Degeneration techniques in the study of threefolds*, in Algebraic threefolds (Varenna, 1981), Lecture Notes in Math. 947, Springer, Berlin-New York, 1982, pp. 93–154.

[45] C. H. Clemens, *Homological equivalence modulo algebraic equivalence is not finitely generated*, Publ. Math. IHES, 58 (1983), pp. 19–38.

[46] E. Cohn-Vossen, *Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen*, in Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematish-Physikalische Klasse, 1927, pp. 125–134.

[47] E. Cohn-Vossen, *Unstarre geschlossene Flächen*, Math. Annalen, 102 (1929/1930), pp. 10–29.

[48] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Harmonic functions on manifolds*, Ann. of Math., 146:3 (1997), pp. 725–747.

[49] P. Collin, R. Kusner, W. Meeks, and H. Rosenberg, *Topology, geometry and conformal invariants of properly embedded minimal surfaces*, Preprint.

[50] R. Connelly, *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Inst. Hautes études

Sci. Publ. Math., 47 (1977), pp. 333–338.

[51] L. J. Dixon, *Some world-sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise*, in Superstrings, unified theories and cosmology 1987 (Trieste, 1987), ICTP Ser. Theoret. Phys. 4, World Sci. Pbulishing, Teaneck, NJ, 1988, pp. 67–126.

[52] S. K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc., 50 (1985), pp. 1–26.

[53] C. Doran, *Picard-Fuchs uniformization and gemetric isomonodromic deformations: Modularity and variation of the mirror map*, Harvard thesis, 1999.

[54] B. Dubrovin, *Integrable systems in topological field theory*, Nucl. Phys. B, 379 (1992), pp. 627–689.

[55] N. V. Efimov, *Impossibility of a complete surface in 3-space whose Gaussian curvature has a negative upper bound*, Soviet Math., 4 (1963), pp. 843–846.

[56] R. Friedman, *Simultaneous resolution of threefold double points*, Math. Ann., 274:4 (1986), pp. 671–689.

[57] R. Friedman and J. W. Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants*, J. Algebraic Geom., 6:3 (1997), pp. 445–479.

[58] C. Frohman and W. H. Meeks III, *The ordering theorem for the ends of properly embedded minimal surfaces*, Topology, 36:3 (1997), pp. 605–617.

[59] K. Fukaya and Y.-G. Oh, *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy*, Asian J. Math., 1:1 (1997), pp. 96–180.

[60] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics*, Invent. Math., 73 (1983), pp. 437–443.

[61] P. Gauduchon, *Le théorème de l'excentricité nulle*, C.R.A.S. Paris, Série A, 285 (1977), pp. 387–390.

[62] P. Gauduchon, *Fibrés Hermitiens a endomorphisme de Ricci non négatif*, Bull. Soc. Math. France, 105 (1977), pp. 113–140.

[63] K. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.

[64] I. M. Gelfand, A. V. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Func. Anal. Appl., 23 (1989), pp. 94–106; Correction in Func. Anal. Appl., 27 (1993), pp. 295.

[65] I. M. Gelfand, A. V. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. Math., 84:2 (1990), pp. 255–271.

[66] D. Gepner, *Exactly solvable String compactifications on manifolds of SU(N) holonomy*, Phys. Lett. B, 199 (1987), pp. 380–388.

[67] R. Geroch, *A method for generating solutions of Einstein's equations I, II*, J. Math. Phys., 12 (1971), pp. 918–924; J. Math. Phys., 13(1972), pp. 394-404.

[68] G. W. Gibbons, S. W. Hawking. and M. J. Perry, *Path integrals and the indefiniteness of the gravitational action*, Nuclear Phys. B, 138:1 (1978), pp. 141–150.

[69] D. Gieseker, *On moduli of vector bundles on algebraic surfaces*, Ann. of Math., 106 (1977), pp. 45–60.

[70] A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Int. Math. Res. Notices, 1996:13, pp. 613–663.

[71] L. Göttsche, *A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces*, Comm. Math. Phys., 196 (1998), no. 3, pp. 523–533, alg-geom/9711012.

[72] B. R. Greene, D. R. Morrison, and A. Strominger, *Black hole condensation and the unification of string vacua*, Nuclear Phys. B, 451:1-2 (1995), pp. 109–120.

[73] B. R. Greene and M. R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl. Phys. B, 338 (1990), pp. 15–37.

[74] B. R. Greene, C. Vafa, and N. P. Warner *Calabi-Yau manifolds and renormalization group flow*, Nucl. Phys. B, 324 (1989), pp. 371–390.

[75] D. Gromoll and W. Meyer, *An exotic sphere with nonnegative sectional curvature*, Ann. of Math., 100:2 (1974), pp. 401–406.

[76] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comm. Math. Helv., 56 (1981), pp. 179–195.

[77] M. Gromov, *Psedoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., 82:2 (1985), pp. 307–347.

[78] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math., 111:3 (1980), pp. 423–434.

[79] M. Gromov and H. B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. IHES, 58 (1983), pp. 83–196.

[80] M. Gross, *Special Lagrangian fibrations I: Topology*, alg-geom/9710006.

[81] M. Gross, *Special Lagrangian fibrations II: Geometry*, math. AG/9809072.

[82] M. Gross and P. M. H. Wilson, *Mirror symmetry via 3-tori for a class of Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann., 309:3 (1997), pp. 505–531.

[83] K. Grosse-Brauckmann, R. Kusner, and J. Sullivan, *Constant mean curvature surfaces with three ends.*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 97 (2000), no. 26, 14067–14068.

[84] B. Guan and J. Spruck, *Boundary-value problems on S^n for surfaces of constant Gauss curvature*, Ann. of Math., 138:3 (1993), pp. 601–624.

[85] B. Guan and Y. Y. Li, *The Weyl problem with nonnegative Gauss curvature*, J. Diff. Geom., 39:2 (1994), pp. 331–342.

[86] M. Gursky and C. Lebrun, *On Einstein manifolds of positive sectional curvature*, Ann. Global Anal. Geom., 17 (1999), no. 4, pp. 315–328, math. DG/9807055.

[87] R. S. Hamilton, *Harnack estimate for the mean curvature flow*, J. Diff. Geom., 41:1 (1995), pp. 215–226.

[88] R. S. Hamilton, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom., 5:1 (1997), pp. 1–92.

[89] R. S. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom., 7 (1999), no. 4, pp. 695–729.

[90] R. Hardt and L. Simon, *Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem*, Ann. of Math., 110:3 (1979), pp. 439–486.

[91] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math., 148 (1982), pp. 47–157.

[92] S. W. Hawking, *Gravitational radiation in an expanding universe*, J. of Math. Phys., 9:4 (1968), pp. 598–604.

[93] N. J. Hitchin, *Compact four-dimensional Einstein manifolds*, J. Diff. Geom., 9 (1974), pp. 435–441.

[94] N. J. Hitchin, *The moduli space of special Lagrangian submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 25 (1997), no. 3-4, pp. 503–515 (1998), dg-ga/9711002.

[95] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys., 108 (1987), pp. 535–589.

[96] D. Hoffman and H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, in Geometry, V, Encyclopedia Math. Sci. 90, Springer, Berlin, 1997, pp. 5–93 & pp. 267–272.

[98] J. X. Hong, *Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations*, Math. Z., 209:2 (1992), pp. 289–306.

[98] J. X. Hong, *Realization in* $\mathbb{R}^3$ *of complete Riemannian manifolds with negative curvature*, Comm. Anal. Geom., 1:3-4 (1993), pp. 483–514.

[99] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen, and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi-Yau hypersurfaces*, Comm. Math. Phys., 167:2 (1995), pp. 301–350; *Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces*, Nucl. Phys. B, 433:3 (1995), pp. 501-522.

[100] S. Hosono, B. Lian, and S.-T. Yau, *Maximal degeneracy points of GKZ systems*, J. A. M. S., 10:2 (1997), pp. 427–443.

[101] L. Hsu, R. Kusner, and J. Sullivan, *Minimizing the squared mean curvature integral for surfaces in space forms*, Exper. Math., 1:3 (1992), pp. 191–207.

[102] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Diff. Geom., 31:1 (1990), pp. 285–299.

[103] G. Huisken and T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality.*, J. Diff. Geom., 59 (2001), no. 3, pp. 353–437.

[104] G. Huisken and C. Sinestrari, *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations 8 (1999), no. 1, pp. 1–14.

[105] M. Inoue, *On surfaces of class* VII_0, Invent. Math., 24 (1974), pp. 269–310.

[106] D. D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy* G_2*, I, II*, J. Diff. Geom., 43:2 (1996), pp. 291–328 & pp. 329-375.

[107] D. D. Joyce, *Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)*, Invent. Math., 123:3 (1996),

pp. 507–552.

[108] N. Kapouleas, *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, Ann. of Math., 131:2 (1990), pp. 239–330.

[109] N. Kapouleas, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, J. Diff. Geom., 47:1 (1997), pp. 95–169.

[110] N. Karmarkar, *Riemannian geometry underlying interior-point methods for linear programming*, in Mathematical developments arising from linear programming (Brunswick, ME, 1988), Contemp. math. 114 (1990), pp. 51–75.

[111] A. Kelmm, B. H. Lian, S. S. Roan, and S.-T. Yau, *A note on ODEs and mirror symmetry*, in Functional Analysis on the eve of the 21st Century, Vol. II, Progr. Math., 132 (1993), pp. 301–323.

[112] A. Klemm, P. Mayr, and C. Vafa, *BPS states of exceptional non-critical strings*, hep-th/9607139.

[113] W. Klingenberg, *Über Riemannische Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comment. Math. Helv., 35 (1961), pp. 47–54.

[114] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press, 1987.

[115] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, in The moduli space of curves, R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, ed., Birkhäuser, 1995, pp. 335-368.

[116] N. Korvaar, *Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics*, J. Diff. Geom., 37 (1993), pp. 73–93.

[117] D. Kotschick, *Einstein metrics and smooth structures*, Geom. Topol. (electronic), 2 (1998), pp. 1–10.

[118] V. S. Kulikov, *Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces*, Math. USSR-Izv., 11:5 (1978), pp. 957–989.

[119] C. Lebrun, *Einstein metrics and Mostow rigidity*, Math. Res. Lett., 2:1 (1995), pp. 1–8.

[120] W. Lerche, C.Vafa, and N. P. Warner, *Chiral rings in N=2 superconformal theories*, Nucl. Phys. B, 324 (1989), pp. 427–474.

[121] N. C. Leung, *Einstein type metrics and stability on vector bundles*, J. Diff. Geom., 45 (1997), pp. 514–546.

[122] N. C. Leung, *Bando Futaki invariants and Kähler Einstein metric*, Comm. in Analysis and Geom., 6:4 (1998), pp. 799–808.

[123] N. C. Leung, *Uniformization of four manifolds*, dg-ga/9705001.

[124] H. Lewy, *On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 24:2 (1938), pp. 104–106.

[125] A,-K. Liu and T.-J. Li, *General wall crossing formula*, Math. Res. Lett., 2:6 (1995), pp. 797–810.

[126] A,-K. Liu and T.-J. Li, *Symplectic structure on ruled surfaces and a generalized adjunction*

formula, Math. Res. Lett., 2:4 (1995), pp. 453–471.

[127] J. Li and G. Tian, *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties*, J. Amer. Math. Soc., 11:1 (1998), pp. 119–174.

[128] J. Li and G. Tian, *Comparison of the algebraic and the symplectic Gromov-Witten invariants*, Asian J. Math. 3 (1999), no. 3, pp. 689–728, alg-geom/9712035.

[129] J. Li and S.-T. Yau, *Hermitian-Yang-Mills connection on non-Kähler manifolds*, in Mathematical aspects of string theory, (San Diego, 1986), Adv. Ser. Math. Phys. 1, World Sci. Publ., Singapore, 1986, pp. 560–573.

[130] J. Li, S.-T. Yau, and F. Zheng, *A simple proof of Bogomolov's theorem on class VII_0 surfaces with $b_2 = 0$*, Illinois J. Math., 34:2 (1990), pp. 217–220.

[131] P. Li, *Harmonic sections of polynomial growth*, Math. Research Letters, 4 (1997), pp. 35–44.

[132] P. Li, R. Schoen, and S.-T. Yau, *On the isoperimetric inequality for minimal surfaces*, Ann. Scuola Norm., 9 (1984), pp. 237–244.

[133] P. Li and S.-T. Yau, *A new conformal invariant and its applications to the Willmore Conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math., 69 (1982), pp. 269–291.

[134] B. Lian, K. Liu, and S.-T. Yau, *Mirror principle, I*, Asian J. Math., 1:4 (1997), pp. 729–763.

[135] B. H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, rational curves on algebraic manifolds and hypergeometric series*, in ICMP Proceedings (Paris 1994), IP, 1995, pp. 163–184.

[136] B. H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror maps, modular relations and hypergeometric series, I.*.

[137] B. H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror maps, modular relations and hypergeometric series, II.*, S-duality and mirror symmetry (Trieste, 1995), Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 46 (1996) pp. 248–262.

[138] B. H. Lian and S.-T. Yau, *Integrality of certain exponential series*, in Algebra and Geometry, Proceedings of the International Conference of Algebra and Geometry, IP, 1998, pp. 215–227.

[139] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. A. S. Série 1, 257 (1963), pp. 7–9.

[140] C.-S. Lin, *The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature*, J. Diff. Geom., 21 (1985), pp. 213–230.

[141] C.-S. Lin, *The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), pp. 867–887.

[142] A.-K. Liu, *Family blowup formula, admissible graphs and the enumeration of singular curves. I.*, J. Differential Geom. 56 (2000), no. 3, 381–579.

[143] M. Lübke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manuscripta Math., 42 (1983), pp. 245–257.

[144] Yu. I. Manin, *Generating functions in algebraic geometry and sums over trees*, in The

moduli space of curves, R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, Ed., Progress in Math. 129, Birkhäuser, 1995, pp. 401–418.

[145] M. Maruyama, *Moduli of stable sheaves, I, II*, J. Math. Kyoto Univ., 17 (1977), pp. 91–126.

[146] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne.*, Nagoya Math. J., 11 (1957), pp. 145–150.

[147] R. C. Mclean, *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. 6:4 (1998), pp. 705–747.

[148] W. H. Meeks III, J. Perez, and A. Ros, *Uniqueness of the Riemann minimal examples*, Invent. Math. 133:1 (1998), pp. 107–132.

[149] W. H. Meeks III and S.-T. Yau, *The equivariant loop theorem for three-dimensional manifolds and a review of the existence theorems for minimal surfaces*, in The Smith conjecture, Academic Press, 1984, pp. 153–163.

[150] M. Micallef and J. D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) 127:1 (1988), pp. 199–227.

[151] J. H. Michael and L. M. Simon, *Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), pp. 361–379.

[152] H. Minkowski, *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann., 57 (1903), pp. 447–495.

[153] N. Mok, *Compactification of complete Kähler surfaces of finite volume satisfying certain curvature conditions*, Ann. of Math., (2) 129:2 (1989), pp. 383–425.

[154] N. Mok and J. Q. Zhong, *Compactifying complete Kähler-Einstein manifolds of finite topological type and bounded curvature*, Ann. of Math., (2) 129:3 (1989), pp. 427–470.

[155] G. Moore, *Attractors and arithmetic*, hep-th/9807056; *Attractors and arithmetic*, hep-th/9807087.

[156] G. Moore and E. Witten, *Integration over the u-plane in Donaldson theory*, Adv. Theor. Math. Phys., 1:2 (1997), pp. 298–387.

[157] D. Morrison and R. Plesser, *Summing the instantons: quantum cohomology and mirror symmetry in toric varieties*, Nuclear Phys. B, 440 (1995), no. 1-2, 279–354; alg-geom/9412236.

[158] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface.*, Invent. Math., 77:1 (1984), pp. 101–116.

[159] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Academic Press, New York, 1965.

[160] N. Nadirashvili, *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, Invent. Math., 126:3 (1996), pp. 457–465.

[161] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math., (2) 63 (1956), pp. 20–63.

[162] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math., 6 (1953). pp. 337–394.

[163] L. Nirenberg, *Rigidity of a class of closed surfaces*, in Nonlinear Problems, R. E. Langer, ed., Univ. of Wisconsin Press, Madson, 1963, pp. 177–193.

[164] R. Pandharipande, *Rational curves on hypersurfaces (after A. Givental)*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. Astérisque No. 252, (1998), Exp. No. 848, 5, 307–340; math. AG/9806133.

[165] T. Parker and J. Wolfson, *Pseudo-holomorphic maps and bubble trees*, J. Geom. Anal., 3:1 (1993), pp. 63–98.

[166] U. Persson and H. Pinkham, *Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle*, Ann. of Math., (2) 113:1 (1981), pp. 45–66.

[167] I. I. Piatetski-Shapiro and I. R. Shafarevich, *Torelli's theorem for algebraic surfaces of type K3*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 35 (1971), pp. 530–572.

[168] A. V. Pogorelov, *The rigidity of general convex surfaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 79 (1951), pp. 739–742.

[169] A. V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, "Nauka", Moscow, 1969; English trans., Math. Monographs 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

[170] H. E. Rauch, *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. of Math., 54 (1951), pp. 38–55.

[171] D. B. Ray and I. M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math., 98 (1973), pp. 154–177.

[172] M. Reid, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible*, Math. Ann., 278:1-4 (1987), pp. 329–334.

[173] M. Roček, *Modified Calabi-Yau manifolds with torsion*, in Essays on mirror manifolds, Internat. Press, Hong Kong, 1992, pp. 480–488.

[174] Y. Ruan, *Topological sigma model and Donaldson-type invariants in Gromov theory*, Duke Math. J., 83:2 (1996), pp. 461–500.

[175] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology*, J. Diff. Geom., 42:2 (1995), pp. 259–367.

[176] Y. Ruan and G. Tian, *Higher genus symplectic invariants and sigma models coupled with gravity*, Invent. Math., 130:3 (1997), no. 3, pp. 455–516.

[177] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math., 113:1 (1981), pp. 1–24.

[178] T. Schick, *A counterexample to the (unstable) Gromov-Lawson-Rosenberg conjecture*, Topology, 37:6 (1998), pp. 1165–1168.

[179] R. Schoen, *A remark on minimal hypercones*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 79:14 (1982), pp. 4523–4524.

[180] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom., 20:2 (1984), pp. 479–495.

[181] R. Schoen and J. wolfson, *Minimizing volume among Lagrangian submanifolds*, in Differ-

ential equations: La Pietra 1996 (Florence)Proc. Sympos. Pure Math., 65, A.M.S., Providence, RI, 1999, pp. 181–199.

[182] R. Schoen and S.-T. Yau, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, Ann. of Math., 110:1 (1979), pp. 127–142.

[183] R. Schoen and S.-T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. in Math. Phys., 65:1 (1979), pp. 45–76.

[184] R. Schoen and S.-T. Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta Math., 28 (1979), pp. 159–183.

[185] R. Schoen and S.-T. Yau, *Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*, in Seminar on Differential Geometry, Princeton University Press, 1982, pp. 209–228.

[186] R. Schoen and S.-T. Yau, *The existence of a black hole due to condensation of matter*, Comm. Math. Phys., 90 (1983), pp. 575–579.

[187] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.

[188] B. Siebert, *Algebraic and symplectic Gromov-Witten invariants coincide*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 49:6 (1999), pp. 1743–1795; math. AG/9804108.

[189] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom., 1:2 (1993), pp. 281–326.

[190] Y. T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math., 73:1 (1983), pp. 139–150.

[191] Y. T. Siu and S.-T. Yau, *Compactification of negatively curved complete Kähler manifolds of finite volume*, in Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 363–380.

[192] S. Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math., 136:3 (1992), pp. 511–540.

[193] S. Stolz, *A conjecture concerning positive Ricci curvature and the Witten genus*, Math. Ann., 304:4 (1996), pp. 785–800.

[194] A. Strominger, *Special geometry*, Comm. Math. Phys., 133:1 (1983), pp. 163–180.

[195] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B, 479:1-2 (1996), pp. 243–259.

[196] D. Sullivan, *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*, J. Diff. Geom., 18 (1983), pp. 723–732.

[197] C. H. Taubes, *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), pp. 139–170.

[198] C. H. Taubes, *The existence of anti-self-dual conformal structures*, J. Diff. Geom., 36:1 (1992), pp. 163–253.

[199] C. H. Taubes, SW $\Rightarrow$ Gr*: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic*

curves, J. Amer. Math. Soc., 9:3 (1996), pp. 845–918.

[200] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric*, in Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), Adv. Ser. Math. Phys., 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987, pp. 629–646.

[201] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Diff. Geom., 32:1 (1990), pp. 99–130.

[202] G. Tian, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, Invent. Math., 101:1 (1990), pp. 101–172.

[203] G. Tian, *Smoothing 3-folds with trivial canonical bundle and ordinary double points*, in Essays on mirror manifolds, Internat. Press, Hong Kong, 1992, pp. 458–479.

[204] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math., 130:1 (1997), pp. 1–37.

[205] G. Tian, *Yang-Mills equations and calibrated submanifolds*, Preprint.

[206] G. Tian and S.-T. Yau, *Three-dimensional algebraic manifolds with* $C_1 = 0$ *and* $\chi = -6$, in Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), Adv. Ser. Math. Phys., 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987, pp. 543–559.

[207] G. Tian and S.-T. Yau, *Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry*, in Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), Adv. Ser. Math. Phys., 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987, pp. 574–628.

[208] G. Tian and S.-T. Yau, *Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature I, II*, J. A. M. S., 3 (1990), pp. 575–579; Invent. Math., 106 (1991), pp. 27-60.

[209] G. Tian and X. H. Zhu, *Uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Acta Math., 184:2 (2000), pp. 271–305.

[210] A. N. Todorov, *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces*, Invent. Math., 61:3 (1980), pp. 251–265.

[211] A. N. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of* $\mathrm{SU}(n \geqslant 3)$ *(Calabi-Yau) manifolds I*, Comm. Math. Phys., 126:2 (1989), pp. 325–346.

[212] F. Tomi, *On the finite solvability of Plateau's problem*, in Lecture Notes in Math., Vol. 597, Springer, Berlin, 1977, pp. 679–695.

[213] V. A. Toponogov, *Riemannian spaces containing straight lines*, AMS Translations, 37:2 (1964), pp. 287–290.

[214] N. S. Trudinger and X.-J. Wang, *The Bernstein problem for affine maximal hypersurfaces*, Invent. Math., 140:2 (2000), pp. 399–422.

[215] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles.*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), pp. S257–S293; *A note on our previous paper: "On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles"*, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), pp. 703–707.

[216] C. Vafa, *Extending mirror conjecture to Calabi-Yau with bundles*, Commun. Contemp. Math., 1:1 (1999), pp. 65–70.

[217] C.-L. Wang, *On the incompleteness of the Weil-Petersson metric along degenerations of Calabi-Yau manifolds*, Math. Res. Lett., 4:1 (1997), pp. 157–171.

[218] C.-P. Wang, *Some examples of complete hyperbolic affine 2-spheres in* $\mathbb{R}^3$, in Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1990), Lecture Notes in Math., 1481, Springer, Berlin, 1991, pp. 271–280.

[219] M. Y. Wang and W. Ziller, *Einstein metrics on principal torus bundles*, J. Differential Geom., 31:1 (1990), pp. 215–248.

[220] H. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. 121:1 (1986), pp. 193–243.

[221] H. Weyl, *Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement*, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich, 61 (1916), pp. 40–72.

[222] T. J. Willmore, *Note on embedded surfaces*, Anal. Stüntifice ale Univ., Iasi Sect. I a Mat., 11 (1965), pp. 493–496.

[223] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in diff. geom., 1 (1991), pp. 243–310.

[224] S.-T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 74:5 (1977), pp. 1798–1799.

[225] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure Appl. Math., 31 (1978), pp. 339–411.

[226] S.-T. Yau, *Compact three-dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature*, in Proc. of the Symposium on anomalies, geometry, topology, Argonne, World Scientific, 1985, pp. 395–406.

[227] S.-T. Yau, *Nonlinear analysis in geometry*, Enseign. Math. (2) 33:1-2 (1987), pp. 109–158 (reprinted in [182]).

[228] S.-T. Yau, *A splitting theorem and an algebraic geometric characterization of locally Hermitian symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom., 1:3-4 (1993), pp. 473–486.

[229] S.-T. Yau, *Métrique de Kähler-Einstein sur les variétés ouvertes*, in *Premiere classe de Chern et courbure de Ricci*, Asterisque, 58, 1978, société mathématique de France.

[230] S.-T. Yau, *The role of partial differential equations in differential geometry*, Proceedings of the international congress of mathematicians (Helsinki, 1978) Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

[231] S.-T. Yau and E. Zaslow, *BPS States, String Duality, and Nodal Curves on K3*, Nuclear Physics B, 471 (1996), pp. 503–512; hep-th/9512121.

[232] S.-K. Yeung, *Compactification of Kähler manifolds with negative Ricci curvature*, Invent. Math. 106:1 (1991), pp. 13–25.

[233] S. Zelditch, *Szegö kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices, 6 (1998),

pp. 317–331.

[234] S. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math., 136:3 (1992), pp. 569–587.

附录 III　复几何的历史及前景 [1]

一旦把复数看作一个域，那么考虑仅依赖于全纯变量 z 的函数就是很自然的. 因为它不依赖于 $\bar{z}$，所以

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

这些全纯函数有着令人惊讶的丰富的性质. 全纯函数存在全纯延拓的可能，使我们不得不考虑多值全纯函数. 引入 Riemann 面的概念就是为了理解这些现象. 分支割线和分支点的想法直接地把这些曲面的拓扑与复变量联系了起来.

十九世纪的时候，就已经认识到两个同胚的 Riemann 面有可能不相等，其中 Riemann 对单连通曲面证明了非凡的单值化定理. 虽然很多年后 Hilbert 才把 Riemann 关于变分原理的工作严格化，用来构造调和函数以及全纯函数的 Dirichlet 原理直到现今仍然有着巨大的影响.

Koebe 最终证明了每个抽象定义的单连通 Riemann 面是圆盘，复直线或 Riemann 球面三者之一. 现在已经有了基于复变函数论，变分原理和几何形变方程等的多种证明. 单值化定理使得我们可以把复结构空间与 $SL(2,\mathbb{R})$ 的离散子群空间等同起来，通过分式线性变换作用在圆盘上. 如何参数化具有固定拓扑的所有可能的 Riemann 面是数学中最有趣的问题之一.

二维几何与高维几何的一个非常重要的区别是每个二维可定向 Riemann 流形容许一个复结构，使得度量具有形式 $h(dx^2+dy^2)$. 当亏格大于 1 时，Poincaré 发现每个这种度量都可以共性形变到惟一的曲率等于 -1 的度量. 所以亏格为 g 的曲面上的共形结构空间和常负曲率等于 -1 的度量空间是相同的. 如何实现作用在这个空间上的微分同胚群当然是很重要的. 它的商空间是共形结构的模空间，用 M_g 表示. 如果我们限制到与恒等映射同痕的微分同胚，那么商空间称为 Teichmüller 空间，用 T_g 表示.

[1]本文(Complex geometry: Its brief history and its future – Personal perspective.)是丘成桐教授在 2004 年 6 月华东师范大学数学研究所建所十周年暨复几何及相关的数学理论国际会议上所作的演讲辞，由徐浩翻译，丘成桐校订.

很自然的，T_g 覆盖了 M_g，且覆叠变换是上面两个微分同胚群的商的映射类群．不难证明 T_g 是可缩的． M_g 的拓扑与几何要复杂的多．

Teichmüller 通过引入 Riemann 面间的极值共形映照的概念广泛研究了 T_g. Bers 证明了可以把 T_g 嵌入到 $\mathbb{C}^{3g-3}$ 中，成为一个全纯域．把极值共形映照有意义的推广到高维复流形将会是有趣的问题．然而，对 Bers 嵌入的边界到底有多坏，还没有精确的描述．现在也还不清楚什么是 T_g 到 $\mathbb{C}^{3g-3}$ 的最优嵌入．

除了几何性质外， M_g 还有代数性质．它是拟射影的，即是说有一个代数簇 $\overline{M}_g$，使得 $\overline{M}_g\backslash M_g$ 由子簇给出． $\overline{M}_g$ 的最基本的构造是 Deligne-Mumford 给出的，他们引入了稳定曲线的概念（从几何不变量理论得出的稳定流形的概念）．

现在知道，对于大的亏格，很难描述 M_g，即它是"普通类型"的，且不存在从复射影空间到 $\overline{M}_g$ 的非平凡全纯映照． $\overline{M}_g$ 的研究是复几何乃至一般数学中的一个基本主题．

M_g 上有许多自然的复丛结构．其实， M_g 上有一条万有曲线，即 M_g 上的一个纤维化复流形，使得每根纤维都是给定的 Riemann 面．在万有曲线上，我们可以沿着纤维取切丛，并且我们可以通过沿着纤维取全纯 1 形式的方法来构造 Hodge 丛．这些自然丛的陈类给出了 $\overline{M}_g$ 的重要的上同调类． Mumford 猜想说 $\overline{M}_g$ 的低维（相对于 g 而言）上同调是由陈类生成的． Madsen(22) 最近解决了这个问题．但是理解非稳定情形的这些上同调仍然是一个有趣的问题．

这些丛的陈数可以很好地组织起来，并已经成为一个活跃的研究领域．在过去 15 年中，弦论在对这些数的理解方面作出了很大的贡献．我们有 Witten 猜想（被 Kontsevich 证明 (13) ）， Mariño-Vafa 公式（由刘秋菊－刘克峰－周坚证明 (16) ）以及许多其它令人激动的工作．

单变量全纯函数的概念可以很容易地推广到多变量函数．单值化的简单推广是完全失败的，因为方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}$ 对所有 i 构成了一个过定方程组．

我们称一个流形 M 是复的，如果存在坐标 $(z_1,\cdots,z_n)$，使得它们的坐标变换是全纯的．一个复流形 M 具有性质，它的复化切丛容许一个线性算子 J 使得 $J^2=-$ 恒等，且 $\{v|Jv=\sqrt{-1}v\}$ 构成全纯切空间 $\{\frac{\partial}{\partial z^i}\}$， $\{v|Jv=-\sqrt{-1}v\}$ 构成反全纯切空间．一个流形若容许这样一个算子 J，则称它为近复流形．

我们称它满足复的 Frobenius 条件，如果对任何复向量场 v_j 使得 $Jv_j=$

$\sqrt{-1}v_j$，我们有

$$J[v_j, v_k] = \sqrt{-1}[v_j, v_k].$$

著名的 Newlander-Nirenberg 定理说，满足复的 Frobenius 条件的近复流形是复流形．虽然有一个有效的方法来决定哪些光滑流形容许一个近复结构，一个非常神秘和基本的问题是，找到一个决定偶数维定向流形可以容许复结构的拓扑条件．

许多研究复流形的工具来自于 Kähler 几何．

Kähler 注意到存在满足

$$d(\sqrt{-1}\sum g_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j) = 0$$

的 Hermitian 度量 $\sum g_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ 的重要性． Kähler 度量具有重要的性质，即有一个全纯坐标系，使得它可以用平坦度量作一阶逼近．

自从产生复流形的概念以来，第一个重要的贡献是陈类的引入．与 Riemann-Roch 定理的经典理论以及层论相结合，陈类被 Hirzebruch(8) 用来证明高维代数流形的 Riemann-Roch 公式． Hirzebruch 的公式被 Grothendieck 在函子的框架里作了解释和推广， K 理论作为一个基本的工具得到了发展．

基于这个公式和 Bochner 的消没公式的思想， Kodaira(12) 证明了对特殊类型 Kähler 流形的嵌入定理．注意到如果一个 Kähler 流形全纯嵌入到复射影空间中，周炜良的一个基本定理说它一定是由一个齐次代数多项式的理想定义的．所以它们是代数流形．

周炜良也引入了基本的工具来研究代数闭链．例如周坐标．周簇的概念是现代代数与算术几何的最重要的概念之一．

Hodge 在 Kähler 流形的 Hodge 结构方面的工作被 Kodaira 广泛使用．同时也把 Picard 和 Lefschetz 的古典理论置于新的理论框架内． Hodge 的关于代数闭链的猜测也许是代数几何中最精彩和重要的问题．由于它与算术问题的联系，许多数论学家对这个问题作出了贡献．

Hodge 结构的发展归功于许多人的工作： Hodge, Atiyah, Grothendieck, Deligne, Shafarevich, Borel, Dwork, Katz, Schmid, Griffiths, Clemens 等．一个非常重要的问题是它与单值性 (monodromy) 和 Torelli 定理的联系．建立 Torelli 定理的合适的形式是一个重要的方向．它已经成为了 Calabi – 丘成桐流形研究中的一个基本工具．

Kodaira 证明了每个 Kähler 曲面可以形变到一个代数曲面.

根据 Kodaira 的分类 (以及后来萧荫堂 (27) 关于 $K3$ 曲面的工作), 仅有的未知非 Kähler 复曲面就是所谓的 VII_0 类曲面.

这种曲面不是 Kähler 的, 有必要对它们进行分类. 这种曲面有两个子类:

(1) 那些不包含全纯曲线的. 已经由 Bogomolov 和李骏 - 丘成桐 - 郑方阳 (9) 作了分类.

(2) 那些包含有限多条曲线的.

李骏 - 丘成桐 - 郑方阳的方法很可能可以用来阐明这个剩下的非 Kähler 曲面类型. 如何描述代数曲面的拓扑?

Riemann-Roch 公式和 Atiyah-Singer 指标公式已经发挥了基本的作用. 当 $b_1 \neq 0$, 这些公式提供了关于全纯 1 形式的信息, 所以我们可以通过对 1 形式积分来得到非平凡的信息.

Van de Ven(42) 最早发现从 Riemann-Roch 公式可以推出

$$8C_2(M) \geqslant C_1^2(M).$$

Bogomolov(3) 用他的关于稳定丛和对称张量的想法改进了 Van de Ven 不等式

$$4C_2(M) \geqslant C_1^2(M).$$

此后不久, 我 (45) 用最新发展的 Kähler-Einstein 度量存在性, 证明了

$$3C_2(M) \geqslant C_1^2(M).$$

这个不等式是最优的, 因为复球的商取到等号.

Miyaoka(21) 也通过改进 Bogomolov 的方法得到了类似的不等式.

然而到目前为止, 我们只能用上述我发现的解析方法来证明 $3C_2(M) = C_1^2(M)$ 可以推出 M 只能是 $\mathbb{CP}^2$, 或是复球的商. 这种不等式到迹形 (orbifold) 的推广是很直接的, 已经由郑绍远 - 丘成桐 (4), Kobayashi(11) 和田刚 - 丘成桐 (37) 所得到.

我发现当 $3C_2(M) = C_1^2(M)$ 时, Kähler-Einstein 度量成为常全纯截曲率度量, 这使我注意到和 Mostow 刚性定理有关. 这就立刻推出这个流形上仅有的复结构就是标准结构.

所以我猜想具有负曲率的紧致 Kähler 流形具有惟一的复结构. 我建议用调和映照来解决这个问题. 想法就是目标流形的曲率应该可以决定调和映照的刚性. 这是受到了用 Dirichlet 原理证明单值化定理的启发. 我向萧荫堂 (28) 提出了这个建议, 他注意到 Kähler 度量曲率的特殊形式可以用来解决我的猜想的一个重要情形.

应用调和映照来证明不可压缩极小曲面的存在性是 Schoen 和我 (25) 在更早的时候发起的. 在那个理论中, 用到了 Linda Keen 的项圈 (collar) 定理. Schoen 和我发现调和映照的能量可以回过来提供 Teichmüller 空间的一个重要的穷竭函数. 在我于 1976 年犹他大学的演讲以后, 这个想法被其他一些人所采用. Michael Wolf(44) 的工作示范了调和映照可以怎样用来给出 Teichmüller 空间的 Thurston 紧化.

Jost 和我发现调和映照能够用来证明从一个紧致 Kähler 流形到高亏格曲线的拓扑映射可以同伦于一个全纯映射, 如果我们改变曲线的复结构.

虽然调和映照对具有大的基本群的流形很有用, 它对单连通流形的存在性还不知道.

令 $f: M \to N$ 是两个紧致 Kähler 流形间的一个映射, 使得在 $\Pi_2(M)$ 上的诱导映射是非平凡的. 我猜测总是存在一个从 M 到 N 的调和映照, 它在 $\Pi_2(M)$ 上的诱导映射是非平凡的.

这有可能成立的原因是对于二维球面间的调和映照的 Sacks-Uhlenbeck 定理的理解.

萧荫堂和我 (33) 在 Frenkel 猜测的证明过程中, 研究了 Sacks-Uhlenbeck 球面的起泡结构. 类似的研究后来被 Parker-Wolfson(23) 和阮勇斌 - 田刚 (24) 用来了解稳定映射的紧化和 Gromov-Witten 不变量. 最后的阐明是 Kontsevich(10) 关于稳定映射的模空间的概念.

甚至当调和映照的存在性定理是可以证明的, 仍然需要找出这种调和映照的性质. 在什么情况下, 这些映射在相差 M 和 N 的全纯自同态意义下是惟一的?

一般来说, 来自线性和非线性偏微分方程的方法可以用来产生全纯对象. 但是, 对特征 p 上的代数簇的类似构造将会很难实现. 这将是一个有趣的方向, 比如 Mori 能够通过特征 p 的方法来构造有理曲线. 这个了不起的方法仍然需

要用解析方法加以理解.

我在 1973 年时提出了一个高维空间单值法的纲领:

(1) (Frankel 猜想):双截曲率为正的 Kähler 流形与射影空间同构.

(2) 基于 Greene-Wu 的一些工作,我猜想非紧而双截曲率为正的 Kähler 流形与欧氏复空间同构. 最近朱熹平对此问题有深入研究.

(3) 单连通而且负曲率的 Kähler 流形可以全纯的浸入到欧氏空间里的一个有界域,假如流形覆盖一个空间,这个映射可能是嵌入的,这问题几乎毫无进展.

我们现在讨论来自非线性分析的思想.

Kähler-Einstein 度量是 Kähler 度量,使得

$$R_{i\bar{j}} = cg_{i\bar{j}}.$$

当 $c \leqslant 0$,如果我们固定 Kähler 类,它是惟一的. 当 $c > 0$,它在相差流形的自同构下是惟一的,这是 Bando–Mabuchi(1) 的工作. 所以当度量存在,它提供了流形复结构的重要不变量.

不难证明 Kähler-Einstein 度量其实决定了底流形的复结构,除非它是超 Kähler 的. 这可以通过研究 Kähler 形式在等距下的拉回得到. 所以 Kähler-Einstein 度量的存在性提供了从度量研究复结构的途径.

一个非常重要的问题是,作用在 (p,q) 形式空间上的 Laplace 算子的完全谱应该能够决定复结构 (如果 $c=0$ 时是极化复结构). 这些谱的贡献可以给出流形的重要不变量,比如全纯扭矩. 虽然我们可以把复结构的模空间嵌入到谱空间中,没有明显的办法给出后者空间上的复结构,使得这个嵌入是全纯的.

$c \leqslant 0$ 时的 Kähler-Einstein 度量是理解流形的复结构的强大工具. 有下面的主要方法:

(1) 利用陈类的曲率表示,我们可以用曲率的 L^2 积分来表示 $c_2\omega^{n-2}$,前者显然是非负的,且仅当流形平坦时为零. 如果 $\omega = \pm c_1$,那么 $c_2c_1^{n-2}$ 与 c_1^n 之间存在不等式,其中等号仅当流形是复射影空间或复球的商时成立.

(2) 利用曲率递减性质,我们可以证明切丛在 Mumford 意义下是倾斜稳定的. (这个工作是受到了 Bogomolov 工作的启发.) 从切丛和余切丛,我们可以取张量积和外积,以及从 $GL(n,\mathbb{C})$ 的自然表示构造自然丛. 它们都有从切丛诱导的自然的 Kähler-Einstein 度量.

如果自然丛 V 来自 $GL(n,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示且 $c_1(V)=0$，那么 V 的任何非平凡全纯截面是平行的，且原始联络的和乐群必定可以约化到更小的群. 用这种办法，我们可以刻画局部对称的 Kähler 流形.

我们可以给出 Shimura 簇的一个完全的代数几何刻画. 它提供了证明 Shimura 簇的伽罗华共轭仍然是 Shimura 的方法. 这是 Kazhdan 用表示论证明的一个定理.

应该有可能刻画诱导度量是 Kähler-Einstein 的子流形. 也应该会很有趣的是在代数几何意义下刻画局部对称的子流形.

(3) 利用平行形式作复结构的形变.

对 K_3 曲面，我们可以通过混合 (2,0) 形式， (0,2) 形式和 (1,1) 形式来找到复结构的 P^1 族.

Bogomolov(2) 观察到对超 Kähler 流形，复结构是无阻碍的. 紧接着田刚 – Todorov[38][40] 用基本相同的论证得到， Calabi – 丘成桐空间的情形也是正确的.

(4) 既然我们知道这种流形的 Ricci 曲率，我们可以应用 Schwarz 引理来研究 Kähler 流形间的全纯映射.

我们应该能够计算与标准 KE 度量相联系的 Weil-Petersson 度量. 模空间应该有丰富的性质值得研究. 包括 Weil-Petersson 几何的体积和它的 L^2 上同调. 对 Calabi – 丘成桐流形，上同调类被称为 BPS 状态，是弦论里很有兴趣的研究对象.

(5) 当流形具有 Kähler-Einstein 度量时，切丛明显是稳定的. 可是这还没有完全发挥 Kähler-Einstein 度量的全部威力. 当我应用 KE 度量研究代数几何时，我发现 KE 度量的存在性应该等价于流形的在几何不变量理论意义下的稳定性. （除了来自第一陈类符号的明显阻碍. ）

最近， Donaldson 在这个问题上作出了决定性的贡献.

虽然最近有一些关于极值度量和常数量曲率度量的工作，但其重要性不如具有非正数量曲率的 KE 度量. 具有正数量曲率的 KE 度量的情形和上面提到的问题以及理解 Ricci 平坦流形的问题有一定的关系，但是到目前为止，我们不能确定这种 KE 度量的代数几何意义.

在 1978 年赫尔辛基数学家大会上，我 (46)(47) 略述了完备非紧 Ricci 平坦

流形的存在性. 证明细节后来和田刚 (41) 一起写出. 具有正数量曲率的 KE 度量在这些构造中发挥了作用.

到目前为止, 没有发现这些正数量曲率的 KE 度量在代数几何中的重要贡献. 当我的稳定性问题被解决时, 情况也许就会不同了.

为了理解 Kähler-Einstein 度量的几何稳定性, 我们希望把这个度量和射影嵌入诱导的度量联系起来. 我在 20 年前发起了这个纲领, 通过丰富线丛的高次幂寻找射影嵌入, 来逼近 KE 度量.

我的几个学生从事这个纲领的研究. 在我的指导下, 田刚的博士论文 (39) 应用我和萧荫堂 (34) 有关刻画等于 $\mathbb{C}^n$ 的非紧 Kähler 流形的思想. 他证明了这种嵌入是可能的. 有关的摄动分析被 Lu(18), Zelditch(48), Phong–Sturm 继续研究. 田刚在 Donaldson 工作的基础上对我的稳定性问题作出了一些工作, 但直到 Donaldson 在 (6) 中的重要工作, 我们才对 KE 度量和稳定性有真正的了解.

在我的指导下, 罗华章 (19) 和王晓伟 (43) 的博士论文中继续了有关平衡条件的研究. 事实上, 罗华章引进的平衡条件在 Donaldson 的工作中起了很重要的作用.

基本上, Donaldson(6) 解决了我的猜想中重要的必要性部分. 最近有一些工作和环流形上正数量曲率 KE 度量存在性有关. (最近 Zhu 和 Wang 的贡献, 证明了来自 Donaldson 约化的实 Monge-Ampère 方程的存在性.)

Donaldson 的工作应该用来了解具有非正第一陈类的流形. 对来自算术几何, 模问题以及和代数闭链与代数丛相关的问题的流形尤其如此.

极化代数流形的模空间应该支持具有复数量曲率的 Kähler-Einstein 流形. 它也许容许迹形类型的奇点. 当形变空间是阻碍的, 描述奇点的度量结构将会极富挑战性.

当模空间是紧化的, KE 度量应该具有渐近的合理形式. 能否用积分的周期来理解这种行为是很重要的问题.

这种类型的最简单的问题早就在一维情形出现过了. 直到最近, 刘克峰 - 孙晓峰 - 丘成桐 (17) 能够识别 Teichmüller 空间上的 KE 度量的行为.

虽然 Teichmüller 空间的边界可能在复解析来说非常复杂, 但是有趣的是, 基于 Shi(26) 的工作, 我们证明了曲率和它的所有协变导数是有界的. 这与先前的我和郑绍远 (5) 的有关严格拟凸域上的 KE 度量的工作形成鲜明对比.

除了 KE 度量，Bergman 度量也是模空间上需要研究的自然度量. 它与 KE 度量和覆盖空间的关系应该会很有趣. 我们证明了 KE 度量，Bergman 度量，Teichmüller 度量和 Carathéodory 度量都是等价的.

模空间有许多有趣的子簇，甚至在一条曲线的情形. 刘克峰 (14)，孙晓峰 (31) 和其他人应用 Schwarz 引理，左康研究了 Hodge 结构的变化，他们得到 Shimura 曲线在模空间浸入的条件.

一个令人着迷的问题是，刻画模空间是 Shimura 簇或者 Calabi – 丘成桐空间的模问题.

代数闭链以及相联系的稳定丛组成的模空间应该是一个很有趣的研究专题.

基于来自弦理论的想法，在下面对偶情况下理解模空间将会很有意思

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T^k \times (T^k)^* & & \\
 & & \downarrow & & \\
T^k & & M \underset{N}{\times} \widehat{M} & & (T^k)^* \\
\downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
M & & & & \widehat{M} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & N & &
\end{array}$$

从 M 到 N，$\widehat{M}$ 到 N 的映射是可能带奇点的全纯纤维化. 应该有一个 $M \underset{N}{\times} \widehat{M}$ 上的秩 1 的全纯层，作为 Poincaré 线丛. 借助这个层应用 Fourier-Mukai 变换，我们应该把上面的模空间从 M 映到 $\widehat{M}$.

在上面的图中，我们可以允许环面是实的特殊 Lagrange 子流形. 在这种情况下，我们得到从 M 到 $\widehat{M}$ 的镜像映射. 这被称为 SYZ 构造 (35). 假如环面是复的，我们可以要求 M 的复纤维束模空间映射到 $\widehat{M}$ 上的复纤维束模空间.

弦理论提供了研究 Ricci 平坦度量几何的非常丰富的背景. 对偶概念提供了非常强大的工具. SYZ 构造需要做更加深入的研究，不仅在特殊 Lagrange 闭链的构造方面，而且根据全纯圆盘从半平坦 Ricci 平坦度量摄动到 Ricci 平坦度量.

复几何中有很多基本问题，这里可以提出以下几点：

(1) 找到一个使得近复流形容许可积复结构的拓扑条件.

(2) 找到一个办法，可以决定哪个近复结构容许 Kähler 度量，或弱形式的 Kähler 度量，例如平衡度量. 存在 Hermitian 度量 ω ，使得

$$d(\omega^{n-1}) = 0.$$

(3) 找到一个办法，把 Kähler 流形形变到射影流形.

(4) 用代数几何数据来刻画可以定义在 $\overline{Q}$ 上的射影代数流形.

(5) 研究代数闭链和代数向量丛 (或更一般的，代数流形的导出范畴).

(6) 理解代数结构的模空间与其上的代数对象.

当 $\dim_{\mathbb{C}} \geqslant 3$ ，所有这些问题和 $\dim_{\mathbb{C}} = 2$ 时有很大不同.

(i) 当 $\dim_{\mathbb{C}} \geqslant 3$ 时，是否每个近复流形容许一个可积复结构？

(ii) 对平衡流形，我们应该研究 Strominger 引入的方程组，其中耦合的全纯丛是与 Hermitian 度量相联系的.

A. Strominger.

具有 Hermitian 度量的复三维流形上存在一个全纯丛 V ，它的曲率 F_h 满足

$$\begin{aligned}
&\partial\bar{\partial}\omega = \sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,F_h \wedge F_h - \sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,F_g \wedge F_g \\
&F_h^{2,0} = F_h^{0,2} = 0 \\
&\mathrm{tr}\,F_h = 0
\end{aligned}$$

并且 ω 是共形平衡的.

我们期望这类流形上也存在“镜像对称”.

李骏和我在 Calabi －丘成桐流形的一个小邻域内能够解出 Strominger 方程组. 应该也能够整体有解.

复几何中有几个重要的运算.

(1) 向上爆破

(2) 向下爆破

(3) 形变 (局部或整体)

在这些运算下，不论是射影还是 Kähler 几何都不保持. 我们当然希望找到某种允许这些运算的几何.

特别重要的是如果我们从一个射影流形开始，接连的执行这些运算. 我们能否得到所有 Kähler 流形? (注意 Voison 确实构造了不能形变到射影流形的 Kähler 流形.) 什么是用这种方法可以得到的最大范畴?

基于扭子的构造，从 Taubes 的关于所有四维流形上反自对偶结构的存在性的工作，经过与足够多的 $S^2 \times S^2$ 作连通和，可以构造许多非 Kähler 的复流形. Clemens 的构造是通过向下爆破具有负的法丛的曲线，然后光滑化爆破得到的流形，这使得我们可以构造许多有趣的非 Kähler 复流形. 我们不能再忽视非 Kähler 复流形的理论.

在研究 Kähler 结构时， Hodge 理论起了最基本的作用. 重要之处在于作用在 k - 形式上的 Laplace 算子协变地分裂成 (p,q) 形式，其中 $k=p+q$. 它允许我们把 Kähler 流形的拓扑与流形的复结构联系起来. 对更一般的复流形找到类似的陈述，也许包括了那些支持 Strominger 结构的流形，这将是一个重要的问题.

M. Reid 猜测 Calabi - 丘成桐流形的模空间是连通的，如果我们允许通过非 Kähler 结构的形变. 是否这种结构可能支持 Strominger 的结构.

代数几何中最突出的问题是 Hodge 猜测. 希望找到代数闭链的用 (p,q) 型 Hodge 类的刻画是非常基本的.

如果我们放大几何的范围，我们也许不得不放大 Hodge 猜测的范围. 这方面最显著的例子是在 Calabi - 丘成桐流形的情形，我们有协变的常 n - 形式. 我们可以找那些 Lagrange 闭链，使得这些 n - 形式的限制成为体积形式的常数倍. 这些被称为特殊 Lagrange 闭链.

在 Strominger–Yau–Zaslow 关于镜像流形的构造中，特殊 Lagrange 闭链发挥了重要的作用. 一个基本的问题是，对 n 维 Calabi - 丘成桐流形中的一个 n 维的同调类，是否它的某个整数倍可以被特殊 Lagrange 闭链所表示.

我们相信特殊 Lagrange 闭链与镜像流形上的稳定全纯丛是互为镜像的. 所以这种闭链的构造可以对理解 Hodge 猜测有所帮助. Thomas–Yau(36) 建议从

合适意义下稳定的特殊 Lagrange 闭链出发，我们可以通过平均曲率流把它形变到特殊 Lagrange 闭链. Mu-tao Wang(32) 已经对这个问题作出了重要的进展.

一个同样基本的问题是构造复向量丛上的全纯结构. 在与平凡丛作稳定化以后，这个问题也许会容易处理. 仅仅在复 2 维情形， Taubes 和 Donaldson 的工作给出了有效的答案. Gieseker–Li(7) 的工作对了解代数丛的模空间的几何作出了重要的贡献.

特殊 Lagrange 环面在 Calabi - 丘成桐流形上有很重要的地位，它们可以给出一个纤维化. 在复 3 维情形，这个纤维化的基底可能是如同 $S^3\setminus G$ ，其中 G 是一个三价的图. SYZ 几何要求 $S^3\setminus G$ 上的平坦仿射结构的存在性，其中需要解某个实的 Monge-Ampère 方程且单值群属于 $SL(3,\mathbb{Z})$. 最近， Loftin–Yau–Zaslow(20) 能够在具有非平凡单值群 G 的一个邻域里解出这些方程.

当流形是 Kähler-Einstein 的且具有不等于零的数量曲率，特殊 Lagrange 闭链应该被那些平均曲率形式是调和的 Lagrange 闭链代替. 对这些闭链发展对应的 SYZ 几何应该会很有趣. 它们的模空间会给出 Kähler 流形的新的不变量. 对于边界构成这些 Lagrange 闭链的同调类的全纯曲线，更好的了解它们也是很重要的.

Donaldson–Uhlenbeck–Yau 的关于稳定全纯丛上的 Hermitian–Yang–Mills 联络的存在性定理，当存在特殊结构时已经得到了推广. 一个重要的推广是 C. Simpson 的 Higgs 丛结构. 它与 Hodge 结构的变化有关. 当基底流形是非紧的且拟射影的，这个理论并不完全令人满意.

一个富有挑战性的问题是，构造拟射影流形上的具有 Ricci 平坦度量或者 Hermitian–Yang–Mills 联络，其中余除子不是光滑的，但是规范交叉.

Hermitian–Yang–Mills 联络可以用来约化一个全纯丛的和乐群，当合适的代数几何条件被验证了以后. 它们应该在丛的模空间与非 Kähler 复流形的研究中被广泛使用.

Smith, Thomas 和我 (29) 研究了一个非 Kähler 复流形的可能的镜像流形. 一些辛流形的具体例子被构造出来了. 也许我们可以更详细的研究这个对偶.

最近李骏 (15) 对代数簇上的稳定映射的模空间的理解作出了基本的贡献. 这些模空间上的量对未来的研究非常重要.

参考文献

[1] S. Bando and T. Mabuchi. Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions. *Algebraic geometry, Sendai, 1985, 11–40, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.*

[2] F. A. Bogomolov. Hamiltonian Kähler manifolds. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 243 (1978), 1101–1104. English transl., Soveit Math. Dokl. 19 (1978), 1462–1465.

[3] F. A. Bogomolov. Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 42 (1978), no. 6, 1227–1287, 1439.

[4] S. Y. Cheng and S. T. Yau. Inequality between Chern numbers of singular Kähler surfaces and characterization of orbit space of discrete group of $\mathrm{SU}(2,1)$. *in Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984)* , 31–44, Contemp. Math., 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[5] S. Y. Cheng and S. T. Yau. On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 (1980), no. 4, 507–544.

[6] S. K. Donaldson. Scalar curvature and projective embeddings. I. *J. Differential Geom.*, 59 (2001), no. 3, 479–522.

[7] D. Gieseker and J. Li. (1)Irreducibility of moduli of rank-2 vector bundles on algebraic surfaces. *J. Differential Geom.*, 40 (1994), no. 1, 23–104.

(2)Moduli of high rank vector bundles over surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 9 (1996), no. 1, 107–151.

[8] F. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic·geometry*, volume 131 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[9] L. Jun, S. T. Yau and F. Y. Zheng. On projectively flat Hermitian manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 2 (1994), no. 1, 103–109.

[10] M. Kontsevich and Y. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry. *Commun. Math. Phys.*, 164 (1994), 525 + 562.

[11] R. Kobayashi. Uniformization of complex surfaces. *Adv. Stud. Pure Math.*, 18, (1990), 313–39.

[12] K. Kodaira. On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties) *Ann. of Math.*, 60 (1954), 28–48.

[13] M. Kontsevich. (1)Intersection theory on the moduli space of curves. *Funct. Anal. Appl.*, 25 (1991), no. 2, 123–129.

(2)Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147 (1992), no. 1, 1–23.

[14] K. Liu. Remarks on the geometry of moduli spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124 (1996), no. 3, 689–695.

[15] J. Li. (1)Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms. *J. Differential Geom.*, 57 (2001), no. 3, 509–578.

(2)A degeneration formula of GW-invariants. *J. Differential Geom.*, 60 (2002), no. 2, 199–293.

[16] C.-C. M. Liu, K. F. Liu and J. Zhou. A proof of a conjecture of Marino-Vafa on Hodge integrals. *to appear in J. Differential Geom.*

[17] K. Liu, X. Sun and S. T. Yau. Canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces I and II. *Preprints.*

[18] Z. Lu. On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch. *Amer. J. Math.*, 122 (2000), no. 2, 235–273.

[19] H. Luo. Geometric criterion for Gieseker-Mumford stability of polarized manifolds. *J. Differential Geom.*, 49 (1998), no. 3, 577–599.

[20] J. Loftin, S. T. Yau and E. Zaslow. Affine Manifolds, SYZ Geometry, and the "Y" Vertex. *Preprint.*

[21] Y. Miyaoka. On the Chern numbers of surfaces of general type. *Invent. Math.*, 42 (1977), 225–237.

[22] I. Madsen and U. Tillmann. The stable mapping class group and $Q(\mathbb{CP}^{\infty}_{+})$. *Invent. Math.*, 145 (2001), no. 3, 509–544.

[23] T. Parker and J. Wolfson. Pseudo-holomorphic maps and bubble trees. *J. Geom. Anal.*, 3 (1993), no. 1, 63–98.

[24] Y. Ruan and G. Tian. A mathematical theory of quantum cohomology. *J. Differential Geom.*, 42 (1995), no. 2, 259–367.

[25] R. Schoen and S. T. Yau. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. *Ann. of Math. (2)*, 110 (1979), no. 1, 127–142.

[26] W.-X. Shi. Ricci flow and the uniformization on complete noncompact Kähler manifolds. *J. Differential Geom.*, 45(1):94–220, 1997.

[27] Y. T. Siu. Every $K3$ surface is Kähler. *Invent. Math.*, 73 (1983), no. 1, 139–150.

[28] Y. T. Siu. The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 112 (1980), no. 1, 73–111.

[29] I. Smith, R. Thomas and S. T. Yau. Symplectic conifold transitions. *J. Differential Geom.*, 62 (2002), no. 2, 209–242.

[30] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann. of Math. (2)*, 113 (1981), no. 1, 1–24.

[31] X. Sun. Weil-Petersson geometry on moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds. *J. Inst. Math. Jussieu*, 3 (2004), no. 2, 185–229.

[32] K. Smoczyk and M. T. Wang. Mean curvature flows of Lagrangians submanifolds with convex potentials. *J. Differential Geom.* , 62 (2002), no. 2, 243–257.

[33] Y. T. Siu and S. T. Yau. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. *Invent. Math.*, 59 (1980), no. 2, 189–204.

[34] Y. T. Siu and S. T. Yau. Complete Kähler manifolds with nonpositive curvature of faster than quadratic decay. *Ann. of Math. (2)*, 105 (1977), no. 2, 225–264.

[35] A. Strominger, E. Zaslow and S. T. Yau. Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Phys. B*, 479 (1996), no. 1-2, 243–259.

[36] R. Thomas and S. T. Yau. Special Lagrangians, stable bundles and mean curvature flow. *Comm. Anal. Geom.*, 10 (2002), no. 5, 1075–1113.

[37] G. Tian. Kähler–Einstein metrics on algebraic manifolds. *in Transcendental Methods in Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. 1646 (1996), 143–185.

[38] G. Tian. Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric. *Mathematical Aspects of String Theory, S.T. Yau ed.*, World Scientific, 1987, pp. 629–646.

[39] G. Tian. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. *J. Differential Geom.*, 32 (1990), no. 1, 99–130.

[40] A. Todorov. The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geqslant 3)$ (Calabi-Yau)Manifolds I, *Commun. Math. Phys.*, 126 (1989), 325-346.

[41] G. Tian and S. T. Yau. (1)Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 3 (1990), no. 3, 579–609.

(2)Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II. *Invent. Math.*, 106 (1991), no. 1, 27–60.

[42] A. Van de Ven. On the Chern numbers of certain complex and almost-complex manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 (1966) 1624–1627.

[43] X. Wang. Balance point and stability of vector bundles over a projective manifold. *Math. Res. Lett.*, 9 (2002), no. 2-3, 393–411.

[44] M. Wolf. (1)The Teichmüller theory of harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 29 (1989), no. 2, 449–479.

(2)High energy degeneration of harmonic maps between surfaces and rays in Teichmüller space. *Topology*, 30 (1991), no. 4, 517–540.

(3)Harmonic maps from a surface and degeneration in Teichmüller space. *Low-*

dimensional topology (Knoxville, TN, 1992), 217–239, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, III, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.

[45] S. T. Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74 (1977), no. 5, 1798–1799.

[46] S. T. Yau. The role of partial differential equations in differential geometry. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

[47] S. T. Yau. Métrique de Kähler-Einstein sur les variétés ouvertes. in *Premiere classe de Chern et courbure de Ricci*, Asterisque, 58, 1978, société mathématique de France.

[48] S. Zelditch. Szegö kernel and a theorem of Tian. *Internat. Math. Res. Notices*, 6 (1998), 317–331.

索 引

纯粹数学与应用数学专著 第18号

微分几何

丘成桐 孙理察 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第18号

微　分　几　何

丘成桐　孙理察　著

科　学　出　版　社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书是著名数学家丘成桐、孙理察关于现代微分几何系统专著的第一部．它以拓扑和代数几何为基础而以分析为主要工具，论述了几何中的线性和非线性问题．本书的主要内容是：比较定理及其应用、流形上的调和函数、流形的谱及其估计、热核方程、保角平坦流形与 Yamabe 问题等．

本书可供数学系高年级学生、研究生、几何和分析方面的教师及数学工作者阅读参考．

纯粹数学与应用数学专著　第 18 号

微　分　几　何

丘成桐　孙理察　著

责任编辑　杜小杨　张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 7 月第一版　　开本：850×1168　1/32

1988 年 7 月第一次印刷　　印张：13

印数：精 1— 950　　插页：精 2

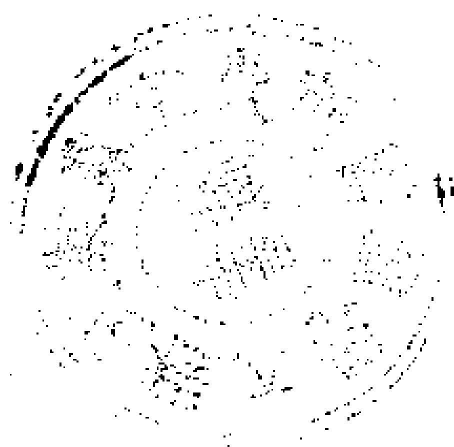
平 1—3,900　　字数：339,000

ISBN 7-03-000476-0/O·130

定价：布面精装 5.50 元

平　　装 4.00 元

科技新书目：168-平 076　精 077



序　言

我们知道，在数学的各个分支中，几何学自古以来一直被数学家们所重视。其原因在于：几何学研究的是自然现象的某种表现形式，而自然现象具有很真实的感觉，所以它们一直是数学家灵感的重要泉源。因此，几何学和数学的其他分支有着极为密切的关系；当然也由于自然科学的发展而得到推动。本世纪三十年代 Einstein 提出的广义相对论，近二十年来 Yang-Mills 提出的规范场论，等等，就是几何学和物理结合的最好例子。

几何学的主要部分是微分几何学。近代微分几何学研究流形上的解析结构和这种结构所蕴含的几何现象。这些可以说是由 Gauss 和 Riemann 等人所奠基的。自从 Riemann 提出 Riemann 几何以后，局部几何学就有了飞速的发展，产生了张量分析。同时，Klein 发表了著名的埃尔兰根纲领，由群论角度研究空间变换群的不变量，从而引进了各种不同的几何学。另外，复变函数的单值化理论促进了 Riemann 曲面的研究。这种种理论以及经典的曲面理论，构成了二十世纪微分几何发展的基础。

在二十世纪，微分几何的发展极其迅速，大致可分为四个不同方面。

第一方面，Cartan 和 Weyl 作了 Lie 群和 Riemann 对称空间的分类，Cartan 将联络的概念推广，将 Klein 的理论和 Riemann 几何融合，又引进了外微分，发展了 Cartan-Kähler 理论，因此，使局部微分几何大大地推进了一步；

第二方面，由于拓扑学和代数几何的蓬勃发展，de Rham, Hodge, Kodaira, Hopf, Lefschetz, Whitney, Weil, 陈省身（S. S. Chern）等人将它们和微分几何建立起密切的关系，从而发展了整体微分几何；

第三方面，由于古典几何学的影响，凸曲面几何学、综合几何学、积分几何学在 Alexandroff, Cohn-Vossen, Pogorelov, Busemann, Rauch, Santalo 等人的领导下，有了很大的进展；

第四方面，由于微分方程理论的逐渐成熟，几何学家开始应用分析方法来解决几何问题，反过来，微分几何理论又提供了大量有意义的微分方程，而研究这些方程，往往要提出新的观点和方法，所以分析学家也密切注意着几何学的发展，在这方面的领导人有 Hadamard, Morse Lewy, Morrey, Bochner, Nash, Moser, Nirenberg, Efimov. 他们的工作，奠定了近二十年来非线性偏微分方程在几何中的应用的基础.

本书将介绍上述的主要工作，读者可以发现，微分几何是一个整体的学问，上述四个方面实际上是很自然地融合在一起的，因此，第一册的目的在于研究 Riemann 流形上整体微分方程理论，并且导出曲率与拓扑之间的关系. 在第一册中，我们只讨论一个方程的情形. 在陆续出版的第二册和第三册中，我们会涉及方程组的问题，例如，我们将要涉及 Hodge 理论、极小子流形、调和映射、规范场、Kähler 流形、Monge-Amperé 方程，其中将讨论几何与拓扑、代数几何、广义相对论和高能物理之间的关系.

第一册包含六章内容，前四章讨论 Laplace 算子，它是微分几何中最重要的算子. 这是由于很多重要的非线性算子在线性化后，往往是某个 Riemann 度量的 Laplace 算子. 在具体讨论中，我们往往要用线性算子去逼近非线性算子，所以我们希望给出尽量不依赖于 Riemann 度量的各种估计，我们考虑的空间，可能是有界函数空间，也可能是平方可积函数空间. 我们知道，在经典调和分析中，主要是考虑 R^n 及其中的有界域上的调和函数，它们的推广应该是完备 Riemann 流形，其中有非负 Ricci 张量的流形对应于 Euclid 空间、有负曲率的流形对应于有界域. 原则上来说，经典调和分析中的主要定理在流形上都应该有相应的推广. 本书前二章，就是讨论其中比较重要的推广. 值得注意的是，我们往往要提出新的方法来进行这种推广. 同时，我们发现，很多几何问题

又都可以用这种分析方法来解决．当 Laplace 算子作用在平方可积函数空间时，最重要的是研究此算子的谱分析．当流形为紧时，谱是离散的，所以在第三章中，我们研究特征函数及谱的性质；在第四章中，我们研究热核，目的也在于研究谱的性质，也希望研究波动核的性质，其原因自然是由于它提供了谱和测地线之间的关系．当流形非紧时，我们对谱的性质知道得仍然很少，特别是关于连续谱的情形．这些希望以后能够涉及．

第五、六章主要考虑由于保角形变所导出的非线性偏微分方程．这方面，从 Poincaré 起，就不断有工作，我们首先讨论了 Yamabe 问题．当然，只限于紧流形的情形．在非紧流形的情形，Yamabe 问题还没有完全解决，希望以后也能涉及．在第六章考虑保角平坦 Riemann 流形的性质．在那里，读者可以发现，在纯量曲率恒正的情形，对这种流形可以有一个比较清楚的了解；但是在负纯量曲率的情形，则仍然是一个困难的问题．

由于整体微分几何方面没有一本比较适合的教科书，特别是以拓扑、代数几何为基础，以分析为主要工具的系统教材，我们这本书可以说是这方面的一个尝试．

本书是作者的一系列演讲，其中前部分是 1983 年在 Princeton 讲的四章，由钟家庆整理讲稿，后部分是 1984 年及 1985 年在 San Diego 讲的两章，第五章由许以超和丁伟岳整理讲稿，第六章的主要结果是作者们在此期间获得的，此章由张恭庆整理讲稿．整理讲稿的各位数学家都是学有专长，往往在整理期间加上他们极宝贵的意见，使本书生色不少．另外，作者的学生田刚、曹怀东、李俊等人进行了修改，在此一并表示感谢．由于水平有限，书中错误及不妥之处自属难免，还望读者多多提出宝贵意见．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
孙理察 (Richard Schoen)
1986 年 2 月 1 日于加州大学圣地亚哥分校

目　录

第一章　比较定理与梯度估计

§1. 比较定理

比较定理是流形上的分析的基本工具之一，其本质是通过对 Jacobi 场与流形曲率的联系，以及流形曲率的性质进行分析而获得关于流形的更一般的性质．另一方面，从 Jacobi 方程看，它又是微分方程在几何中的应用．例如，比较定理之一——Bonnet 定理，就是应用 Sturm-Liouville 理论的结果．在几何中，有各种形式的比较定理，例如 Rauch 定理等(见 Cheeger, Ebin 的书)，但是由于本书旨在研究流形曲率与调和函数的关系，在此我们只给出本书常用的比较定理——Hesse 形式的比较定理，以及相应的推论．

设 M 是 n 维完备的 Riemann 流形；其 Riemann 度量记为

$$ds^2 = \sum g_{ij}dx^i dx^j,\quad x^i(i = 1, 2, \cdots, n)$$

是局部坐标，熟知 (M, ds^2) 上有一常用微分算子——Laplace-Bertrami 算子，其定义为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\ g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其中，$g = \det(g_{ij})$，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$．

M 上有一个自然的函数，即关于一固定点的距离函数．任取固定点 $O \in M$，定义

$$\rho(x) = \operatorname{dist}(o, x),\ \forall x \in M.$$

显然，$\rho(x)$ 不仅是连续的，而且满足 Lipschitz 条件．由测度论可知，$\rho(x)$ 几乎处处可微．

对固定点 $O \in M$，考虑指数映射 $\exp_O: T_OM \to M$，其存在性是熟知的 Hopf-Rinow 定理以及 M 的完备性的直接推论．$\forall X \in T_OM$．设 $\gamma(t) = \exp_O(tX)$，则 $\gamma: R \to M$ 是从 O 出发的

沿方向X的光滑测地线，当$|t|$很小时，γ是连结$\gamma(t)$与O的唯一极小测地线，且$d\exp_O|_{tX}:T_{tX}(T_OM)\to T_{\exp_O(tX)}M$是微分同胚. 随着$|t|$值的增大，有两种情形可能发生：(i) $\gamma(t)$不再是连结O与$\gamma(t)$的极小测地线，(ii) $d\exp_O|_{tX}$不再是微分同胚，这时我们称$\gamma(t)$是相对于O的共轭点 (conjugate point)。

令

$$t_0=\sup\{t|\gamma\ \text{是连结}\ \gamma(t)\ \text{和}\ O\ \text{的唯一极小测地线}\},$$

则$t_0\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. 如果$t_0<+\infty$，我们称$\gamma(t_0)$为相对于$O$的沿$\gamma$的割点 (cut point). 所有相对于$O$的割点构成割迹 (cut locus). 从定义易知，如果x属于点O的割迹，则或者 (i) x是沿γ的相对于O的第一个共轭点，或者 (ii) 至少存在两条长度相同的极小测地线连结O和x. 我们记此割迹为$\mathrm{cut}(O)$.

显然，对于任一$X\in T_OX$，$\|X\|=1$，在测地线$\exp_O(tX)$ $(t\geqslant 0)$上至多有一割点，因此$\mathrm{cut}(O)$是S^{n-1}中一闭子集在指数映射$\exp_O$下的象，所以其n维测度为0.

进一步，记$\mu(X)=\mathrm{dist}\,(O,\gamma(t_0))$为沿$\gamma$至割点的距离，其中$X\in S^{n-1}\subset T_OM$.

定义.

$$E=\{tX|0\leqslant t<\mu(X),\ X\in S^{n-1}\subset T_OM\},$$

则$\exp_O:E\to\exp_O(E)$是微分同胚，因而诱导M的一个正规标架，显然，这是M以O为原点的可能的最大正规标架，且

$$M=\exp_O(E)\cup\mathrm{cut}(O).$$

从定义可看出，$\exp_O(E)$是以O为中心的星形区域 (star domain)，而前面定义的相对于O的距离函数$\rho(x)$，在$\exp_O(E)$中是光滑的. 作为星形区域$\exp_O(E)$的边界，$\mathrm{cut}(O)$中有些点可能为不同方向的割点的重合点(即可能$X_1\neq X_2$，但

$$\exp_O(\mu(X_1)X_1)=\exp_O(\mu(X_2)X_2).$$

在$\rho(x)$的可微点上，因为测地线以弧长为参数，故有

$$|\nabla\rho|=1,$$

即 $\sum g^{ij}\rho_i\rho_j = 1$，其中 ρ_i 为 ρ 沿 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 方向的协变微分。（关于指数映射的上述性质见 Cheeger，Ebin 的书。）

熟知，在 M 中任意一点 p 处的 Ricci 曲率是一个双线性型

$$\mathrm{Ric}: T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}.$$

在 p 点的切空间 T_pM 中取单位正交标架 $\{e_i\}$，$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$，如果 $e = \sum a^i e_i$，则

$$\mathrm{Ric}(e, e) = \sum R_{ij}a^i a^j,\quad R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j).$$

如果取 $e = e_n$，则

$$\mathrm{Ric}(e, e) = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e),$$

其中 $K(e_i, e)$ 是由 e，e_i 所张成的二维平面所对应的截面曲率。

设 $f \in C^2(M)$。f 的 Hesse 形式记作 $H(f)$，定义如下：设 X，Y 是过点 $x \in M$ 的两切向量。将 X，Y 扩充成在 x 的邻域内可微的向量场 $\tilde{X}$，$\tilde{Y}$，定义

$$H(f)(X,Y) = (\tilde{X}\tilde{Y}f)(x) - (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}f)(x). \tag{1.1.1}$$

此处 ∇ 表示M的 Riemann 联络。容易验证，$H(f)(X,Y)$ 不依赖于扩充向量场 $\tilde{X}$，$\tilde{Y}$ 的选择。

固定 $p \in M$，对任何 p 的割迹之内的点 x，记连结 p 和 x 的极小测地线为 σ，使 $\sigma(0) = p$，$\sigma(r) = x$。任取 $X \in T_xM$，$\langle X, \partial/\partial r\rangle(x) = 0$，因为 x 不是 p 的共轭点，我们可以将 X 扩充成沿 σ 的一个 Jacobi 场 $\tilde{X}$，满足 $\tilde{X}(\sigma(0)) = 0$，$\tilde{X}(\sigma(r)) = X$，$\left[\tilde{X}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right] = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant r)$（参见 Cheeger 的工作）。这样，有

$$\begin{aligned}
H(r)(X, X) &= \tilde{X}\tilde{X}r - (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{X})r \\
&= X\left\langle \tilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\tilde{X}}\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{X}, \nabla_{\tilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\
&= \langle \tilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\tilde{X}\rangle.
\end{aligned}$$

最后一步是由于 $\left[\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right]=0$. 因此，在 x 点上，有

$$H(r)(X, X)=\int_0^r \frac{d}{dt}\langle\tilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}\rangle dt$$

$$=\int_0^r (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}|^2+\langle\tilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}\rangle)dt.$$

但由于 $\tilde{X}$ 是 Jacobi 场，即

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}+R\left(\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}=0,$$

所以

$$H(r)(X, X)=\int_0^r \left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}|^2 - \left\langle R\left(\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}\right\rangle\right) dt. \qquad (1.1.2)$$

注：在 Jacobi 场的理论中，上述表达式正是向量场 $\tilde{X}$ 沿 σ 的"指数式"(index form) $I_0^r(\tilde{X})$. (可参见 Cheeger, Ebin 的书。)

比较定理. 设 M_1 和 M_2 是两个 n 维完备 Riemann 流形，$\gamma_i:[0, a]\to M_i$, $(i=1, 2)$ 是两条以弧长为参数的测地线. 记 M_i 上以 $\gamma_i(0)$ 为起点的距离为 ρ_i. 设 $\gamma_i(a)$ 在 $\gamma_i(0)$ 的割迹之内，假定 $\forall t(0\leqslant t\leqslant a)$, 有

$$\text{截面曲率 } K_1\left(X, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\geqslant \text{截面曲率 } K_2\left(Y, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right),$$

其中 X 和 Y 分别是 $T_{\gamma_1(t)}M_1$ 和 $T_{\gamma_2(t)}M_2$ 中与切向量 $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$ 正交的单位向量，则

$$H(\rho_1)(X_1, X_1)\leqslant H(\rho_2)(X_2, X_2), \qquad (1.1.3)$$

此处 X_i 是 $T_{\gamma_i(a)}M_i$ 中的单位向量，且 $\left\langle X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle(\gamma_i(a))=0$.

证明：沿 γ_i 作正交的平行向量场 $E_1^{(i)}, \cdots, E_n^{(i)}$, 使

$$E_n^i=\frac{\partial}{\partial\gamma_i} \quad (i=1, 2).$$

由(1.1.2)，有

$$H(\rho_i)(X_i, X_i) = \int_0^a \left(\left| \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \tilde{X}_i \right|^2 - \left\langle R\left(\tilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\right) \frac{\partial}{\partial \gamma_i}, \tilde{X}_i \right\rangle \right) d\gamma_i,$$

其中 $\tilde{X}_i$ 是沿 γ_i 的 Jacobi 场，$\tilde{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$，$\tilde{X}_i(\gamma_i(a)) = X_i$。因为 $\left\langle X_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \right\rangle = 0$，所以 $\tilde{X}_i$ 在 γ_i 的各点都和 $E_n^{(i)}$ 正交。记

$$\tilde{X}_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^{(2)}.$$

根据 $E_j^{(1)}(a)$ 的取法的任意性，自然可假定

$$X_1 = \tilde{X}_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(a) E_j^{(1)}.$$

沿测地线 γ_1 定义向量场 Z：

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^{(1)},$$

则 Z 和 $\tilde{X}_1$ 有相同的始值和终值，并且 $|\tilde{X}_2| = |Z|$ 及

$$|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \tilde{X}_2| = |\sum \lambda_j'(t) E_j^{(2)}| = |\sum \lambda_j'(t) E_j^{(1)}| = |\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z|.$$

根据 Jacobi 场理论中的基本事实(见 Cheeger, Ebin 的书)：沿一条无共轭点的测地线在具相同始终值的所有向量场的“指数式”中以 Jacobi 场的指数式为最小，由此即得

$$\begin{aligned} H(\rho_1)(X_1, X_1) &= I_0^a(\tilde{X}_1) \leqslant I_0^a(Z) \\ &= \int_0^a \left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z|^2 - \left\langle R\left(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}\right) \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, Z \right\rangle \right) d\gamma_1 \\ &= \int_0^a \left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \tilde{X}_2|^2 - \left\langle R\left(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}\right) \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, Z \right\rangle \right) d\gamma_1 \\ &\leqslant \int_0^a \left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \tilde{X}_2|^2 - \left\langle R\left(\tilde{X}_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2}\right) \frac{\partial}{\partial \gamma_2}, \tilde{X}_2 \right\rangle \right) d\gamma_2 \end{aligned}$$

$$= I_0^a(\tilde{X}_2) = H(\rho_2)(X_2, X_2).$$

最后的不等号是由于定理的假设．定理至此证毕．

在讨论流形上的分析问题时，以下形式的 Laplace 算子比较定理非常有用；它的证明是上述定理的直接推论．

系 1.1.1. (Laplace 算子比较定理)．设 n 维完备 Riemann 流形 M，其 Ric $(M) \geqslant -(n-1)k^2 (k \geqslant 0)$．再设 N 为 n 维单连通的以 $(-k^2)$ 为常曲率的空间，称为空间形式(space form)．以 ρ_M 和 ρ_N 分别记 M 和 N 上相对固定点的距离．如果 $x \in M$，$y \in N$，使 $\rho_M(x) = \rho_N(y)$，则当 x 是 ρ_M 的可微点时，有

$$\Delta\rho_M(x) \leqslant \Delta\rho_N(y). \tag{1.1.4}$$

为了得出更便于应用的形式，我们需要计算常曲率 $(-k^2)$ 空间中的 $\Delta\rho$．根据(1.1.2)，

$$H(\rho)(X, X) = \int_0^\rho \left(\left| \frac{\partial}{\partial\gamma} \tilde{X} \right|^2 - \left\langle R\left(\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right) \frac{\partial}{\partial\gamma}, \tilde{X} \right\rangle \right) d\gamma,$$

其中 $\tilde{X}$ 是沿极小测地线 γ 的 Jacobi 场，满足 $\tilde{X}(0) = 0$，

$$\tilde{X}(\gamma(\rho)) = X.$$

因此计算 $\Delta\rho$ 化为求沿极小测地线的 Jacobi 场的问题．

在以 $-k^2$ 为常曲率的空间形式中，沿任何正则测地线 γ 的 Jacobi 场可以这样求得：设 $p = \gamma(0)$，$q = \gamma(\rho)$，$X \perp \dot{\gamma}(\rho)$，将 X 沿 γ 平行移动得到的向量场仍记为 $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \rho)$，那么沿 γ 的 Jacobi 场 $Y(t)$，如果满足 $Y(0) = 0$，$Y(\rho) = X$，则具有以下形式：

$$Y(t) = f(t)X(t),$$

其中函数 $f(t)$ 满足经典的 Jacobi 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} f(t) - k^2 f(t) = 0, \\ f(0) = 0, \ f(\rho) = 1. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

熟知 (1.1.5) 的解为

$$f(t) = \frac{1}{R} \operatorname{sh} kt. \tag{1.1.6}$$

将 (1.1.6) 代入 (1.1.2), 即得

$$\Delta\rho = (n-1)k \coth k\rho. \tag{1.1.7}$$

系 1.1.2. 如果 n 维完备 Riemann 流形的 Ricci 曲率 $\geqslant -(n-1)k^2$, 则在 ρ 的可微点上有

$$\Delta\rho \leqslant \frac{n-1}{\rho}(1+k\rho). \tag{1.1.8}$$

证明: 根据 Laplace 算子比较定理及 (1.1.7), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho &\leqslant (n-1)k \coth k\rho \\ &= \frac{n-1}{\rho} k\, \rho \coth k\rho.\end{aligned}$$

易知

$$k\, \rho \coth k\rho \leqslant (1+k\rho),$$

所以

$$\Delta\rho \leqslant \frac{n-1}{\rho}(1+k\rho).$$

系 1.1.3. 以 r 表示对固定点而言的距离, 如果流形的 Ricci 曲率满足 $\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \geqslant -c(r)$, 则在固定点的割迹之内, 有

$$\Delta r \leqslant \frac{n-1}{r} + \frac{1}{r^2}\int_0^r c(t)t^2 dt. \tag{1.1.9}$$

证明: 由 (1.1.2), 知道

$$\begin{aligned}H(r)(X, X) = \int_0^r \Big(&|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{X}|^2 \\ &- \left\langle R\left(\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}\right\rangle \Big) dt,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{X}$ 是 X 沿极小测地线 γ 扩充而成的 Jacobi 场. 现将 X 沿 γ 平行移动得到向量场 E, 则向量场 $\left(\frac{t}{r}\right)E$ 在 $\gamma(0)$ 为零而在 $\gamma(r)$

处为 X. 同样,根据"指数式"的极小性,有

$$
\begin{aligned}
H(r)(X,X) &= I_0^r(\widetilde{X}) \leqslant I_0^r\left(\frac{t}{r}E\right) \\
&= \int_0^r \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{t}{r} E\right|^2 - \left\langle R\left(\frac{t}{r}E, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \frac{t}{r}E\right\rangle \right) dt \\
&= \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\int_0^r t^2 K\left(E, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt. \qquad (1.1.10)
\end{aligned}
$$

现在,我们取 $\frac{\partial}{\partial r}$ 的正交补向量 $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$, 将 X_i 沿 γ 平行移动得正交向量场 $E_i (i=1,2,\cdots,n-1)$, 在(1.1.5)中以 X_i 代其中的 X, 再将所得到的 $n-1$ 个不等式相加, 并注意 $H(r)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)=0$ 的事实,就有

$$
\begin{aligned}
\Delta r &= \sum_{i=1}^{n-1} H(r)(X_i, X_i) \\
&\leqslant \frac{n-1}{r} - \frac{1}{r^2}\int_0^r t^2 \sum_{i=1}^{n-1} K\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) dt \\
&= \frac{n-1}{r} - \frac{1}{r^2}\int_0^r t^2 \operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) dt \\
&\leqslant \frac{n-1}{r} + \frac{1}{r^2}\int_0^r t^2 c(t) dt.
\end{aligned}
$$

最后一步是根据假设. 此系得证.

根据(1.1.9), 当流形的 Ricci 曲率非负时, 在 r 的可微点上总有

$$\Delta r \leqslant \frac{n-1}{r}. \qquad (1.1.11)$$

不幸的是,上式在割点处失去意义. 然而,在研究流形整体性态时, 由于 $M = \exp_O(E) \cup \mathrm{cut}(O)$, 且 $\exp_O(E)$ 是星形区域, 所以 M 的拓扑性质表现于 $\mathrm{cut}(O)$ 附近,致使我们希望在 $\mathrm{cut}(O)$

附近 $\Delta\rho$ 仍具较好的性质。ρ 的 Lipschitz 性质促使我们在分布(distribution) 意义下考虑 $\Delta\rho$ 及(1.1.11)。对于 Riemann 完备流形，确有

命题 1.1.1. 设M是完备的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率非负。任意固定一点 $p\in M$，记相对于 p 的距离函数为 ρ，则在分布意义下下列不等式成立:

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}. \tag{1.1.12}$$

证明：设 E 表示 p 的割迹。$M=\Omega\cup E$，其中 Ω 是一星形区域。Lipschitz 函数 ρ 在 Ω 中是可微的，因此由 (1.1.11)，在 Ω 中有

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}.$$

为了证明(1.1.12)，我们取任意 $\varphi\in C_0^\infty(M)$，$\varphi\geqslant 0$。因为

$$\mathrm{mes}(E)=0,$$

因而有

$$\int_M\rho\Delta\varphi=\int_\Omega\rho\Delta\varphi.$$

取一族星形子域 Ω_ε，使 $\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$，$\lim\Omega_\varepsilon=\Omega$，并且 Ω_ε 是 Ω 沿 ρ 方向内缩而成的。因为 Stokes 公式对 Lipschitz 函数仍然成立，再注意到 $\varphi\in C_0^\infty(M)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_M\rho\Delta\varphi&=-\int_M\nabla\varphi\cdot\nabla\rho\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\rho\cdot\nabla\varphi.\end{aligned}$$

最后一步是因为 $|\nabla\rho|=1$ 几乎处处成立，以及 $\nabla\varphi$ 是有界的。由 Green 公式

$$-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\rho\cdot\nabla\varphi=\int_{\Omega_\varepsilon}\Delta\rho\cdot\varphi-\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi\frac{\partial\rho}{\partial\nu},$$

其中 ν 是 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的外法线方向。因为$\varphi\geqslant 0$ 以及 Ω_ε 是由 Ω 沿 ρ 方向内缩而成的，所以 $\dfrac{\partial\rho}{\partial\nu}>0$，于是有

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\rho\cdot\nabla\varphi \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\rho\cdot\varphi$$
$$\leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{n-1}{\rho}\cdot\varphi.$$

最后得到

$$\int_M \rho\cdot\Delta\varphi \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{n-1}{\rho}\varphi$$
$$=\int_{\Omega} \frac{n-1}{\rho}\varphi$$
$$=\int_M \frac{n-1}{\rho}\varphi.$$

命题证毕。

注：上述命题可以用来证明著名的 Cheeger-Gromoll 的分裂定理。这是下节的内容。

替代关于一点的距离函数，我们可以考虑关于一子流形的距离函数，通过同样的讨论不难得到这一函数的若干类似性质，只不过涉及子流形的平均曲率及第二基本形式。

局部体积及整体体积的大小，直接影响了流形的许多性质。例如，流形的谱的估计、热方程积分核的估计、以及 Sobolev 嵌入常数和等周常数等，都与体积有关。尤其本书的许多定理都是以体积元的估计为基础的，因此，我们给出下面的体积比较定理。首先我们回顾一些关于 Jacobi 场及测地球体积的若干基本事实(见 Berger, Gauduchon, Mazet 的书)。

设 $x\in M$ 是流形 M 上任一固定点，$\gamma(t)$ 是从 x 出发的一测地射线，$\gamma(0)=x$, $\dot\gamma(0)=v\in T_xM$. 如果 $Y(t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，满足 $Y(0)=0$, $Y'(0)=w\in T_xM$，则基点为 x 的指数映射 exp 在 $tv\in T_xM$ 的微分在向量 v, w 上的取值分别为

$$\exp_*(v)=\dot\gamma(t),$$
$$\exp_*(w)=t^{-1}Y(t). \tag{1.1.13}$$

根据 Gauss 引理，如果 $v\in T_xM$, $\left\langle v, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right\rangle_x=0$，则

$$\left\langle \exp_*(v),\ \exp_*\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\right\rangle = 0,$$

令 $v=\dot\gamma(0)$, w_2, $\cdots$, w_n 组成 T_xM 的一组正交基，则 $\dot\gamma(t)$, $\exp_*(w_i)=t^{-1}Y_i(t)(i=2,\cdots,n)$ 组成 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基，只要 $\gamma(t)$ 不是沿 γ 关于 x 的共轭点. 所以映射 exp 在 tv 处的 Jacobi 行列式 $A(t,\theta)$ 为

$$\begin{aligned} A(t,\theta) &= |\dot\gamma(t)\wedge t^{-1}Y_2\wedge\cdots\wedge t^{-1}Y_n| \\ &= \frac{1}{t^{n-1}}\det(Y_2(t),\cdots,Y_n(t)), \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

其中 θ 为在 x 处的正规标架中的球面坐标分量，满足

$$\frac{v}{|v|}=\theta.$$

根据上式及经典的 Rauch 比较定理，Bishop 证明了以下重要结果(见 Bishop-Crittenden, Geometry of Manifolds, Academic Press, 1964).

定理 (Bishop). 对于完备 Riemann 流形 M，如果 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant(n-1)K$，则

$$A(t,\theta)S_K^{1-n}(t)$$

是 t 的非增函数，其中 $S_K(t)$ 和 t 满足:

当 $K>0$ 时，$S_K(t)=\dfrac{\sin\sqrt{K}t}{\sqrt{K}}$，$0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{\sqrt{K}}$，

当 $K=0$ 时，$S_0(t)=t$，$0\leqslant t<+\infty$，

当 $K<0$ 时，$S_K(t)=\dfrac{\sinh\sqrt{-K}\,t}{\sqrt{-K}}$，$0\leqslant t<+\infty$.

证明见上述引文. 如果我们把以 x 为中心、t 为半径的测地球记为 $B_x(t)$，则上述的 $A(t,\theta)$ 实为用 x 处的正规球坐标 (t,θ)，$\theta\in S^{n-1}(1)$ 表述的 $\partial B_x(t)$ 的体积元素.

现在考虑曲率为常数K的单连通常曲率流形(称为空间形式) M^K，则上述 $S_K^{n-1}(t)$ 实为 M^K 中半径为 t 的测地球面的体积元

素．将 $S_K^{n-1}(t)$ 改记为 $\mathfrak{A}_K(t)$，则 Bishop 定理可表示为

$$\frac{A(t,\theta)}{\mathfrak{A}_K(t)}\downarrow. \tag{1.1.15}$$

当然，当 $K>0$ 时，上述事实只对于 $t\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ 才成立．

以 $U\subset T_xM$ 表示 x 的切空间中相对于 x 的割迹的内部．以 $S_t(0)$ 表示 T_xM 中半径为 t 的球面，则 (1.1.15) 蕴含

$$\frac{\int_{S_t(0)\cap U}A(t,\theta)}{\int_{S_t(0)}\mathfrak{A}_K(t)}\downarrow, \tag{1.1.16}$$

可能存在割点并不影响 (1.1.16) 的成立(证明中用到 $\mathfrak{A}_K(t)$ 与 θ 无关，从积分的定义出发即可验知这一事实)．记

$$f(t)=\int_{S_t(0)\cap U}A(t,\theta),\quad g(t)=\int_{S_t(0)}\mathfrak{A}^K(t),$$

则

$$\mathrm{Vol}(B_x(t))=\int_0^t f(s)ds,$$

$$\mathrm{Vol}(B^K(t))=\int_0^t g(s)ds,$$

其中 $B^K(t)$ 表示空间形式 M^K 中半径为 t 的测地球．根据下面将证明的命题，即可得体积的比较定理．

定理（体积比较定理）．设 M 是完备 Riemann 流形，

$$\mathrm{Ric}(M)\geqslant(n-1)K,$$

任取 $x\in M$，则

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{V(K,r)}\downarrow, \tag{1.1.17}$$

其中 $V(K,r)$ 是空间形式 M^K 中半径为 r 的测地球的体积．

命题．如果 $f(s)$，$g(s)>0$，$f(s)/g(s)$ 非增，令

$$F(t)=\int_0^t f(s)ds,\quad G(t)=\int_0^t g(s)ds,$$

则 $F(t)/G(t)$ 亦非增．

证明：任取 $r_1 \leqslant t_i < t_{i+1}$，由于

$$\frac{F'(r_1)}{G'(r_1)} \geqslant \frac{F'(t_i)}{G'(t_i)} = \frac{F'(t_i)\Delta t_i}{G'(t_i)\Delta t_i},$$

所以

$$\frac{F'(r_1)}{G'(r_1)} \geqslant \frac{\sum F'(t_i)\Delta t_i}{\sum G'(t_i)\Delta t_i} \to$$

$$\frac{\int_{r_1}^{r_2} F'(t)dt}{\int_{r_1}^{r_2} G'(t)dt} = \frac{F(r_2) - F(r_1)}{G(r_2) - G(r_1)}$$

只要 $r_1 \leqslant r_2$。

同理，只要 $r_0 \leqslant r_1$，又有

$$\frac{F(r_1) - F(r_0)}{G(r_1) - G(r_0)} \geqslant \frac{F'(r_1)}{G'(r_1)}.$$

所以只要 $r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2$，即有

$$\frac{F(r_1) - F(r_0)}{G(r_1) - G(r_0)} \geqslant \frac{F(r_2) - F(r_1)}{G(r_2) - G(r_1)}.$$

令 $r_0 = 0$，$F(0) = G(0) = 0$，即得

$$\frac{F(r_1)}{G(r_1)} \geqslant \frac{F(r_2)}{G(r_2)}.$$

命题证毕。

最后，在 Bishop 定理 (1.1.16) 中，由 $\forall t > 0$，

$$\frac{\int_{S_t(0)\cap U} A(t, \theta)}{\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t)} \leqslant \left[\frac{\int_{S_t(0)} A(t, \theta)}{\int_{S_t(0)} \mathfrak{A}_K(t)}\right]_{t=0} = 1.$$

再对 t 积分，即得

定理. 对于完备 Riemann 流形 M，如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant (n-1)K$，$x \in M$，则 $\forall R \geqslant 0$，使

$$\mathrm{Vol}(B_x(R)) \leqslant V(K, R), \tag{1.1.18}$$

其中 $V(K, R)$ 是空间形式 M^K 中的半径 R 的测地球体积。

至于 $\mathrm{Vol}(B_x(R))$ 的下界，根据比较定理有以下熟知的事

实：

如果 Riemann 流形 M 的截曲率满足 $K_M \leqslant b^2$. 任取 $x \in M$，而 $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ (1) 表示在 x 处的正规测地坐标系，将 M 的度量按此坐标系表示为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 g_{ij}(\theta) d\theta^i d\theta^j, \tag{1.1.19}$$

则当 $r < \frac{\pi}{b}$ 时，有

$$\sqrt{\det(g_{ij})} \geqslant \left(\frac{\sin br}{br}\right)^{n-1}. \tag{1.1.20}$$

由此可知，只要 $K_M \leqslant b^2$，则

$$\mathrm{Vol}(B_x(R)) \geqslant C(n, b, R). \tag{1.1.21}$$

常数 $C(n, b, R)$ 不依赖于 x.

注：当 M 是完备非紧流形时，$\mathrm{Vol}(B_x(R))$ 的渐近性质 $(R \to +\infty)$ 是很有意义的问题，它反映了 M 在无穷远处的拓扑性质，最简单例子之一是平坦流形情形，$\mathrm{Vol}(B_x(R)) = O(R^k)$ $(R \to +\infty)$，其中 $n-k$ 是 M 中环面的维数. 我们期望建立一些 $\mathrm{Vol}(B_x(R))$ 的渐近估计，且估计仅依赖于流形的曲率及拓扑.

§2. 分裂（splitting）定理

通常当我们研究一般流形性质，或者进行分类时，总希望找到某种约化方法，使得问题化为研究某些不能再约化的流形——不可约流形的情形. 微分几何中的分裂定理给出了实现这种约化的一条途径. 本节中要证明 Cheeger-Gromoll 的定理，即 Riemann 流形在某些条件下等距于 R^k 与不具测地直线的流形的积. 应指出的是，如果 M 是非负截曲率的完备流形，则 Toponogov 证明：M 是 R^k 与一不具测地直线的流形的积，即 Toponogov 分裂定理(见 Cheeger, Gromoll 的文章).

Cheeger-Gromoll 分裂定理的证明基于 Busemann 函数的研究. 首先我们来介绍这一概念.

完备流形 M 上一条测地直线(相应地,一射线)指的是一正则测地线 $\gamma:(-\infty,+\infty)\to M$ (相应地, $\gamma:(0, +\infty)\to M$), 使得 γ 上任何两点的距离(指在 M 上的距离)恰好等于 γ 上这两点间线段的长度,即 $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$. 众所周知, 如果 M 完备且非紧,则从 M 上任何一点出发都存在这样的射线 γ.

设 γ 是从某固定点出发的一射线,则与 γ 相联系的 Busemann 函数定义为

$$B^+(x) = \lim_{t\to+\infty} (d(x, \gamma(t)) - t). \qquad (1.2.1)$$

如果记 $B_t^+(x) = d(x, \gamma(t)) - t$, 则由三角不等式,显然有

$$|B_t^+(x)| \leqslant d(\gamma(0), x).$$

因此,函数族 $\{B_t^+(x)\}$ 在任何紧子集上是一致有界的. 并且如果 $s < t$, 则有

$$B_t^+(x) - B_s^+(x) = d(x, \gamma(t)) - d(x, \gamma(s))$$
$$- d(\gamma(s), \gamma(t)) \leqslant 0.$$

所以函数族 $\{B_t^+(x)\}$ 是单调递减的. 因此, $\lim_{t\to\infty} B_t^+(x) = B^+(x)$ 在任何紧子集上一致收敛.

同时,因为对任何固定的 t, 取 $|B_t^+(x) - B_t^+(y)| \leqslant d(x,y)$, 的极限, 自然亦有 $|B^+(x) - B^+(y)| \leqslant d(x, y)$, 即 $B^+(x)$ 也是 Lipschitz 连续的,因而几乎处处可微.

根据定义,当 t 固定时,集合 $\{x|B_t^+(x) <$ 常数$\}$正是以 $\gamma(t)$ 为中心的测地球. 因此我们可以直观地把集合 $\{x|B^+(x) <$ 常数$\}$理解成以 $\gamma(\infty)$ 为中心的测地球.

如果 γ 是一测地直线,那么我们还可以类似地定义另一 Busemann 函数 $B^-(x)$:

$$B^-(x) = \lim_{t\to-\infty} (d(x, \gamma(t)) + t). \qquad (1.2.2)$$

由定义及三角不等式,易见

$$B^+ + B^- = 0, \text{ 在 } \gamma \text{ 上}, \qquad (1.2.3)$$

$$B^+ + B^- \geqslant 0. \qquad (1.2.4)$$

现在我们可以着手叙述和证明分裂定理.

分裂定理 (Cheeger-Gromoll, 1971). 设 M 是一完备的 Riemann 流形,具有一测地直线. 如果 M 的 Ricci 曲率非负,那么 M 可以"分裂"为 $\mathbf{R}$ 和低一维的 Riemann 流形的拓扑积,即 $M = \mathbf{R} \times N$. "="号在这里表示等距 (isometry).

证明: 我们将给出证明的概述,而其中涉及的技术步骤则作为命题放在本节的末尾.

记 γ 为 M 中的测地直线. 固定 $p = \gamma(0) \in \gamma$. 根据命题 1.1.1, 对任何 $\varphi \in C_0^\infty(M)$, $\varphi \geqslant 0$ 以及任何固定的 t, 有

$$\int_M \varphi \Delta(\rho(x,\gamma(t)) - t) = \int_M \varphi \Delta \rho(x, \gamma(t))$$

$$\leqslant \int_M \frac{n-1}{\rho(x, \gamma(t))} \cdot \varphi.$$

令 $t \to +\infty$, 得

$$\int_M \varphi \Delta B^+ = \int_M \Delta\varphi \cdot B^+ \leqslant 0.$$

所以有结论: 在分布意义下, $\Delta B^+ \leqslant 0$. 同理, 在同一意义下, $\Delta B^- \leqslant 0$. 因此,有

$$B^+ + B^- \geqslant 0,$$

$$B^+ + B^- = 0, \text{ 在 } \gamma \text{ 上},$$

$$\Delta(B^+ + B^-) \leqslant 0, \text{ 在分布意义下}.$$

根据下面要证的命题 1.2.1, 有

$$(B^+ + B^-)(q) \geqslant \frac{1}{R^n} \int_{B(q,R)} (B^+ + B^-).$$

但 $B^+ + B^-$ 在 γ 上为零,在其他部分上非负,取 $q \in \gamma$ 即看出

$$B^+ + B^- \equiv 0.$$

因此, $\Delta B^+ + \Delta B^- = \Delta(B^+ + B^-) \equiv 0$, 故在分布意义下

$$\Delta B^+ = 0, \quad \Delta B^- = 0.$$

根据二阶椭圆型方程理论中的 Weyl 引理, B^+ 和 B^- 实际上是光滑的.

因为 $|\nabla\rho| = 1$ 几乎处处成立,因而 $|\nabla B^+| = 1$, 再根据下面将证明的命题 1.2.2 及其系, ∇B^+ 实际上是 M 上的平行向量

场，即 $\nabla(\nabla B^+)=0$. 然后根据 de Rham 分解定理，M 等度量地分解成 ∇B^+ 的积分曲线与等值曲面的拓扑积. 定理证毕.

命题 1.2.1. 设完备 Riemann 流形 M 的 Ricci 曲率 $\geqslant 0$, Lipschitz 函数 $f\geqslant 0$, $\Delta f\leqslant 0$ (在分布意义下), 任取 $p\in M$, $B(R)$ 表示以 p 为中心、充分小的 R 为半径的测地球，则

$$f(0)\geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}R^n}\int_{B(R)} f, \tag{1.2.5}$$

其中 $\omega_{n-1}=\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))$.

注：命题 1.2.1 就是次调和函数的平均值公式.

证明：设 (r,θ) 为围绕 p 点的正规测地坐标系，其中

$$\theta=\{\theta_i\}(i=1,2,\cdots,n-1)\in S^{n-1}(1).$$

M 的度量 g 可表成

$$ds^2=(dr)^2+r^2g_{ij}d\theta_i d\theta_j.$$

记 $G=\det(g_{ij})$, 则由 $\Delta f\leqslant 0$ 以及 Divergence 定理，对于任何 $0<t\leqslant R$, 有

$$0\geqslant\int_{B(t)}\Delta f=\int_{\partial B(t)}\frac{\partial f}{\partial r}t^{n-1}\sqrt{G}\,d\theta.$$

熟知

$$\Delta r=\frac{n-1}{r}+\frac{\partial\ln\sqrt{G}}{\partial r}.$$

因为 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$, 由 (1.1.11), $\Delta r\leqslant\frac{n-1}{r}$, 因此

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\leqslant 0,$$

于是有

$$\frac{1}{t^{n-1}}\int_{B(t)}\Delta f=\int_{\partial B(t)}\frac{\partial f}{\partial r}\sqrt{G}\,d\theta$$

$$\geqslant\int_{\partial B(t)}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sqrt{G}+f\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)d\theta$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{\partial B(t)} f\sqrt{G}\, d\theta\right).$$

因此，

$$0 \geqslant \frac{d}{dt}\int_{\partial B(t)} f\sqrt{G}\, d\theta.$$

注意 $\sqrt{G}(0)=1$，由上式有

$$\omega_{n-1} f(0) \geqslant \int_{\partial B(t)} f\sqrt{G}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{t^{n-1}}\int_{\partial B(t)} f.$$

将上式由 0 到 R 积分，得

$$f(0) \geqslant \frac{1}{\omega_{n-1} R^n}\int_{B(R)} f.$$

命题 1.2.2. 设 M 是完备的 Riemann 流形，$f\in C^3(M)$，任取 $p\in M$，$\{x_i\}$ 是 p 点处的正规坐标系，则

$$\Delta|\nabla f|^2(p) = 2\sum_{ij}|f_{ij}|^2$$

$$+ 2\sum R_{ij} f_i f_j + 2\sum f_i(\Delta f)_i. \qquad (1.2.6)$$

其中 f_i 是 f 相应于 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的协变微分，R_{ij} 是M的 Ricci 曲率.

注：实际上，上式即为 Bochner 恒等式，由此可以证明许多消没（vanishing）定理.

证明：因为 $|\nabla f|^2 = \sum f_i^2$，因此在 p 点上，有

$$\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_l (|\nabla f|^2)_{ll}$$

$$= \sum_l\left(\sum_i f_i^2\right)_{ll}$$

$$= 2\sum_l\left(\sum f_i f_{il}\right)_l$$

$$= 2\sum f_{il}^2 + 2\sum_{i,l} f_i f_{ill}.$$

而熟知 $f_{ij}=f_{ji}$ 及 Ricci 公式：$f_{iij}=f_{iji}+R_{ij}f_i$，因此，

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla f|^2)&=2\sum f_{ij}^2+2\sum_{i,j}f_i(f_{jji}+R_{ij}f_j)\\&=2\sum_{i,j}f_{ij}^2+2\sum_i f_i(\Delta f)_i\\&\quad+2\sum R_{ij}f_if_j.\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

命题得证.

系. 如果 $|\nabla f|=1$, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$, 且 $\Delta f=0$ 则 ∇f 是平行向量场.

证明：由 (1.2.6)，有

$$\begin{aligned}0=\Delta|\nabla f|^2&=2\sum f_{ij}^2+2\sum R_{ij}f_if_j\\&\geqslant 2\sum f_{ij}^2.\end{aligned}$$

故 $f_{ij}=0$，对于一切 i,j. 证毕.

利用归纳法，分裂定理可叙述如下：

定理. 如果 M 是具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形，则 M 等距于 $\overline{M}\times\mathbf{R}^k$，其中 $\overline{M}$ 不含整条测地直线.

利用这一定理还可以得到有关紧流形的基本群的结构定理：

定理. 设 M 是具非负 Ricci 曲率的紧 Riemann 流形，则 $\pi_1(M)$ 包含一个正规子群 ϕ，使 $\pi_1(M)/\phi$ 是有限型的. M 的通用覆盖流形 $\widetilde{M}$ 可等距地分裂为 $\mathbf{R}^k\times\overline{M}$，其中 $\overline{M}$ 是紧的.

注：上述定理亦是 Toponogov 相应定理的推广. 更进一步应用 Cheeger-Gromoll 定理，可以给出非紧流形基本群增长率的估计，且在相当合理假设下，证明任一紧 Riemann 流形的和乐群 (Holonomy) 群是紧的.

§3. 梯度估计

本节将讨论满足一定方程的可微函数的梯度估计，确切地说，我们要给出 $\log u$ 的梯度估计，其中 u 是正调和函数，其证明属于 Yau (见 Yau, S. T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl Math., **28** (1975), 201—

208). 在证明中把极值原理与 Bochner 恒等式应用于某些辅助函数，详细的更一般的讨论见 Yau 的文章. 作为应用，在本节中我们给出非负 Ricci 曲率流形上的 Liouville 定理，及 Ricci 曲率具有下界的流形上的 Harnack 型不等式等等. 稍后，我们还将应用此方法于流形谱值的估计.

定理. 设 M 是完备的 Riemann 流形，$\dim M = n \geqslant 2$，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k(k \geqslant 0)$，$u$ 是 M 上的正调和函数，则在 M 的任何测地球 $B_a(x_0)$ 中，成立

$$\sup_{B_{a/2}(x_0)} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n \left(\frac{1 + a k^{\frac{1}{2}}}{a}\right), \tag{1.3.1}$$

其中 C_n 为仅与 n 有关的常数.

证明: 1° 根据 (1.2.7) 的计算，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(|\nabla u|^2) = & \sum_{i,j} u_{ij}^2 \\ & + \sum_i u_i(\Delta u)_i + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\ \geqslant & \sum_{i,j} u_{ij}^2 - k|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

既然计算是局部的，那么我们可固定一点 p，适当选取 p 附近的正交标架，可设 $u_i(p) = 0(i \geqslant 2)$，$u_1(p) = |\nabla u|_{(p)}$ 所以

$$\nabla_j(|\nabla u|) = \nabla_j(\sqrt{u_i \cdot u_i})$$

$$= \frac{\sum_i u_i \cdot u_{ij}}{|\nabla u|} = u_{1j}$$

故

$$\nabla(|\nabla u|) \cdot \nabla(|\nabla u|) = \sum_j u_{1j}^2. \tag{1.3.3}$$

令

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2|\nabla u| \cdot \Delta(|\nabla u|) + 2|\nabla(|\nabla u|)|^2, \tag{1.3.4}$$

由 (1.3.2)，(1.3.3)，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) - |\nabla(|\nabla u|)|^2 + k|\nabla u|^2 \\
&\quad \geqslant \sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum u_{1j}^2 \\
&\quad \geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \sum_{i\neq 1} u_{ii}^2 \\
&\quad \geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i>1} u_{ii}\Big)^2.
\end{aligned}
$$

因为 $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0$，所以 $u_{11}^2 = \Big(\sum_{i=2}^{n} u_{ii}\Big)^2$. 代入上式，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) - |\nabla|\nabla u||^2 + k|\nabla u|^2 \\
&\quad \geqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i} u_{i1}^2 \\
&\quad = \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2. \qquad (1.3.5)
\end{aligned}
$$

最后一步是由于 (1.3.3). 由 (1.3.4) 和 (1.3.5)，得

$$
|\nabla u|\Delta(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2 - k|\nabla u|^2. \qquad (1.3.6)
$$

此式对于 M 上的任何点都成立.

2° 令 $\phi = \frac{|\nabla u|}{u}$，欲给出 $\Delta\phi$ 的估计

$$
\nabla\phi = \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}. \qquad (1.3.7)
$$

由 $|\nabla u| = \phi\cdot u$，在 $\nabla u \neq 0$ 的点上，有

$$
\begin{aligned}
\Delta|\nabla u| &= u\Delta\phi + \phi\Delta u + 2\nabla\phi\cdot\nabla u \\
&= u\Delta\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi &= \frac{\Delta(|\nabla u|)}{u} - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u} \\
&= \frac{|\nabla u|\Delta(|\nabla u|)}{|\nabla u|u} - 2\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u}
\end{aligned}
$$

$$\geqslant \frac{1}{|\nabla u| u}\left(\frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^{2}-k|\nabla u|^{2}\right)$$

$$-\frac{2 \nabla \phi \cdot \nabla u}{u}$$

$$=\frac{1}{(n-1)|\nabla u| u}|\nabla|\nabla u||^{2}-k \phi$$

$$-\frac{2 \nabla \phi \cdot \nabla u}{u} .$$

令 $\varepsilon=\frac{2}{n-1}>0$，则由 (1.3.7)，有

$$-2 \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}=-(2-\varepsilon) \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}$$

$$-\varepsilon \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}$$

$$=-(2-\varepsilon) \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}-\varepsilon \frac{\nabla|\nabla u| \cdot \nabla u}{u^{2}}$$

$$+\varepsilon \frac{|\nabla u|^{3}}{u^{3}}$$

$$\geqslant-(2-\varepsilon) \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}-\varepsilon \frac{|\nabla|\nabla u|| \cdot|\nabla u|}{u^{2}}$$

$$+\varepsilon \phi^{3} . \tag{1.3.8}$$

但

$$-\varepsilon \frac{|\nabla|\nabla u|| \cdot|\nabla u|}{u^{2}}=-\varepsilon \frac{|\nabla|\nabla u||}{(|\nabla u| u)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{|\nabla u|^{3/2}}{u^{3/2}}$$

$$\geqslant-\frac{\varepsilon}{2} \frac{|\nabla|\nabla u||^{2}}{|\nabla u| u}-\frac{\varepsilon}{2} \frac{|\nabla u|^{3}}{u^{3}}$$

$$=-\frac{1}{(n-1)} \frac{|\nabla|\nabla u||^{2}}{u|\nabla u|}-\frac{1}{n-1} \phi^{3},$$

代入 (1.3.8)，得

$$-2 \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u} \geqslant-(2-\varepsilon) \frac{\nabla \phi \cdot \nabla u}{u}$$

$$-\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{(n-1)u|\nabla u|}+\frac{1}{n-1}\phi^3,$$

最后得

$$\Delta\phi \geqslant -k\phi-\left(2-\frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla u}{u}$$

$$+\frac{1}{n-1}\phi^3. \tag{1.3.9}$$

3° 在 $B_a(x_0)$ 中考虑函数，

$$F(x)=(a^2-\rho^2)\phi(x)=(a^2-\rho^2)\frac{|\nabla u|}{u},$$

其中 ρ 为由 x_0 起计算的距离. $F|_{\partial B_a}=0$，如果有 $\nabla u\neq 0$，则 $F(x)$ 必在 $B_a(x_0)$ 内部达到极大值，在极大值点上 $\nabla u\neq 0$，至于 $\nabla u=0$ 的情况，则定理的结论自动成立.

设 $x_1\in B_{a_1}(x_0)$ 为 $F(x)$ 的极大值点，如果 x_1 不是 x_0 的割点，则由极大值原理，有

$$\nabla F(x_1)=0, \tag{1.3.10}$$

$$\Delta F(x_1)\leqslant 0. \tag{1.3.11}$$

在 x_1 点上，(1.3.10) 为

$$\frac{\nabla\rho^2}{a^2-\rho^2}=\frac{\nabla\phi}{\phi}; \tag{1.3.12}$$

而 (1.3.11) 为

$$-\frac{\Delta\rho^2}{a^2-\rho^2}+\frac{\Delta\phi}{\phi}-\frac{2\nabla\rho^2\cdot\nabla\phi}{(a^2-\rho^2)\phi}\leqslant 0.$$

将 (1.3.12) 代入上式，得

$$0\geqslant\frac{\Delta\phi}{\phi}-\frac{\Delta\rho^2}{(a^2-\rho^2)}-\frac{2|\nabla\rho^2|^2}{(a^2-\rho^2)^2}, \tag{1.3.13}$$

其中 $|\nabla\rho^2|=2\rho|\nabla\rho|=2\rho$. 再由比较定理(系 1.1.2)，当

$$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$$

时，有

$$\Delta\rho^2=2\rho\Delta\rho+2|\nabla\rho|^2$$

$$=2+2\rho\Delta\rho$$

$$\leqslant 2 + 2(n-1)\left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n-1}}\rho\right)$$

$$- 2n + 2\sqrt{n-1}\sqrt{k}\,\rho$$

$$\leqslant C(1 + \sqrt{k}\,\rho),$$

其中 C 为仅与 n 有关的常数. 将上述估计代入 (1.3.13) 并注意 (1.3.9),有

$$0 \geqslant \frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2}$$

$$\geqslant -k - \left(2 - \frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla\phi \cdot \nabla u}{\phi u}$$

$$+ \frac{1}{n-1}\phi^2 - \frac{C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)}{a^2 - \rho^2}$$

$$- \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2}.$$

但在点 x_1 上,(1.3.12) 成立,所以

$$-\frac{\nabla\phi \cdot \nabla u}{\phi u} = -\frac{2\rho\nabla\rho \cdot \nabla u}{(a^2 - \rho^2)u} \geqslant -\frac{2\rho}{a^2 - \rho^2}\phi,$$

$$0 \geqslant -k - \frac{4(n-2)}{n-1}\frac{\rho}{a^2 - \rho^2}\phi + \frac{1}{n-1}\phi^2$$

$$- \frac{C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)}{a^2 - \rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2}.$$

把上式两端乘以 $(a^2 - \rho^2)^2$, 由于 $F = (a^2 - \rho^2)\phi$, 则在 x_1 点上,得

$$0 \geqslant \frac{1}{n-1}F^2 - \frac{4(n-2)}{n-1}\rho F$$

$$- C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)(a^2 - \rho^2) - 8\rho^2 - k(a^2 - \rho^2)^2$$

$$\geqslant \frac{1}{n-1}F^2 - 2C_1 aF - C(1 + k^{\frac{1}{2}}\rho)a^2$$

$$- 8a^2 - ka^4$$

$$\geqslant \frac{1}{n-1} F^2 - 2C_1 aF - C_2(1 + k^{\frac{1}{2}}a)^2 a^2,$$

其中 C_1, C_2 为仅与 n 有关的常数．因此

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \sup_{B_a} F \\ &\leqslant \frac{C_1 a + \sqrt{C_1^2 a^4 + \frac{C_2}{n-1} a^2 (1 + k^{\frac{1}{2}} a)^2}}{(n-1)^{-1}} \\ &\leqslant C'_n a(1 + k^{\frac{1}{2}} a). \end{aligned} \qquad (1.3.14)$$

因此，当限制在 $B_{a/2}(x_0)$ 中时，有

$$\frac{3}{4} a^2 \sup_{B_{a/2}(x_0)} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C'_n a(1 + k^{\frac{1}{2}} a),$$

即

$$\sup_{B_{a/2}(x_0)} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n \left(\frac{1 + k^{\frac{1}{2}} a}{a}\right).$$

此即 (1.3.1) 式．

4° 剩下唯一需要讨论的是 $F(x) = (a^2 - \rho^2)\frac{|\nabla u|}{u}$ 的极大值点 x_1 如果正好落在 x_0 的割迹之中的情况．通常讨论这类问题的方法是采用所谓"support 函数"的方法．

现设 $x_1 \in \text{cut locus}(x_0)$，记 σ 为连结 x_0 和 x_1 的一条极小测地线(不一定唯一，但固定其中之一)．根据割点的定义，$\sigma|_{[x_0,x_1)}$ 中任意内点都不是 x_1 的共轭点．在 σ 上固定距 x_0 充分近的另一点 q．记 $\varepsilon = \text{dist}(x_0, q) = L(\sigma|_{[x_0,q]})$．

取测地线段 $\sigma|_{[q,x_1]}$ 的正则邻域 N_q．使任何 $x \in N_q$ 都不是 q 的割点．$\forall x \in N_q$，我们以 $\rho(x)$ 表示 x 相对于 x_0 的距离，而以 $\rho_q(x)$ 表示相对于 q 的距离，则由三角不等式，有

$$\begin{aligned} \rho_q(x) + \varepsilon &\geqslant \rho(x), \\ \rho_q(x_1) + \varepsilon &= \rho(x_1). \end{aligned} \qquad (1.3.15)$$

当 $x \in N_q$ 时，考虑函数

$$\tilde{F}(x) = (a^2 - (\rho_q(x) + \varepsilon)^2)\frac{|\nabla u|}{u},$$

则由 (1.3.15)，$\tilde{F}(x)$ 是我们在 3° 中讨论的函数 $F(x)$ 在 x_1 上的 "support 函数"，即满足

$$\tilde{F}(x) \leqslant F(x),$$
$$\tilde{F}(x_1) = F(x_1).$$

因为 $\rho_q(x)$ 在 x_1 的一个邻域是光滑的，所以我们可以对 $\tilde{F}(x)$ 在 x_1 上应用极大值原理. 通过同样的讨论，得到 $\tilde{F}(x_1)$ 的估计. 最后再令 $\varepsilon \to 0$，即可完成证明.

系 1.3.1. 完备 Riemann 流形，如果 Ricci 曲率非负，则不存在非常数的正调和函数.

证明：在 (1.3.1) 中 $k=0$，令 $a \to \infty$，即得 $|\nabla u| \equiv 0$.

系 1.3.2. 设 M 为完备 Riemann 流形. B_a 为 M 中任一半径为 a 的测地球，u 为 B_a 中的调和函数，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$，则

$$\sup_{B_{a/2}} |\nabla u| \leqslant C_n \left(\frac{1 + k^{\frac{1}{2}} a}{a}\right) \sup_{B_{a/2}} |u| \tag{1.3.16}$$

证明：记 $A = \sup\limits_{B_{a/2}} |u|$，则 $v = u + A + \varepsilon > 0$，$\Delta v = 0$，

$$\begin{aligned}\sup_{B_{a/2}} |\nabla u| &= \sup_{B_{a/2}} |\nabla v| \\ &\leqslant C_n \left(\frac{1 + k^{\frac{1}{2}} a}{a}\right) \sup_{B_{a/2}} |u + A + \varepsilon| \\ &\leqslant 2C_n \left(\frac{1 + k^{\frac{1}{2}} a}{a}\right) \sup_{B_{a/2}} |u|.\end{aligned}$$

系 1.3.3 (Harnack 不等式). 设 M 为完备 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$. 如果 u 是测地球 $B_a(x_0)$ 中的调和函数，且 $u > 0$，则

$$\sup_{B_{a/2}} u \leqslant C(n, a, k) \inf_{B_{a/2}} u, \tag{1.3.17}$$

其中 $C(n, a, k)$ 为仅依赖于 n, a, k 的常数.

证明：根据定理 (1.3.1)，有

$$\sup_{B_a} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C(n, a, k).$$

取 $x_1, x_2 \in B_{a/2}(x_0)$，使 $u(x_1) = \sup\limits_{B_{a/2}} u(x)$，$u(x_2) = \inf\limits_{B_{a/2}} u(x)$ 以极小测地线 γ 连结 x_1，x_2，则由三角不等式易知，γ 整个落在 B_a 之中，因此

$$\int_\gamma \frac{|\nabla u|}{u} ds \leqslant C(n, a, k)\int_\gamma ds$$
$$\leqslant C(n, a, k)a.$$

但

$$\int_\gamma \frac{|\nabla u|}{u} \geqslant \left|\int_\gamma \frac{d \log u}{ds}\right| = \log \frac{u(x_1)}{u(x_2)},$$
$$u(x_1) = \sup_{B_{a/2}} u(x) \leqslant e^{C(n,a,k)a} u(x_2)$$
$$= e^{C(n,a,k)a} \inf_{B_{a/2}} u(x).$$

系 1.3.4. 回到(1.3.14)，它可以写成(当 $r \leqslant R$ 时)，

$$(R^2 - r^2) \sup_{B_r} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n R(1 + k^{\frac{1}{2}} R),$$

即

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2} \sup_{B_r} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n \left(\frac{1}{R} + \sqrt{k}\right).$$

因此，只要取 R 充分大(例如 $R \geqslant 1$)，则有

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C(n, \sqrt{k}). \tag{1.3.18}$$

系 1.3.5. 完全类似地可证，在 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$ 的完备 Riemann 流形上，如果 $\Delta u = \lambda u$，$u > 0$，同样有

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda), \tag{1.3.19}$$

其中 $C(n, \sqrt{k}, \lambda)$ 为仅依赖于 n，$\sqrt{k}$，λ 的常数。

§4. 具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形

本节将研究具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形的若干问题，首先从这类流形的体积的无限性开始。

当 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，对于任何 $p\in M$，M 中以 p 为中心、R 为半径的测地球 $B_p(R)$ 的体积，根据体积比较定理 (1.1.18)：有，

$$\mathrm{Vol}\, B_p(R)\leqslant C_n R^n, \tag{1.4.1}$$

其中 C_n 仅与 n 有关.

而对于 $\mathrm{Vol}\, B_p(R)$ 的下界，则可以证明以下结果：

定理 1.4.1. 设 M 为非紧的 n 维完备 Riemann 流形，

$$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0,$$

记 $B_p(R)$ 为 M 中以任意固定点 p 为中心、半径为 R 的测地球，则

$$\mathrm{Vol}\, B_p(R)\geqslant C(n, \mathrm{Vol}\, B_p(1))R, \tag{1.4.2}$$

其中 $C(n, \mathrm{Vol}\, B_p(1))$ 为仅依赖于 n 及 $\mathrm{Vol}\, B_p(1)$ 的常数.

证明：任意固定 $x_0\in\partial B_p(R)$，即 $d(p, x_0)=R$，记 M 上相对 x_0 的距离函数为 $\rho(x)=d(x, x_0)$，因为有 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，由 §1 的 (1.1.12)，在分布意义下

$$\Delta\rho^2=2\rho\Delta\rho+2\leqslant 2n,$$

即 $\forall\varphi\in C_0^\infty(M)$，$\varphi\geqslant 0$，有

$$\int_M\varphi\Delta\rho^2\leqslant 2n\int_M\varphi. \tag{1.4.3}$$

用 $C_0^\infty(M)$ 函数来逼近具紧支集的 Lipschitz 连续函数，上式对具紧支集的 Lipschitz 连续函数依然成立. 现在令 $\varphi(x)=\phi(\rho(x))$，其中 $\phi(t)$ 为以下形式：

$$\phi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant R-1,\\ \phi'(t)=-\dfrac{1}{2}, & R-1\leqslant t\leqslant R+1,\\ 0, & t\geqslant R+1.\end{cases}$$

显然，$\mathrm{supp}\ \varphi\subset B_{x_0}(R+1)$.

因为 Stokes 公式对 Lipschitz 函数仍然成立，所以，

$$\begin{aligned}\int_M\varphi(x)\Delta\rho^2&=-\int_{B_{x_0}(R+1)}\nabla\varphi\cdot\nabla\rho^2\\ &=-2\int_{B_{x_0}(R+1)}\varphi'(\rho(x))\rho|\nabla\rho|^2\end{aligned}$$

$$= \int_{B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)} \rho$$

$$\geqslant (R-1)\ \mathrm{Vol}\ (B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)).$$

由 (1.4.3),

$$\int_{B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)} \rho \leqslant 2n \int_M \varphi - 2n \int_{B_{x_0}(R+1)} \varphi$$

$$\leqslant 2n \int_{B_{x_0}(R+1)} 1 = 2n\ \mathrm{Vol}\ B_{x_0}(R+1).$$

但显然 $B_p(1) \subset B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)$，因而

$$2n\ \mathrm{Vol}\ B_{x_0}(R+1)$$

$$\geqslant (R-1)\ \mathrm{Vol}\ (B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1))$$

$$\geqslant (R-1) \mathrm{Vol} B_p(1).$$

又显然 $B_p(2(R+1)) \supset B_{x_0}(R+1)$，因此

$$2n\ \mathrm{Vol}\ B_p(2(R+1)) \geqslant (R-1)\ \mathrm{Vol}\ B_p(1),$$

$$\mathrm{Vol}\ B_p\ (2(R+1)) \geqslant \frac{R-1}{2n}\ \mathrm{Vol}\ B_p(1).$$

定理证毕.

系. 具非负 Ricci 曲率的非紧完备 Riemann 流形体积无限.

注 1: (1.4.1) 和 (1.4.2) 写在一起为:

$$C_n R^n \geqslant \mathrm{Vol}\ B_p(R) \geqslant C(n,\ \mathrm{Vol}\ B_p(1))R.$$

当 $\mathrm{Vol}\ B_p(R) \sim R^n$ 时，M 很像 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，或 $\mathbf{R}^n$ 中的锥. 而 $\mathrm{Vol}\ B_p(R) \sim R$，$M$ 类似于圆柱面. 例如 $\mathbf{R}^3$ 中的圆柱面 $X^2 + Y^2 = 1$，其测地球的体积界于 $4\pi R \geqslant \mathrm{Vol}\ B(R) \geqslant 2\pi R$ 之间.

注 2: 容易想到，能否将 (1.4.2) 改进为

$$\mathrm{Vol}\ B_p(R) \geqslant CR,$$

即其中的 C 是否为一仅与 n 有关的常数? 一般而言，这是不对的，Croke 曾给出例子，表明: 存在完备的 Riemann 流形，$\mathrm{Ric} \geqslant 0$，但 $\inf\limits_{x\in M} \mathrm{Vol} B_x(1) = 0$.

当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$ 时的完备 Riemann 流形的体积无限性是由

Calabi, S. T. Yau 证明的，参见 S. T. Yau, *Indiana, Math. Jour.*, Vol25, No. 7 (1976).

对于具非负截曲率的完备 Riemann 流形，基本的结构定理是 Cheeger-Gromoll 的下述定理(可见 Cheeger 和 Ebin 的书，第八章).

定理. 设 M 是具非负曲率的完备 Riemann 流形，则 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 中包含一有限正规子群 ϕ，使 $\pi_1(M)/\phi$ 是 $\mathrm{R}^k(k\leqslant \dim M)$ 上的晶体运动解.

对于 Ricci 曲率非负的完备 Riemann 流形，其基本群的结构尚待研究. 主要的问题在于：这样的流形是否是有限型的 (finite type)? 即 M 是否同伦于一个有限复形？$\pi_1(M)$ 是否有限生成的？

Cheeger-Gromoll 在曲率 $\geqslant 0$ 时证明这一定理的方法大致如下：在 M 上取射线 γ，作关于 γ 的 Busemann 函数 B_γ，因为曲率 $\geqslant 0$，可以证明 B_γ 是凹的，因而 $B=\inf\limits_\gamma B_\gamma$ 也是凹的，不仅如此，更重要的是证明 B 还是逆紧的 (proper). (所谓 $f: M\to \mathrm{R}$ 是逆紧的，指对 R 的任何紧集，其逆像也是紧的).

在 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 的情况下，困难在于难以证明上述的 B 是逆紧的. 因此，对 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，基本的问题是，进一步了解函数 B，或者构造一个较好的穷竭且上调和的函数. 换句话说，能否用一串紧的、具正的平均曲率的超曲面来穷竭整个 M?

在这一方面，下述定理对解决这一问题或许有所帮助.

定理 1.4.2. 设 M 是完备的 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$ $(k\geqslant 0)$，则 M 上存在一个逆紧的 $C^\infty(M)$ 函数 f，满足：

$$|\nabla f|<C,\quad f\geqslant C_1\rho,\quad |\Delta f|<C_2.$$

其中 C，C_1，C_2 皆为常数，$\rho=\rho(x)=M$ 上对某固定点而言的距离.

证明：分以下几步：

1° 取定 $O\in M$，对 O 而言的距离记作 $\rho(x)$，以 O 为中心、

R 为半径的测地球记作 $B_O(R)$，对 $R>1$，在 $B_O(R)\backslash B_O(1)$ 中解以下的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}\Delta h_R(x)=\lambda h_R(x),\ \lambda\ \text{为某待定的正常数},\\ h_R(x)|_{\partial B_O(R)}=0,\\ h_R(x)|_{\partial B_O(1)}=1.\end{cases}\tag{1.4.4}$$

根据二阶椭圆型方程的理论，(1.4.4) 的光滑解 $h_R(x)$ 存在，且满足极大值原理，因此 $1\geqslant h_R(x)\geqslant 0$，并且在内部不取等号，否则 $h_R(x)$ 将为常数，与边界条件不合，即

$$1>h_R(x)>0,\ x\in B_O(R)\backslash B_O(1).$$

如果 $R_2>R_1$，而 $x\in B_O(R_1)$，则 $h_{R_2}-h_{R_1}$ 在 $B_O(R_1)\backslash B_O(1)$ 上，满足

$$\begin{cases}\Delta(h_{R_2}-h_{R_1})=\lambda(h_{R_2}-h_{R_1}),\\ (h_{R_2}-h_{R_1})|_{\partial B_O(1)}=0,\\ (h_{R_2}-h_{R_1})|_{\partial B_O(R_1)}=h_{R_2}(x)>0.\end{cases}$$

同样由极大值原理，$h_{R_2}(x)-h_{R_1}(x)>0$，因此，对任何固定的 $x\in M\backslash B_O(1)$，$\{h_R(x)\}_{R\to\infty}$ 是一单调递增的有界序列，因而

$$h(x)=\lim_{R\to\infty}h_R(x)$$

存在. 取一列 $R_i\to\infty$. 由 h_R 的一致有界性 $(0\leqslant h_R\leqslant 1)$，利用椭圆方程的 L^p-估计和 Schauder 估计可以推出：存在 $C(m,i)>0$，使得只要 $R\geqslant R_i+1$ 就有 $\|h_R\|_{C^m\overline{B_O(R_i)\backslash B_O(1)}}\leqslant C(m,i)$. 因此，用抽取对角线子列的办法就可证明：存在子列 $\{h_{R_{ij}}\}$ 在 $M\backslash B_O(1)$ 的每个有界子域上 C^m 收敛于 h. 这说明 h 是光滑的，并在 $M\backslash\overline{B_O(1)}$ 上满足 $\Delta h=\lambda h$，$0\leqslant h\leqslant 1$，以及 $h|\partial B_O(1)=1$. 由极大值原理，易见在 $M\backslash\overline{B_O(1)}$ 内有 $0<h<1$.

2° 下面证明，$h(x)=O(e^{-C\rho(x)})$.

取一待定常数 $C>0$，在 $B_O(R)\backslash B_O(1)$ 中应用 Stokes 公式，注意 $h_R|_{\partial B_O(R)}=0$，有

$$\int_{B_O(R)\backslash B_O(1)}e^{C\rho(x)}h_R\Delta h_R$$

$$-\int_{\partial B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R \frac{\partial h_R}{\partial r} - \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} \nabla(e^{C\rho(x)} h_R)\cdot \nabla h_R$$

$$= e^C \int_{\partial B_O(1)} \frac{\partial h_R}{\partial r} - C\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R \nabla h_R \cdot \nabla\rho$$

$$- \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} |\nabla h_R|^2.$$

当 $x\in\partial B_O(1)$ 时，$\frac{\partial h_R}{\partial r} = \nabla h_R\cdot\nabla r$，由梯度估计(1.3.19)，

$$|\nabla h_R| \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda)\,|h_R| = C(n, \sqrt{k}, \lambda),$$

因此上式中右端第一项是有界量．由 $\Delta h_R = \lambda h_R$，得

$$\lambda \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R^2 = \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R \Delta h_R$$

$$\leqslant \tilde{C} + C\int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} |\nabla h_R|\,|\nabla\rho|\cdot h_R$$

$$- \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} |\nabla h_R|^2.$$

因为 $|\nabla\rho| = 1$，再利用不等式 $2ab\leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$，有

$$C e^{C\rho(x)} |\nabla h_R| h_R \leqslant \frac{1}{2} e^{C\rho(x)} \left(C\varepsilon |\nabla h_R|^2 + \frac{C}{\varepsilon} h_R^2 \right).$$

取 ε 使 $\frac{C\varepsilon}{2} = 1$，则

$$\lambda \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R^2 \leqslant \tilde{C} + \frac{C^2}{4} \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R^2,$$

即

$$\left(\lambda - \frac{C^2}{4}\right) \int_{B_O(R)\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h_R^2(x) \leqslant \tilde{C}.$$

令 $R\to\infty$，得

$$\left(\lambda - \frac{C^2}{4}\right) \int_{M\setminus B_O(1)} e^{C\rho(x)} h^2(x) \leqslant \tilde{C}.$$

$h(x)$ 在 $M\setminus B_o(1)$ 上是光滑的，$1\geqslant h(x)>0$，$h(x)|_{\partial B_O(1)}=1$．将 $h(x)$ 光滑地拓展到整个 M，使 $h(x)>0$，将扩充后的函数

仍记为 $h(x)$，适当改变 $\tilde{C}$，仍有

$$\left(\lambda-\frac{C^2}{4}\right)\int_M e^{C\rho(x)}h^2(x)\leqslant\tilde{C}.$$

只要 $\lambda>\frac{C^2}{4}$，上式也可以写作

$$\int_M e^{C\rho(x)}h^2(x)\leqslant\tilde{C}. \tag{1.4.5}$$

当 $\rho(x)$ 充分大时，如果 $y\in B_x(1)$，则由三角不等式

$$\rho(y)\geqslant\rho(x)-1,$$

由 (1.4.5)，有

$$\begin{aligned}\tilde{C}\geqslant\int_M e^{C\rho}h^2&>\int_{B_x(1)}e^{C\rho(y)}h^2(y)\\&\geqslant e^{C(\rho(x)-1)}\int_{B_x(1)}h^2(y).\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}B_x(1)}\int_{B_x(1)}h^2(y)\leqslant\frac{\tilde{C}}{\operatorname{Vol}B_x(1)}e^{-C\rho(x)}. \tag{1.4.6}$$

由 $\Delta h=\lambda h$ 的梯度估计 (1.3.19)，有

$$\left|\frac{\nabla h}{h}\right|=|\nabla\log h|\leqslant C(n,\sqrt{k},\lambda).$$

所以，只要 $d(x,y)\leqslant 1$，就有

$$|\log h(x)-\log h(y)|\leqslant C(n,\sqrt{k},\lambda).$$

由此，得

$$h(y)\geqslant C_1h(x),$$

其中 C_1 依赖于 n，k，λ. 将上式代入 (1.4.6)，得

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{C}}{\operatorname{Vol}B_x(1)}e^{-C\rho(x)}&\geqslant\frac{1}{\operatorname{Vol}B_x(1)}\int_{B_x(1)}h^2(y)\\&\geqslant\frac{C_1h^2(x)}{\operatorname{Vol}B_x(1)}\int 1\\&=C_1h^2(x).\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

现在我们要引用命题 1.4.3，其证明放在本节的末尾.

命题 1.4.3. 如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$，则 $\mathrm{Vol} B_x(1) \geqslant e^{-C_2\rho(x)}$，其中 C_2 为仅依赖于 k 和 n 的常数.

利用这一命题，由 (1.4.7)，有

$$h^2(x) \leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda) e^{-C\rho(x)} (\mathrm{Vol}\ B_x(1))^{-1}$$

$$\leqslant C(n, \sqrt{k}, \lambda) e^{-(C-C_2)\rho(x)}.$$

因此，只要一开始选择待定常数 $C > C_2$，然后再选择

$$\lambda > \frac{C^2}{4},$$

固定这些常数，上式即为 $h(x) = O(e^{-\tilde{C}\rho(x)})$.

3° 令 $f = -\log h$，则 f 即为满足定理条件之函数，这是因为:

a) 由 $h \leqslant e^{-\tilde{C}\rho}$ 得 $f = -\log h \geqslant \tilde{C}\rho$，因而 $f^{-1}([0, t]) \subseteq B_O\left(\frac{t}{\tilde{C}}\right)$，$f$ 是逆紧的;

b) $|\nabla f| = |\nabla \log h| \leqslant$ 常数，这是梯度估计 (1.3.19);

c) 当 $\rho(x) > 1$ 时，$\Delta f = -\frac{\Delta h}{h} + |\nabla \log h|^2 = -\lambda + |\nabla \log h|^2 \leqslant$ 常数成立，另一方面，当 $\rho(x) \leqslant 1$ 时，Δf 总是有界的. 定理证毕.

现在我们给出定理证明中用到的一个命题:

命题 1.4.4. 对于完备 Riemann 流形 M，若 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$，则存在常数 C (与 n, k, $\mathrm{Vol}\ B_{x_0}(1)$ 有关)，使

$$\mathrm{Vol}\ B_x(1) \geqslant e^{-C\rho(x)},$$

其中 $\rho(x)$ 为 M 上对某一固定点 x_0 而言的距离.

证明: 任取 $x \in M$. 记从 x 计算的距离函数为 σ,

$$\sigma(y) = d(x, y),$$

把以 x 为中心、t 为半径的测地球记作 $B_x(t)$. 首先说明，当 $t \geqslant \frac{\sqrt{k}}{2}$ 时，

$$t^{-n} e^{-Ct}\ \mathrm{Vol}\ B_x(t) \tag{1.4.8}$$

是 t 的递降函数.

由 (1.1.8) 和 (1.1.12), 当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$ 时, 在分布意义下有

$$\Delta\sigma^2 \leqslant 2n + \sqrt{k}\,\sigma. \tag{1.4.9}$$

因此, 对 $\forall t > 0$, 有

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 \leqslant \int_{B_x(t)} 2n + \sqrt{k}\int_{B_x(t)} \sigma, \tag{1.4.10}$$

而

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 = \int_{\partial B_x(t)} \frac{\partial\sigma^2}{\partial r} = 2t\,\mathrm{Vol}(\partial B_x(t)).$$

但由 Co-Area 公式

$$\mathrm{Vol}\,(\partial B_x(t)) = \left.\frac{\partial \mathrm{Vol} B_x(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=t}. \tag{1.4.11}$$

(1.4.10) 的右端两项分别有

$$\int_{B_x(t)} 2n = 2n\,\mathrm{Vol}\,B_x(t),$$

$$\sqrt{k}\int_{B_x(t)} \sigma \leqslant t\sqrt{k}\ \mathrm{Vol}\,B_x(t).$$

如果令 $V(t) = \mathrm{Vol}\,B_x(t)$, 则 (1.4.10) 成为

$$t\,\frac{dV}{dt} \leqslant \left(n + \frac{\sqrt{k}}{2}\,t\right)V, \tag{1.4.12}$$

但易于验证, $\frac{d}{dt}\,(t^{-n}e^{-Ct}V(t)) \leqslant 0$ 的充要条件是

$$t\,\frac{dV}{dt} \leqslant nV + CtV. \tag{1.4.13}$$

比较 (1.4.13) 与 (1.4.12), 可见: 只要 $C \geqslant \frac{\sqrt{k}}{2}$, 即有

$$t^{-n}e^{-Ct}\mathrm{Vol}B_x(t)$$

的递降性, 现固定 $C \geqslant \frac{\sqrt{k}}{2}$. 于是, 当 $t \geqslant 1$ 时, 有

$$e^{-C}\,\mathrm{Vol}\,B_x(1) \geqslant t^{-n}e^{-Ct}\,\mathrm{Vol}\,B_x(t).$$

取 $t = d(x, x_0) + 1 = \rho(x) + 1$, 则

$$e^{-C}\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant (\rho(x)+1)^{-n} e^{-C(\rho(x)+1)} \operatorname{Vol} B_x(\rho(x)+1).$$

但明显有 $B_{x_0}(1) \subset B_x(\rho(x)+1)$. 因而

$$\operatorname{Vol} B_x(1) \geqslant (\rho(x)+1)^{-n} e^{-C\rho(x)} \operatorname{Vol} B_x(1)$$
$$\geqslant e^{-\hat{C}\rho(x)},$$

其中 $\hat{C}$ 为与k, n, $\operatorname{Vol} B_{x_0}(1)$ 有关的常数. 证毕.

第二章　负曲率流形上的调和函数

关于完备 Riemann 流形上调和函数论的研究，一方面对一些经典的情况(单位圆、$\mathbf{R}^n$ 中的有界域 $\mathbf{C}^n$ 中的有界对称域)已经有了众多的丰富的成果(例如，关于单位圆的 Herglotz 理论，$\mathbf{R}^n$ 中有界域上调和函数的 Martin 表示，有界对称域调和函数的 Hua, Fürsteuberg 理论等)。另一方面，对于一般的完备 Riemann 流形上的调和函数的研究只是近年来才有了较大的进展，对于不加曲率条件的一般的完备 Riemann 流形，S. T. Yau 证明，不存在属于 L^p $(1<p<\infty)$ 的调和函数。对于 $p=+\infty$，即有界调和函数的存在性，则受流形曲率的很大制约。 S. T. Yau 证明，对具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形，不存在非常数的有界的调和函数(第一章 § 3，系 1.3.1)，虽然人们早就猜测，当完备流形的曲率 K_M 满足： $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$ 时，应该存在有界的调和函数，但这一事实直到最近才由 Anderson 及 Sullivan 加以证实。他们证明，如果完备 Riemann 流形具负曲率 K_M，$-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$，那么 M 可以通过赋加一"无限远边界" (sphere at infinity) $S(\infty)$ 而紧致化。对于带边界的流形 $\bar{M}=M\cup S(\infty)$，满足预先给定的连续边界值(在 $S(\infty)$ 上给定)的调和函数的 Dirichlet 问题可解。本章第一节将对这一事实给出一个简单的证明。

以单位圆(其 Poincare 度量的曲率$=-1$)的调和函数论和 Martin 关于有界域中调和函数的经典工作为背景，在负曲率流形上可以通过 Green 函数的边界性状定义 Martin 边界$\mathscr{M}$和 Poisson 核。在 Anderson 和 R. Schoen 的工作中对此进行了详尽的研究，证明了M的几何边界 $S(\infty)$ 和 Martin 边界$\mathscr{M}$之间可以建立一个自然的同胚以及通过用 Poisson 核表示调和函数的 Ma-

rtin 表示公式。这些构成本章以后几节的内容。本章的主要参考文献是：M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature.

§1. 几何边界 $S(\infty)$ 及 Dirichlet 问题的可解性

本节始终假定M是单连通、完备的n维的 Riemann 流形，其截曲率满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2$. 以 $-b^2$ 和 $-a^2$ 为常曲率的(单连通)空间形式记作 $H(-b^2)$ 和 $H(-a^2)$. 根据 Cartan-Hadamard 定理，对M的任何一点 p, $\exp_p:T_pM\to M$ 都是微分同胚，即 M 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$. 并且从 p 的任一方向出发都决定一测地射线. 沿着这些射线的距离及射线间的夹角与空间形式中相应射线的距离及夹角之间的比较，由经典的 Rauch-Topologov 比较定理给出. 具体地说：

Rauch 比较定理. 如果 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2$, 任取一点 $O\in M$, M上相对O的距离记作 ρ, 则

$$(a\coth(a\rho))(g-d\rho\otimes d\rho)\leqslant D^2\rho$$
$$\leqslant b\coth(b\rho)(g-d\rho\otimes d\rho), \tag{2.1.1}$$

其中 g 表示M的 Riemann 度量张量.

Topologov 比较定理. 设 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2$, 在 $H(-b^2)$, M, $H(-a^2)$ 中分别有测地三角形$\triangle A'B'C'\subset H(-b^2)$, $\triangle ABC\subset M$, $\triangle A''B''C''\subset H(-a^2)$. 如果 $A'B'=AB=A''B''$,

$$B'C'=BC=B''C'',\ C'A'=CA=C''A'',$$

则

$$\angle A'\leqslant\angle A\leqslant\angle A''. \tag{2.1.2}$$

类似地，如果

$$A'B'=AB=A''B'',\ A'C'=AC=A''C'',$$
$$\angle A'=\angle A=\angle A'',$$

则

$$B'C'\geqslant BC\geqslant B''C''. \tag{2.1.3}$$

简而言之，曲率越小，则夹角越小，而对边长则越大.

为了给出精确的估计，我们需计算常负曲率空间形式中的边角关系。

考虑标准的曲率为常数-1的空间单位圆 D: $\{z\in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$. 其度量为 Poincaré 双曲度量

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

按此度量计算的 $z_1, z_2 \in D$ 的双曲距离记作 $\rho(z_1, z_2)$. 于是，如果 $|z| = r < 1$, 则

$$\rho(0, z) = \int_0^r \frac{2\,dt}{1-t^2} = \log \frac{1+r}{1-r}. \qquad (2.1.4)$$

双曲变换 $z \longmapsto \dfrac{z-r}{1-rz}$ 使 $z=r$ 变为 0, $z=re^{i\theta}$ 变为 $\dfrac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}$.

由于双曲距离在双曲运动群下不变，所以

$$\rho(r, re^{i\theta}) = \rho\left(0, \frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right)$$

$$= \log \frac{1+\left|\dfrac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right|}{1-\left|\dfrac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right|}. \qquad (2.1.5)$$

记 $\rho(r, re^{i\theta}) = s$, 则

$$\left|\frac{r(e^{i\theta}-1)}{1-r^2e^{i\theta}}\right| = \frac{e^s-1}{e^s+1}$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,\frac{s}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{s}{2}} = \tanh\frac{s}{2}. \qquad (2.1.6)$$

类似地，在(2.1.4)中如记 $\sigma = \rho(0, r)$, 则

$$r = \frac{e^\sigma-1}{e^\sigma+1} = \tanh\frac{\sigma}{2}.$$

将(2.1.6)变形为

$$\frac{2r^2-2r^2\cos\theta}{1+r^4-2r^2\cos\theta} = \left(\tanh\frac{s}{2}\right)^2,$$

$$\frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2-4r^2\cos\theta}=\frac{1-\tanh^2\frac{s}{2}}{1+\tanh^2\frac{s}{2}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}s}.$$

由 $r=\tanh\frac{\sigma}{2}$ 得 $1+r^2=\frac{\mathrm{ch}\sigma}{\mathrm{ch}^2\frac{\sigma}{2}}$, $1-r^2=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\sigma}{2}}$代入上式，

得

$$\cos\theta\,\mathrm{sh}^2\sigma=\mathrm{ch}^2\sigma-\mathrm{ch}\,s. \tag{2.1.7}$$

(2.1.7)就是 $D=H(-1)$ 中等腰三角形的腰长 σ、底边长 s 及顶角 θ 之间的关系式.

通过类似但稍复杂一点的计算，在空间形式 $H(-a^2)$ 中的三角形边角关系为：对于 $H(-a^2)$ 中的测地三角形 $\triangle ABC$，如果记 $d(A,B)=r$, $d(A,C)=\sigma$, $d(B,C)=s$，而 $\theta=\angle A$，则有

$$\cos\theta\,\mathrm{sh}ar\,\mathrm{sh}a\sigma=\mathrm{ch}ar\,\mathrm{ch}\,a\sigma-\mathrm{ch}\,as. \tag{2.1.8}$$

于是，根据 Rauch-Topologov 比较定理，我们可有以下命题：

命题 2.1. 设 M 是单连通、完备的 Riemann 流形，其曲率 K_M 满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$. 对于$M$中的测地三角形 $\triangle ABC$，如果记 $\rho(A,B)=r$, $\rho(A,C)=\sigma$, $\rho(B,C)=s$, $\angle A=\theta$，则

$$\cos\theta\geqslant\coth ar\coth a\sigma-\frac{\mathrm{ch}as}{\mathrm{sh}ar\,\mathrm{sh}a\sigma}, \tag{2.1.9}$$

$$\cos\theta\leqslant\coth br\coth b\sigma-\frac{\mathrm{ch}bs}{\mathrm{sh}br\,\mathrm{sh}b\sigma}. \tag{2.1.10}$$

命题 2.2. 设 M 为单连通、完备曲率 K_M 满足 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$ 的流形，O, x_1, x_2 为M中三点，设 $r=\rho(O,x_1)=\rho(O,x_2)$. 记由$O$至$x_1$的射线为 γ_1，由O至x_2的射线为 γ_2, γ_1 和 γ_2 在点O的夹角为 θ，则当 r 充分大，θ 适当小时，有

$$2r + \frac{2}{a}(\ln\theta - 1) \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

$$\leqslant 2r + \frac{2}{b}(\ln\theta + 1). \tag{2.1.11}$$

证明：在 (2.1.9) 中令 $\sigma = r$，$s = \rho(x_1, x_2)$，则有

$$\cos\theta\, \text{sh}^2 ar \geqslant \text{ch}^2 ar - \text{ch}\, as,$$

$$\text{ch}\, as - 1 \geqslant \text{sh}^2 ar\,(1 - \cos\theta),$$

$$4\,\text{sh}^2 \frac{as}{2} \geqslant \text{sh}^2 ar \cdot 2(1 - \cos\theta), \tag{2.1.12}$$

任取 c，满足 $1 < c < \frac{e}{2}$，则易知

$$2c^2(1 - \cos\theta) \geqslant \theta^2,\ \text{当}\ \theta\ \text{充分小时},$$

$$e^{ar} - e^{-ar} \geqslant \frac{2c}{e} e^{ar},\ \ \text{当}\ r\ \text{充分大时}.$$

后一式即 $\text{sh}\, ar \geqslant c e^{ar-1}$. 因此

$$\text{sh}^2 ar\, 2(1 - \cos\theta) = \frac{1}{c^2} \text{sh}^2 ar \cdot 2c^2(1 - \cos\theta)$$

$$\geqslant e^{2(ar-1)}\theta^2.$$

此时 (2.1.12) 成为

$$4\,\text{sh}^2 \frac{as}{2} \geqslant e^{2(ar-1)}\theta^2,$$

$$2\ln\left(e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}}\right) \geqslant 2(ar - 1) + 2\ln\theta.$$

所以

$$as \geqslant 2ar + 2(\ln\theta - 1);$$

$$s \geqslant 2r + \frac{2}{a}(\ln\theta - 1).$$

(2.1.11) 的左端得证，同理应用 (2.1.10) 可得右端的估计.

有了以上的准备，现在就可以来定义负曲率流形的几何边界——“无限远球面” $S(\infty)$.

定义：设 M 是单连通、完备的负曲率流形，由 Cartan-Hadamard 定理，从流形上任一点出发的切向量都唯一地定义了一条

测地射线γ. 两测地射线γ_1和γ_2称为等价的, $\gamma_1\sim\gamma_2$, 如果

$$\rho(\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))\leqslant 常数,\ \forall t\geqslant 0.$$

定义: M的"无限远球面" $S(\infty)$, 定义为

$$S(\infty)=测地射线的集合/\sim.$$

如果取同一点作为测地射线的始点, $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, 则$\gamma_1\sim\gamma_2$当且仅当 $\gamma_1=\gamma_2$, 这是因为由(2.1.11),

$$2t+\frac{2}{a}(\ln\theta-1)\leqslant 常数.$$

当$t\to\infty$ 时, $\theta=0$. 因此, 从几何上说, $S(\infty)=$由一点出发的全体测地射线$=T_OM$ 中的单位球面S_O.

任取 $O\in M$, $v\in T_OM$, 定义以v为中心、角宽为δ 的锥 $C_O(v,\delta)$ 如下:

$$C_O(v,\delta)=\{x\in M\mid\angle(v,\ T_{\overline{Ox}})<\delta\},\tag{2.1.13}$$

其中 $\angle(v,T_{\overline{Ox}})$ 是v和连结O与x的射线之间的夹角. 又以$B_O(R)$ 记以O为中心, R为半径的测地球, 我们称

$$T_O(v,\delta,R)=C_O(v,\delta)\backslash B_O(R)\tag{2.1.14}$$

为截锥, 则全体

$$\{T_O(v,\delta,R);\ B_q(r),\ q\in M\}\tag{2.1.15}$$

给出了 $\bar M=M\cup S(\infty)$ 的锥拓扑的一个拓扑基. 这种拓扑给出了M的一个紧化.

命题 2.3. 以上定义的 $S(\infty)$ 的拓扑结构是 C^α 的, 这里$\alpha=a/b$.

证明: 设 $x_1,x_2\in M$ 是定义 $S(\infty)$ 的不同的基点, 在同胚的意义下, $S_{x_1}\simeq S(\infty)\simeq S_{x_2}$, 其中 $S_{x_i}(i=1,2)$ 是 $T_{x_i}M$ 中的单位球面, 设 $w,v\in S_{x_1}$, $\theta=\angle(v,\ w)$. 如果 $\gamma_v(t)$, $\gamma_w(t)$ 是以v,w 为始点方向的射线, 则由(2.1.11), 当t充分大时, 有

$$\rho(\gamma_v(t),\gamma_w(t))\leqslant 2t+\frac{2}{b}(\ln\theta+1).$$

如果令$\tilde\theta_t$记 $\gamma_v(t)$, $\gamma_w(t)$ 对x_2所张的视角, 则仍由(2.1.11), 当t充分大时, 有

$$\frac{2}{a}(\ln\hat{\theta}_t - 1) \leqslant \rho(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) - 2t + 常数,$$

式中常数仅依赖于 x_1, x_2. 因此,

$$\hat{\theta}_t \leqslant C_1\theta^{a/b}. \tag{2.1.16}$$

令 $t \to \infty$, 就给出了映射 $S_{x_1} \to S(\infty) \to S_{x_2}$ 是 C^α 的,

$$\alpha = a/b.$$

现在我们转向M上调和函数的讨论. 根据前一章由梯度估计导出的 Harnack 不等式 (1.3.18), 易知, 如果 u_n 是M上的调和函数序列, 满足 $|u_n| \leqslant K$, 则 $\{u_n\}$ 中有一光滑收敛的子序列, 其极限仍是 M 上的有界调和函数, 这一事实今后将称之为 Harnack 原则.

另外, 如果区域 $\Omega \subset\subset M$, u 是Ω中的调和函数, 并且 $u \in C^0(\bar{\Omega})$, 则根据极大值原理, $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$. 也不难验证, 这一极大值原理对 $\Omega \subset \overline{M} = M \cup S(\infty)$ 仍然成立.

下面是本节的主要结果, 它给出了调和方程 Dirichlet 问题的可解性.

定理 2.1. 设M是单连通、n 维、完备的 Riemann 流形, 曲率 K_M 满足: $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$, 任给 $\varphi \in C^0(S(\infty))$, 则存在唯一的调和函数 $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$, 使 $u|_{S(\infty)} = \varphi$.

证明. 固定基点 $O \in M$, 并将 $S(\infty)$ 和 T_OM 中的单位球面 $S_O(1) = S^{n-1}$ 等同起来. 因为 $S_O(1)$ 上任何连续函数可用光滑函数一致逼近, 而极大值原理又保证: 如果调和函数列 $\{u_k \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})\}$ 在 $S(\infty)$ 上一致收敛的话, 则 u_k 亦在 $\overline{M}$ 上一致收敛到调和函数, 因此无妨假定 $\varphi \in C^\infty(S_O(1))$.

因为 $K_M \leqslant -a^2$, M 与 $\mathbf{R}^n$ 在 $\exp_O F$ 微分同胚. 记 $\{(r, \theta) | \theta \in S_O(1) = S^{n-1}\}$ 为O点的正规测地坐标, 则φ可写作 $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in S_O(1)$. 将φ沿径向扩充至 $M\backslash\{0\}$, 即令

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(0), \ \forall r > 0.$$

扩充后的函数仍记为 φ, 则φ是 $M\backslash\{0\}$ 上的有界光滑函数.

引进记号 $\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi=\sup_{y\in B_x(1)}|\varphi(y)-\varphi(x)|$ 表示 φ 在测地球 $B_x(1)$ 上的振幅.

定理的证明分以下几步:

1° $\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi=O(e^{-a\rho(x)})$, 其中 $\rho(x)$ 表示对基点 O 的距离函数.

根据 φ 的定义,当 $y\in B_x(1)$ 时,

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|=|\varphi(\theta')-\varphi(\theta)|\leqslant C|\theta'-\theta|,$$

其中 θ', θ 分别是 y 和 x 测地球面坐标. 由命题 2.2 可得

$$2\rho(x)+\frac{2}{a}(\ln(\theta'-\theta)-1)\leqslant\rho_x(y)\leqslant 1,$$

即有

$$|\theta'-\theta|\leqslant C_1e^{-a\rho(x)},$$

其中 C_1 仅依赖于 a, 因此,

$$\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi\leqslant Ce^{-a\rho(x)},\tag{2.1.17}$$

其中 C 是仅依赖于 a, φ 的常数.

2° 对 φ 进行平均化, $\varphi\to\tilde{\varphi}$, 使 $\Delta\tilde{\varphi}=O(e^{-a\rho(x)})$. 取

$$\chi\in C_0^\infty(\mathrm{R}),\ 1\geqslant\chi\geqslant0,\quad \operatorname{supp}\chi\subset[-1,1],$$

令

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{\int_M\chi(\rho_x^2(y))\varphi(y)\,dy}{\int_M\chi(\rho_x^2(y))dy},$$

则有

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|&=\frac{\left|\int_{B_x(1)}\chi(\rho_x^2(y))(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\right|}{\int_{B_x(1)}\chi(\rho_x^2(y))dy}\\&\leqslant\sup_{B_x(1)}|\varphi(y)-\varphi(x)|\\&=\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi=O(e^{-a\rho(x)}).\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

同时

$$\Delta\tilde{\varphi}(x_0) = \Delta(\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x_0))|_{x=x_0}$$

$$= \int_M \Delta\left(\frac{\chi(\rho_y^2(x))}{\int_M \chi(\rho_y^2(x))dy}\right)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dy|_{x=x_0}. \tag{2.1.19}$$

直接计算

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\Delta u \cdot v - 2Du \cdot Dv - u\Delta v}{v^2} + \frac{2u}{v^3}|Dv|^2,$$

此处 $u = \chi(\rho_y^2(x))$, $v = \int_M \chi(\rho_y^2(x))dy$. 具体计算（下面以 ρ 表 $\rho_y(x)$），得

$$\nabla u = \chi'(\rho^2) \cdot 2\rho\nabla\rho,$$

$$\Delta u = 4\rho^2\chi''(\rho^2)|\nabla\rho|^2 + 2\chi'(\rho^2)|\nabla\rho|^2 + 2\rho\chi'(\rho^2)\Delta\rho.$$

如果 $K_M \geqslant -b^2$，则由系 1.1.2，当 $\rho = \rho_y(x) \leqslant 1$ 时，$\rho\Delta\rho \leqslant$ 常数. 至于 ∇u, Δu 中的其它各项，当 $\rho \leqslant 1$ 时，无一不是有限的。同理对 ∇v, Δv 亦如此。另一方面，由体积的比较定理（见 (1.1.21) 式），当 $K_M \leqslant 0$ 时，$\mathrm{Vol}B_x(1) \geqslant$ 常数. 因此

$$v(x) = \int_M \chi(\rho_x^2(y))dy = \int_{B_x(1)} \chi(\rho_x^2(y))dy$$

$$\geqslant \text{常数}. \ \mathrm{Vol}B_x\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \text{常数}.$$

总结以上所述，$\left|\Delta\left(\frac{u}{v}\right)\right|$ 有界，代入 (2.1.19)，即得

$$|\Delta\tilde{\varphi}(x)| \leqslant \text{常数} \cdot \underset{B_x(1)}{\mathrm{osc}}\ \varphi = O(e^{-a\rho(x)}). \tag{2.1.20}$$

3° 考虑 $C^\infty(M)$ 函数 $g = e^{-\delta\rho(x)}$. 易知，

$$\Delta g = -\delta e^{-\delta\rho(x)}\Delta\rho + \delta^2 e^{-\delta\rho(x)}|\nabla\rho|^2. \tag{2.1.21}$$

而当 $K_M \leqslant -a^2$ 时，由比较定理，

$$\Delta\rho \geqslant (n-1)a\ \coth a\rho$$

$$\geqslant (n-1)a = C_1 > 0.$$

C_1 是仅与 n, a 有关的正常数。因此，由 (2.1.21)，

$$\Delta g \leqslant e^{-\delta\rho(x)}(\delta^2|\nabla\rho|^2 - \delta C_1) < 0, \qquad (2.1.22)$$

只要 δ 充分小。

因为 $\Delta\tilde{\varphi} = O(e^{-\epsilon\rho(x)})$，只要 δ 充分小，由 (2.1.22)，我们可以找到常数 C，使

$$\Delta(Cg) \leqslant -|\Delta\tilde{\varphi}|,$$

即 $\Delta(\tilde{\varphi} + Cg) \leqslant 0$, $\Delta(\tilde{\varphi} - Cg) \geqslant 0$.

根据经典调和函数论的 Perron 方法，$\tilde{\varphi} + Cg$ 和 $\tilde{\varphi} - Cg$ 可以作为保证调和函数存在的闸 (barrier) 函数。即存在函数 u，使 $\Delta u = 0$，而 $\tilde{\varphi} - Cg \leqslant u \leqslant \tilde{\varphi} + Cg$. 此 u 满足边界条件，这是因为，

$$\begin{aligned}|u - \varphi|(x) &\leqslant |u - \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} - \varphi|(x) \\ &\leqslant Cg(x) + |\tilde{\varphi} - \varphi|(x) \\ &\leqslant Ce^{-\delta\rho(x)} + O(e^{-\epsilon\rho(x)}) \\ &\to 0 \ (\text{当}\ \rho(x) \to \infty\ \text{时}).\end{aligned}$$

这里用到 (2.1.18)。定理证完。

§2. Harnack 不等式与 Poisson 核

设 M 是单连通、完备的 n 维 Riemann 流形，$-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$. 固定基点 $O \in M$，相对 O 的距离函数记作 $\rho(x)$. 因为 M 是负曲率流形，$\rho(x)$ 是 M 上的光滑函数。在上节中，我们已经见到

$$\Delta e^{-K\rho(x)} = e^{-K\rho(x)}K(K|\nabla\rho|^2 - \Delta\rho);$$

由 (2.1.22) 知，当 K 充分小时，$\Delta e^{-K\rho(x)} < 0$. 当 K 充分大时，由比较定理 ((1.1.8) 式)，

$$\begin{aligned}\Delta\rho &\leqslant \frac{n-1}{\rho}(1 + b\rho) \\ &\leqslant C = \max_{x \in B_0(1)}\{\Delta\rho(x),\ (b+1)(n-1)\}.\end{aligned}$$

因此 $\Delta e^{-K\rho(x)} > 0$. 总之，只要 δ 充分小，$e^{-\delta\rho(x)}$ 与 $e^{-\frac{1}{\delta}\rho(x)}$ 分别

为M上的整体上调和（super harmonic）函数与次调和（subharmonic）函数，因而，M 是双曲流形，即它具有整体定义的 Green 函数 $G(x, y)$（见本章附录定理 A.1），满足：

1° $G(x, y)=G(y, x)$. 当 y 固定时，$\Delta_x G(x, y)=0$,

$$\forall x \neq y.$$

2° $G(x, y) \geqslant 0$.

3°

$$G(x, y) \sim \begin{cases} \rho_y^{2-n}(x), & n>2, \\ \log \dfrac{1}{\rho_y(x)}, & n=2, \end{cases} \quad \text{当 } x \rightarrow y \text{ 时.}$$

任意固定 y，令

$$\sup_{x \in B_y(1)} G(x, y) e^{\delta \rho_y(x)}=C_1, \quad \sup_{x \in B_y(1)} G(x, y) e^{\frac{1}{8} \rho_y(x)}=C_2,$$

则由上(次)调和函数的极大值原理，得

$$C_2 e^{-\frac{1}{8} \rho_y(x)} \leqslant G(x, y) \leqslant C_1 e^{-\delta \rho_y(x)}, \quad \forall x \in M \backslash B_y(1).$$

因而，当 y 固定时，$G(x, y) \rightarrow 0$（当 $\rho_y(y) \rightarrow \infty$ 时）。这样，$G(x, y)$ 就可以连续拓展到 $\bar{M} \backslash\{y\}$，$\left.G(x, y)\right|_{S(\infty)}=0$.

固定基点 $O \in M$. 固定 $y \in M$，$y \neq O$. 考虑

$$h_y(x)=\frac{G(x, y)}{G(O, y)}, \tag{2.2.1}$$

它是一个正调和函数，$h_y(O)=1$，具有唯一的极点 y. 我们可以称之为在基点 O 规格化的正调和函数，如果我们有一族在点 O 规格化的正调和函数 $\{h_{y_i}(x)\}$，其极点 $y_i \rightarrow \xi \in \partial \bar{M}=S(\infty)$. 我们希望能证明这一族调和函数列 $\{h_{y_i}(x)\}$ 收敛到M上一个正调和函数，它在 $S(\infty) \backslash \xi$ 上连续地为零，由此可以得出 Possion 核的存在与 Martin 边界的概念. 而要证明这一点，关键是要证明 $\{h_{y_i}(x)\}$ 在 $S(\infty)$ $\{\xi\}$ 中的任一点的一个邻域（按 (2.1.14)，$S(\infty)$ 中点的邻域即为截锥）是一致有界的. 保证这一点的是下述两个具有 Harnack 型的定理. 这两个定理是下文讨论的基本

工具，但它们的证明相对冗长，技术性较强，我们的写法是先引述并应用这两个定理以展开一般的理论，而将它们的证明则放在本章的§4.

固定基点 $O\in M$. 以单位切向量 $V\in S_O(1)\subset T_OM$ 为中心向量、角宽为 δ 的锥 $C_O(V,\delta)$(定义见(2.1.13))简记为 $C(\delta)$，截锥 $T_O(V,\delta,R)$（定义见(2.1.14))简记为 $T(\delta,R)$，按定义，$T(\delta,R)$ 是 $V\in S_O(1)\simeq S(\infty)$ 的一个邻域，又记

$$O'=\exp_O(v),$$

它是截锥 $T(\delta,1)$ 的"顶点".

定理 2.2. 如果 h 是定义在 $C(\pi/4)$ 上的正调和函数，它在 $\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)$ 上连续地变到零，则有估计

$$\sup_{x\in T\left(\frac{\pi}{8},1\right)} h(x)\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}h(O'), \tag{2.2.2}$$

其中 $O'=\exp_OV$ 是 $T\left(\frac{\pi}{8},1\right)$ 的顶点，而 C_1, C_2 为仅依赖于 n,a,b 的常数.

定理 2.3. 设 u,v 是定义在锥 $C(\pi/4)$ 上的正调和函数，连续到 $\partial C(\pi/4)$，并在 $\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)$ 上连续地变为零，则我们有

$$C_1^{-1}\frac{u(O')}{v(O')}\leqslant\frac{u(x)}{v(x)}\leqslant C_1\frac{u(O')}{v(O')} \tag{2.2.3}$$

$\forall x\in T(\pi/8,1)$, $O'=\exp_O(V)$，其中 C_1 为仅依赖于 n,a,b 的常数.

我们将首先应用这两个定理证明 Poisson 核的存在性、唯一性及研究它的性质. 而它们的证明则放在本章的第四节.

定义. M 上的调和函数 $P_\xi(x)$ 称为 $\xi\in S(\infty)$ 的在 O 点规格化的 Poisson 核函数，如果它满足：

$$\begin{aligned}
&1^\circ\quad P_\xi(x)>0,\ \forall x\in M,\\
&2^\circ\quad P_\xi(0)=1,\\
&3^\circ\quad P_\xi(x)\in C^0(\overline{M}\setminus\{\xi\}),\ \text{并且}\ P_\xi(x)|_{S(\infty)\setminus\{\xi\}}=0.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

命题 2.4. 对任何 $\xi \in S(\infty)$，Poisson 核函数存在.

证明：1) 如果 $\{u_k\}$ 是一串以 O 为顶点的锥 $C(\pi/4)$ 中的正调和函数列，满足 $u_k|_{C(\pi/4)\cap S(\infty)}=0$ 及 $|u_k(O')|\leqslant$ 常数，那么根据定理 2.2，$\{u_k\}$ 将在 $T(\pi/8,1)$ 中一致有界. 于是由 Harnack 原则，$\{u_k\}$ 中存在一串收敛子序列 $\{u_{k'}\}$，它在 $T(\pi/8,1)$ 中内闭一致收敛到调和函数 $u\in C^\infty(T(\pi/8,1)\cap C^0(\overline{T(\pi/8,1)\cap S(\infty)})$，$u(x)$ 仍是正的（这由极大值原理可知），而且 $|u(x)|\leqslant ke^{-C\rho(x)}$，因而 $u|_{\overline{T(\pi/8,1)}\cap S(\infty)}\equiv 0$.

2) 任取 $\xi\in S(\infty)$，如果正调和函数列 $\{u_k\}$ 满足 $u_k(0)=1$，并且对任何不组成 ξ 的邻域的锥 $C(\pi/4)$（即 $\xi\bar{\in}\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)$），都有：当 k 充分大时，$u_k|_{\overline{C(\pi/4)}\cap S(\infty)}=0$，那么 $\{u_k\}$ 将满足 1) 的条件，这是因为根据正调和函数的 Harmack 不等式（只要 Ricci 曲率有下界即成立）(1.3.17) 有 $|u_k(O')|\leqslant$ 常数. 由 1)，这将意味对任何 $\eta\neq\xi$，$\eta\in S(\infty)$，都有 $u(\eta)=0$，因此这个极限函数 u 正是在 ξ 点的 Poisson 核函数.

3) 对于满足 2) 的条件的正调和函数列，我们可以举出以下两类例子：

例 1：如 (2.2.1) 所示，取 M 的 Green 函数 $G(x,y)$，如果 $y_k\to\xi\in S(\infty)$，那么

$$h_{y_k}(x)=\frac{G(x,y_k)}{G(O,y_k)}$$

将满足条件 2)，因此

$$P_\xi(x)=\lim_{y_k\to\xi}h_{y_k}(x)=\lim_{y_k\to\xi}\frac{G(x,y_k)}{G(O,y_k)} \tag{2.2.5}$$

给出 Poisson 核函数.

例 2：根据本章 § 1 的 Dirichlet 问题的可解性，它自然导致调和测度的存在. 所谓在 $x\in\overline{M}$ 的调和测度 ω^x，是指 $S(\infty)$ 上的唯一的正 Borel 测度，满足

$$(Hf)(x) = \int_{S(\infty)} f(Q) d\omega^x(Q),$$
$$\forall f \in C^0(S(\infty)), \tag{2.2.6}$$
其中 Hf 是边值为 f 的唯一的调和函数。

由此推出，由于任何确定的 Borel 子集 E，如果 χ_E 表示 E 的特征函数，则

$$\omega_E(x) = \int_{S(\infty)} \chi_E(Q) d\omega^x(Q) \tag{2.2.7}$$

即为以 χ_E 为边值的唯一的正调和函数。

任取 $\xi \in S(\infty)$，设它在 $S_O(1) < T_O M$ 中的对应向量为 V。取角宽 $\delta_i \to 0$。令 $\Delta_i = C_O(V, \delta_i) \cap S(\infty)$，则 Δ_i 是 $S(\infty)$ 上以 ξ 为中心的渐缩的邻域，即 $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$，$\cap \Delta_i = \{\xi\}$，不难看出，

$$u_i(x) = \frac{\omega_{\Delta_i}(x)}{\omega_{\Delta_i}(0)} \tag{2.2.8}$$

给出了满足条件 2) 的另一例子。

为了证明 Poisson 核的唯一性及它对 ξ 的 Lipschitz 连续性，我们需要下面的引理。

引理 2.5. 设M的曲率 K_M 满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$，$\gamma$ 是由 $o \in M$ 出发的一条测地射线。$p \in \gamma$，以 p 为顶点，γ 为中心线、角宽为 δ 的锥记作 $C_p(\delta)$，则存在常数 $T > 0$，仅依赖于 n, a, b，使 $\forall t \geqslant 0$，

$$C_{\gamma(t+T)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \subseteq C_{\gamma(t)}\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{2.2.9}$$

证明：为了叙述简便，如果 $A, B, C \in M$。我们以 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 分别表示A出发通过B和C的测地射线，而 $\theta(\overline{AB}, \overline{AC})$ 则表示射线 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 在A的夹角。

令 $x_0 = \gamma(t)$，$x_1 = \gamma(t+T)$。任取 $p \in \partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$\theta(\overline{x_1 x_0}, \overline{x_1 p}) = \frac{3}{4}\pi.$$

引理归结为要证当 T 充分大时，

$$\theta(\overline{x_0p},\ \overline{x_0x_1}) \leqslant \frac{\pi}{8},\ \forall p \in \partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{2.2.10}$$

记 $\rho(x_0, x_1) = r$, $\rho(x_0, p) = s$, $\rho(x_1, p) = \sigma$, $\theta(\overline{x_0p},\ \overline{x_0x_1}) = \theta$，则由比较定理 (2.1.9)，有

$$\cos\theta \geqslant \coth ar\ \coth as - \frac{\operatorname{ch} a\sigma}{\operatorname{sh} ar\ \operatorname{sh} as}, \tag{2.2.11}$$

在 Δx_0x_1p 中，因为 $\theta(\overline{x_1x_0},\ \overline{x_1p}) = \frac{3}{4}\pi$，根据双曲几何中大边对大角，$s > r$，$s > \sigma$，因此，

$$\frac{\operatorname{ch} a\sigma}{\operatorname{sh} ar\ \operatorname{sh} as} = \frac{\operatorname{ch} a\sigma}{\operatorname{ch} as} \cdot \frac{\operatorname{ch} as}{\operatorname{sh} as} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} ar}$$

$$\leqslant \coth as \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} ar}.$$

当 $r \to \infty$ 时，$\operatorname{sh} ar \to \infty$，$\coth as \to 1$，$\coth ar \to 1$，(2.2.11) 右边前项 $\to 1$，后项 $\to 0$，因而 $\exists T$，使只要 $r \geqslant T$，即有

$$\cos\theta > \cos\frac{\pi}{8} \Longrightarrow \theta \leqslant \frac{\pi}{8}.$$

引理 2.6. 记号同引理 2.5. $x_0 = \gamma(t)$，$x_1 = \gamma(t + T)$，$p \in \partial C_{x_1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则当 T 充分大时，存在常数 $C > 0$，使

$$\max_{p \in \partial C_{\gamma_1}(\pi/4)} \theta(\overline{x_0x_1},\ \overline{x_0p}) \geqslant e^{-CbT}. \tag{2.2.12}$$

证明：在 Δx_0x_1p 中，记 $\theta = \theta(\overline{x_0x_1},\ \overline{x_0p})$，$\alpha = \theta(\overline{px_1},\ \overline{px_0})$ 而 $\theta(\overline{x_1x_0},\ \overline{x_1p}) = \frac{3}{4}\pi \cdot \rho(x_0, p) = s$，$\rho(x_0, x_1) = T$，

$$\rho(x_1, p) = \sigma,$$

则由比较定理 (2.1.10)，

$$\cos\theta \leqslant \frac{\operatorname{ch} bT\ \operatorname{ch} bs - \operatorname{ch} b\sigma}{\operatorname{sh} bT\ \operatorname{sh} bs}. \tag{2.2.13}$$

因为是负曲率流形，$\theta(\overline{x_1x_0}, \overline{x_1p}) = \frac{3}{4}\pi$，所以 $\alpha < \frac{\pi}{4}$，仍由比较定理 (2.1.10)，

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \leqslant \cos\alpha$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{ch} b\sigma \operatorname{ch} bs - \operatorname{ch} bT}{\operatorname{sh} bs \operatorname{sh} b\sigma},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh} bs \operatorname{sh} b\sigma}{\operatorname{ch} bs} \leqslant \operatorname{ch} b\sigma - \frac{\operatorname{ch} bT}{\operatorname{ch} bs}.$$

将上式代入 (2.2.13)，得

$$\cos\theta \operatorname{sh} bT \operatorname{sh} bs \leqslant \operatorname{ch} bT \operatorname{ch} bs - \operatorname{ch} b\sigma$$

$$\leqslant \operatorname{ch} bT \operatorname{ch} bs - \frac{\operatorname{ch} bT}{\operatorname{ch} bs} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh} bs \operatorname{sh} b\sigma}{\operatorname{ch} bs}$$

$$= \operatorname{ch} bT \frac{\operatorname{sh}^2 bs}{\operatorname{ch} bs} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh} bs \operatorname{sh} b\sigma}{\operatorname{ch} bs},$$

$$\cos\theta \leqslant \frac{\operatorname{ch} bT}{\operatorname{sh} bT}\cdot \tanh bs$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sh} b\sigma}{\operatorname{ch} bs}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh} bT}. \tag{2.2.14}$$

因为 $s > \sigma > s - T$，当 T 固定，$s \to \infty$ 时，

$$\frac{\operatorname{sh} b\sigma}{\operatorname{sh} bs} \to 1.$$

令 $\theta_\infty = \lim_{s\to\infty}\theta$，(2,2,14) 为

$$1 - \frac{\theta_\infty^2}{2} \leqslant \cos\theta_\infty$$

$$\leqslant \coth bT - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\operatorname{sh} bT}$$

$$= \frac{1 + e^{-2bT}}{1 - e^{-2bT}} - \sqrt{2}\,\frac{e^{-bT}}{(1 - e^{-2bT})}.$$

因此，当 T 充分大时，即得 $\theta_\infty \geqslant e^{-CbT}$. 证毕。

命题 2.7. 设 C 是以 O 为顶点的一个锥，u, v 是两个在 C 中定义的正调和函数，并且 $u|_{C\cap S(\infty)} = v|_{C\cap S(\infty)} = 0$，则 $\frac{u}{v}$ 可以 C^{α} 连续地拓展到 $\bar{C}\cap S(\infty)$ 的内部，其中 α 仅依赖于 n, a, b.

证明：任取 $Q \in (\bar{C}\cap S(\infty))^0$（即 $\bar{C}\cap S(\infty)$ 内部），以 $\sigma = \sigma(t)$ 记测地射线 $\overline{OQ}$，因为 Q 的取法，$\exists \delta > 0$，使 $C_0(\delta) \subset C$. 根据引理 2.5，$\exists T > 0$，使

$$C_{\sigma((k+1)T)}(2\delta) \subset C_0(kT)(\delta), \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.2.15}$$

记 $C_k = C_{\sigma(kT)}(\delta)$，则 $\{C_k\}$ 显然组成一族渐缩的 Q 的开邻域，并且 $\bigcap\limits_k C_k = \{Q\}$.

令

$$\underline{\varphi}_i = \inf_{C_i} \frac{u}{v},$$

$$\bar{\varphi}_i = \sup_{C_i} \frac{u}{v},$$

则在 C_i 中，$\bar{\varphi}_i \geqslant \frac{u}{v} \geqslant \underline{\varphi}_i$.

根据定理 2.3，(2.2.3)，存在常数 $C_1 > 0$，使（只要 T 取得足够大即可做到）

$$\bar{\varphi}_{i+1} \leqslant C_1 \underline{\varphi}_{i+1}, \quad \forall i = 0, 1, \cdots. \tag{2.2.16}$$

令

$$u_i = u - \underline{\varphi}_i v,$$

由 (2.2.16)，$\exists K > 0$，K 仅依赖于 n, a, b，使

$$\sup_{C_{i+1}} \frac{u_i}{v} \leqslant K \inf_{C_{i+1}} \frac{u_i}{v}.$$

此即

$$(\bar{\varphi}_{i+1} - \underline{\varphi}_i) \leqslant K(\underline{\varphi}_{i+1} - \underline{\varphi}_i).$$

若 $u_i = \bar{\varphi}_i v - u$，同样可得

$$(\bar{\varphi}_i - \underline{\varphi}_{i+1}) \leqslant K(\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{i+1}).$$

令

$$\omega_i = \overline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i = \sup_{C_i} \frac{u}{v} - \inf_{C_i} \frac{u}{v}$$

$$= \operatorname*{osc}_{C_i}\left(\frac{u}{v}\right).$$

将上列两不等式相加，得

$$\omega_i + \omega_{i+1} \leqslant K(\omega_i - \omega_{i+1})\omega_{i+1}$$

$$\leqslant \frac{K-1}{K+1}\omega_i = \varepsilon\omega_i,$$

$$\varepsilon = \frac{K-1}{K+1} < 1.$$

因此，$\omega_i \leqslant \varepsilon^i \omega_0$，此即

$$\operatorname*{osc}_{C_i}\left(\frac{u}{v}\right) \leqslant \varepsilon^i \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= e^{i\log\varepsilon} \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= e^{-iC_3} \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right), \tag{2.2.17}$$

其中 $C_3 = -\log\varepsilon > 0$，以 θ_i 记 ∂C_i 对 O 所张的最大角度，则由引理 2.6，当 i 充分大时，

$$\theta_i \geqslant e^{-\xi biT},$$

即 $-i \leqslant \frac{1}{\xi bT}\ln\theta_i$，其中 ξ 为正常数，由 (2.2.17)，

$$\operatorname*{osc}_{C_i}\left(\frac{u}{v}\right) \leqslant e^{\frac{C_3}{\xi bT}\ln\theta_i} \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\leqslant \theta_i^\alpha \sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right),$$

其中 $\alpha = \frac{C_3}{\xi bT}$ 为正常数，由定理 2.3，$\sup_{C_0}\left(\frac{u}{v}\right)$ 为有界量，因此即得

$$\left|\frac{u}{v}(y) - \frac{u}{v}(y')\right| \leqslant 常数 \cdot \theta_i^\alpha, \forall y, y' \in C_i. \tag{2.2.18}$$

u/v 的有界性再加上上式就保证了当 $y, y' \in C_i$, $y, y' \to Q \in S(\infty)$ 时，$\frac{u}{v}(y)$ 和 $\frac{u}{v}(y')$ 有相同的极限．我们不妨定义：当

$$Q \in S(\infty)$$

时，

$$\frac{u}{v}(Q) = \lim_{t\to\infty} \frac{u}{v}(\sigma(1)), \tag{2.2.19}$$

σ 为连结 $\overline{OQ}$ 的测地射线．根据这个定义，(2.2.18) 就给出：

$$\forall \xi, \ \xi' \in (\bar{C} \cap S(\infty))^{\circ},$$

$$\left|\frac{u}{v}(\xi) - \frac{u}{v}(\xi')\right| \leqslant \text{常数} \cdot \theta(\xi, \xi')^{\alpha}. \tag{2.2.20}$$

命题证毕．

系．以 $P(x, \xi)$ 记在 $\xi \in S(\infty)$ 上的 Poisson 核函数，则当 x 固定时，有

$$|P(x, \xi) - P(x, \xi')| \leqslant C\theta(\xi, \xi')^{\alpha}. \tag{2.2.21}$$

证明：取

$$P(x, \xi) = \lim_{y\to\xi} \frac{G(x, y)}{G(O, y)}, \tag{2.2.22}$$

当 x 和 O 固定，看作 y 的函数，令 $u = G(x, y)$，$v = G(0, y)$，引用上述命题即可．

严格说来，(2.2.21) 的证明必须在证明 Poisson 核的唯一性以后才完整，现在我们就来给出表明唯一性的命题．

命题 2.8. 对任何 $\xi \in S(\infty)$，只存在唯一的在基点 O 规格化的 Poisson 核函数．

证明：设 f, g 为两个在 $\xi \in S(\infty)$ 的 Poisson 核函数．按定义，它们满足：在 M 上为正调和函数，$f(0) = g(0) = 1$，

$$f|_{S(\infty)\setminus\{\xi\}} = g|_{S(\infty)\setminus\{\xi\}} = 0.$$

记 $\sigma(t)$ 为由 O 到 $\xi \in S(\infty)$ 的测地射线．任意固定正整数 k．令 $x_0 = \sigma(0) = 0$，$x_1 = \sigma(T)$，$\cdots$，$x_k = \sigma(kT)$．以 x_i 为顶点、$-\dot{\sigma}(iT)$ 为中心线、角宽为 δ 的锥记作 $C_{x_i}(\delta)$，则由引理

2.5，只要 T 充分大，可使

$$C_{x_{i-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\subset C_{x_i}\left(\frac{\pi}{8}\right),\ i=1,\cdots,k. \tag{2.2.23}$$

因为 f, g 在 $S(\infty)$ 上只有唯一的非零点 ξ，而 ξ 显然不在

$$\overline{C_{x_k}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)$$

上，因而 f, g 在 $\overline{C_i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cap S(\infty)$ 上恒为零 $(i=1,\cdots,k)$，在 $C_{x_k}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中引用定理 2.3，则至少在 $C_{x_{k-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中有

$$\sup_{C_{x_{k-1}}(\frac{\pi}{4})}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant C\frac{f(O)}{g(O)}=C, \tag{2.2.24}$$

其中 C 为不依赖于 k 的常数.

同时，根据命题 2.7 证明中的 (2.2.17)，得

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{C_{x_0}(\frac{\pi}{4})}\left(\frac{f}{g}\right)&\leqslant \varepsilon^{k-1}\sup_{C_{x_{k-1}}(\frac{\pi}{4})}\left(\frac{f}{g}\right),\quad \varepsilon<1\\&\leqslant C\varepsilon^{k-1}.\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

任取小邻域 $U\subset C_{x_0}\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则由上式，有

$$\operatorname*{osc}_{U}\left(\frac{f}{g}\right)\leqslant C\varepsilon^{k-1}.$$

令 $k\to\infty$，得 $\operatorname*{osc}_{U}\frac{f}{g}=0$，在 U 上，$f\equiv g$，由调和函数的唯一性定理，在整个 M 上 $f\equiv g$. 证毕.

§3. Martin 边界与 Martin 积分表示

本节我们将引进 Martin 边界的概念，并证明 M 的 Martin 边界和前面讨论的几何边界 $S(\infty)$ 可以建立一个自然的同胚 (homeomorphism) 以及通过 Poisson 核表示调和函数的 Martin 积分公式.

设 M 仍是单连通、完备、n 维的 Riemann 流形，截面率 K_M 满

足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2$. 固定原点 $O \in M$. 以 $G(x, y)$ 表 M 的 Green 函数,则

$$h_y(x) = \frac{G(x, y)}{G(O, y)} \tag{2.3.1}$$

为在 O 上正规化的、以 y 为唯一极点的 Green 函数. 如果点集 $\{y_i\}$ 在 M 中无极限点，那么由定理 2.2，$\{h_{y_i}(x)\}$ 在 M 中内闭一致有界. 根据 Harnack 原则，$\{h_{y_i}(x)\}$ 具有在 M 内闭一致收敛的子序列，其极限是 M 上的正调和函数.

点列 $\{y_i\}$ 称为 M 中的基本序列，如果相应的函数序列 $\{h_{y_i}\}$ 在 M 上收敛到一正调和函数. 设 $Y = \{y_i\}$ 是一基本序列，其相应的极限正调和函数记作 h_Y. 两个基本序列 $Y = \{y_i\}$,

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y}_i\}$$

称为等价，当且仅当 $h_Y = h_{\tilde{Y}}$.

定义：M 的 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 由 M 上基本序列的等价类组成. 因为每一 $Y \in \mathscr{M}$ 都对应着唯一的 h_Y，我们也可以将 $\mathscr{M}$ 看成全体 h_Y 组成.

令 $\widetilde{M} = M \cup \mathscr{M}$. 在 $\widetilde{M}$ 上我们可以定义度量如下：如果 Y, $Y' \in \widetilde{M}$，则

$$\rho(Y, Y') = \sup_{x \in B_0(1)} |h_Y(x) - h_{Y'}(x)|. \tag{2.3.2}$$

不难证明，在此度量下 $\widetilde{M}$ 是完备的并且是紧的. 在度量拓扑 ρ 下 $\mathscr{M}$ 组成 $\widetilde{M}$ 的边界，并且拓扑 ρ 与 M 自身作为 Riemann 流形的拓扑等同. 注意，M 之结构与原点 O 之选择无关.

定理 2.9. M 的 Martin 边界 $\mathscr{M}$ 与其几何边界 $S(\infty)$ 之间存在一自然同胚 Φ: $\mathscr{M} \to S(\infty)$.

证明：设 $Y = \{y_i\} \in \mathscr{M}$ 是一基本序列，则 $h_{y_i}(x) \to h_Y(x)$ 是 M 上的正调和函数. $\{y_i\}$ 在 M 内无极限点，其极限点只能在 $S(\infty)$ 上. 根据命题 2.8，不同的极限点对应不同的调和函数(实为不同点的 Poisson 核函数)，因此 $\{y_i\}$ 仅有唯一的极限点 $y_\infty \in S(\infty)$. 定义映射 Φ: $\mathscr{M} \to S(\infty)$ 为

$$\Phi(h_Y) = y_\infty. \tag{2.3.3}$$

Φ 显然是在上（surjective）的，因为任何序列 $\{z_i\} \to z_0 \in S(\infty)$ 都含有基本的子序列.

Φ 是连续的：设在 $\mathscr{M}$ 中 $h_i \to h$. $\Phi(h) = Q \in S(\infty)$,

$$\Phi(h_i) = Q_i \in S(\infty).$$

依前所述，h_i 实为在 Q_i 的核函数，h 为在 Q 的核函数. 如果两子序列 $\{Q_{i'}\}$ 和 $\{Q_{i''}\}$ 具有不同的极限 $\lim Q_{i'} \neq \lim Q_{i''}$. 那么 $\{h_{i'}\}$ 和 $\{h_{i''}\}$ 将给出不同的核函数. 这和 $h_i \to h$ 相矛盾.

Φ 是一一的：设 $Y = \{y_i\} \in \mathscr{M}$，$\Phi(h_Y) = Q$. 如果 $\{z_i\}$ 是任何基本序列，$z_i \to Q$，那么 $\lim\limits_{i\to\infty} G(x, z_i)/G(O, z_i)$ 存在并且是点 Q 的核函数，根据唯一性命题 2.8

$$h_Y = \lim_{i\to\infty} G(x, z_i)/G(O, z_i),$$

因而 $Y = \{z_i\}$.

现在我们已经可以把 $\mathscr{M}$ 中的元素合理地记作 $h_\xi, \xi \in S(\infty)$. 根据命题 2.7 的系，有

$$|h_\xi(x) - h_{\xi'}(x)| \leqslant C\theta(\xi, \xi')^\alpha, \quad \forall x \in B_0(1), \tag{2.3.4}$$

其中 C, α 为仅依赖于 n, a, b 的正常数. 上式即为

$$\begin{aligned} \rho(h_\xi, h_{\xi'}) &= \rho(\Phi^{-1}(\xi), \Phi^{-1}(\xi')) \\ &\leqslant C\theta(\xi, \xi')^\alpha, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

它表明 $\Phi^{-1}: S(\infty) \to \mathscr{M}$ 是 C^α 映射，自然 Φ 是一同胚，定理证毕.

在上节(见(2.2.6)和(2.2.7))我们知道，根据调和函数 Dirichlet 问题的可解性，存在调和测度 ω^x. 它是 $S(\infty)$ 上的正 Borel 测度，满足：$\forall f \in C^0(S(\infty))$,

$$(Hf)(x) = \int_{S(\infty)} f(Q) d\omega^x(Q).$$

ω^x 在 $S(\infty)$ 上的总测度为 1. 由此推出，对于 $S(\infty)$ 上的 Borel 子集 E，有界调和函数

$$\omega_E(x) = \omega^x(E) = \int_{S(\infty)} \chi_E(Q) d\omega^x(Q)$$

是 E 的调和测度，其中 $\chi_E(Q)$ 是 E 的特征函数. 根据测度论的标

准结果，对应这一调和测度的 Radon-Nikodym 导数

$$K(x,Q)=\frac{d\omega^x}{d\omega^O}(Q)=\lim_{i\to\infty}\frac{\omega^x(\Delta_i)}{\omega^O(\Delta_i)} \qquad (2.3.6)$$

对几乎处处的 $Q\in S(\infty)$ 存在. (2.3.6)中 O 是固定的原点，Δ_i 是 $S(\infty)$ 中以 Q 为中心的渐缩的领域集，使 $\Delta_{i+1}\subset\Delta_i$，$\bigcap\Delta_i=Q$. 由 (2.2.8) 及唯一性定理，$K(x,Q)=p(x,Q)$ 为在 Q 点的 Piosson 核函数.

在经典的调和函数论中，首先是 Herglotz 对单位圆

$$D=\{|z|<1\}$$

建立了正调和函数的表示公式：对于任何 D 上的正调和函数，皆可找到 ∂D 上的正 Borel 测度 μ，使

$$u(x)=\int_{\partial D}p(x,Q)d\mu(Q). \qquad (2.3.7)$$

上述公式对 $\mathbf{R}^n$ 中有界域情况的推广是 Martin 完成的，Martin 建立了类似的公式，其中的积分是在理想边界——Martin 边界上进行的. 遵从这种经典的想法，在建立了 Martin 边界以后，也就可以证明类似的 Martin 表示上式.

定理 2.10. 设 u 是 M 上的正调和函数，则在 $S(\infty)$ 上存在唯一的、有限的、正 Borel 测度 μ，使

$$u(x)=\int_{S(\infty)}p(x,Q)d\mu(Q), \qquad (2.3.8)$$

其中 $p(x,Q)$ 是 Poisson 核函数.

证明：固定原点 $O\in M$ 对 M 中的有界域 $B_O(R)$ (以 O 为中心、半径为 R 的测地球)应用经典的 Martin 表示公式，则对 $x\in B_O(R)$，有

$$u(x)=\int_{S_O(R)}u(Q)P_R(x,Q)d\omega_R(Q), \qquad (2.3.9)$$

其中 $P_R(x,Q)$ 是 $B_O(R)$ 的 Poisson 核函数，ω_R 是 $S_O(R)$ 的调和测度. 因为 $P_R(0,Q)=1$，所以

$$u(0)=\int_{S_O(R)}u(Q)d\omega_R(Q). \qquad (2.3.10)$$

将 $S_O(R)$ 等同于 $S_O(1)\simeq S(\infty)$，其中 $R\in[1,\infty]$. 上式表明 $S(\infty)$ 上的序列测度 $\{\mu_R=u|_{S_O(R)}\cdot\omega_R\}$ 中的每一个都具有总质量 $u(0)$. 根据测度论，存在一个子测度序列为 $\{\mu_{R_j}\}R_j\to\infty$，使 μ_{R_j} 弱收敛于某有限、正 Borel 测度 μ.

另外，再说明：对于固定的 $Q\in S(\infty)$，函数族 $\{P_{R_j}(x,Q)\}$ 中有一子序列收敛于 Q 的核函数. 根据唯一性定理，其极限即 $P(x,Q)$. 取任意锥 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$，使之不包含测地射线 $\overline{OQ}$（即不是 Q 的邻域）. 将 $P_{R_j}(x,Q)$ 零扩充到整个 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$，即令

$$\zeta_j=\begin{cases}P_{R_j}(x,Q), & x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\cap B_O(R_j),\\ 0, & x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big\backslash B_O(R_j).\end{cases}$$

于是在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上 $\Delta\zeta_j\geqslant 0$. 在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上解 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}\Delta h_j=0, & \text{在 } C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{ 内},\\ h_j=\zeta_j, & \text{在 } \partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{ 上},\end{cases}$$

根据极大值原理以及定理 2.2，在 $T_O\left(\frac{\pi}{8},1\right)$ 上，

$$\zeta_j\leqslant h_j\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}h_j(O'). \tag{2.3.11}$$

不失一般性可以假定调和函数列 $\{h_j\}$ 在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 中内闭一致收敛（必要的话选一子序列），(2.3.11) 即导致 ζ_j（因而 P_{R_j}）在 $C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)\cap S(\infty)$ 上连续地收敛到 0，因而 $\lim\limits_{j\to\infty}P_{R_j}(x,Q)=\rho(x,Q)$. 这样，根据 $\mu_{R_j}\xrightarrow{\text{弱}}\mu$，即得

$$\begin{aligned}u(x)&=\int_{S_O(R_j)}u(Q)P_{R_j}(x,Q)d\mu_{R_j}(Q)\\ &\to\int_{S(\infty)}P(x,Q)d\mu(Q).\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

下面再证唯一性，设

$$u(x)=\int_{S(\infty)}P(x,Q)d\mu(Q)$$
$$=\int_{S(\infty)}P(x,Q)d\nu(Q),$$

其中 μ,ν 皆为正的 Borel 测度，总测度为 1，而 μ 由(2.3.12)给出.

同前面一样，将 $S_0(R_j)$ 和 $S(\infty)$ 等同，任取闭集 $E\subset S(\infty)$，则

$$\mu(E)=\lim_{j\to\infty}\int_E u(Q)d\mu_{R_j}(Q)$$
$$=\lim_{j\to\infty}\int_E\int_{S(\infty)}P(Q,Q')d\nu(Q')d\mu_{R_j}(Q)$$
$$=\lim_{j\to\infty}\int_{S(\infty)}\left[\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)\right]d\nu(Q').$$

在 $S(\infty)$ 中任取开集 $F\supset E$. 因为 P 是 Poisson 核函数，当 $j\to\infty$ 时，$\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)$ 对 $Q'\in S(\infty)\setminus F=S_0(R_j)\setminus F$ 一致收敛于零. 因此

$$\mu(E)=\lim_{j\to\infty}\left[\int_{S(\infty)\setminus F}\left[\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)\right]d\nu(Q')\right.$$
$$+\lim_{j\to\infty}\int_F\left[\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)\right]d\nu(Q')$$
$$=\lim_{j\to\infty}\int_F\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)d\nu(Q')$$
$$\leqslant\nu(F).$$

式中用到 $\int_E P(Q,Q')d\mu_{R_j}(Q)\leqslant 1$. 因为 F 是任意包含 E 的开集，因此 $\mu(E)\leqslant\nu(E)$. 再注意到 μ,ν 的总测度同为 $u(0)$，因而只能是 $\mu(E)=\nu(E)$. $\forall$ 闭集 $E\subset S(\infty)$. 定理证毕.

§4. Harnack 不等式的证明

本节的任务是给出定理 2.2 与定理 2.3 的详细证明. 这是两

个关于调和函数的 Harnack 型定理. 在前节我们看到,它们是关于 Poisson 核函数和 Martin 表示公式的技术基础.

设M仍为单连通、完备、n维 Riemann 流形,满足

$$-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2.$$

任意固定基点 $O \in M$. $T_O M$ 中单位球面记以 $S_O(1)$. 取 $v \in S_O(1)$. 以O为顶点,v为中心线,角宽为δ的锥记为 $C_O(v, \delta)$(在v不起重要作用时记作 $C_O(\delta)$). $C_O(v, \delta)$ 与 $B_O(R)$ 的余集 $T_O(v, \delta, R) = C_O(v, \delta) \backslash B_O(R)$ 组成 $v \in S_O(1) \simeq S(\infty)$ 的一个邻域. 截锥 $T_O(v, \delta, R)$ 的顶点记作 $O' = \exp_O v$. 定理 2.2 讨论的是调和函数在 $S(\infty)$ 附近的性质.

定理 2.2. 如果u是定义在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上的正调和函数,在 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上连续,它在 $\overline{C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cap S(\infty)$ 上连续地变为零,则下列估计成立

$$\sup_{x \in T\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)} u(x) \leqslant C_1 e^{-C_2 \rho(x)} u(O'), \tag{2.4.1}$$

其中 C_1, C_2 为仅依赖于 C_1, b, n 的常数.

证明分为以下几步:

引理 1. 对于任何正实数β, $1 > \beta \geqslant 0$, 存在 $\varphi(x) \in C^\infty(M)$ 及常数 R_0, 满足

i) $|D\varphi| + |D^2\varphi| \leqslant C_1 e^{-C_2 \rho(x)}$, $\forall x \in T\left(\frac{\pi}{4}, R_0\right)$,

ii) $\varphi|_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right) \backslash B_O(R_0)} = 1$,

iii) $\varphi|_{T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right)} = \beta$.

证明: 取逐段线性函数 $\varphi_1(\theta): [0, \pi] \to \mathbf{R}$.

$$\varphi_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \pi \geqslant \theta \geqslant \frac{\pi}{4} - \varepsilon, \\ \beta, & \frac{\pi}{8} + \varepsilon_1 \geqslant \theta \geqslant 0, \\ \text{连接 1 和 } \beta \text{ 的斜线} & \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 \geqslant \theta \geqslant \frac{\pi}{8} + \varepsilon, \end{cases}$$

将 $\varphi_1(\theta)$ 看成 $\xi\in S_O(1)$ 上的函数，其中 θ 为 ξ 与 ν 的夹角，而 ν 为锥 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的中心线。再将 $\varphi_1(\theta)$ 沿从 O 出发的射线加以延拓，得到定义于整个 $M\setminus\{0\}$ 上的 Lipschitz 函数 φ_1，即定义 $\varphi_1(y)=\varphi_1(\theta_y)$，$\theta_y$ 是射线 $\overline{Oy}$ 与 ν 的夹角。

取 $\chi\subset C_0^\infty(\mathrm{R})$，$\chi\geqslant 0$，$\operatorname{supp}\chi\subset[-1,1]$，$\chi(0)>0$，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{\int_M\chi(\rho^2(x,y))dy}\int_M\chi(\rho^2(x,y))\varphi_1(y)dy,\tag{2.4.2}$$

则 φ 为满足引理条件之函数。

i) 的证明完全类似于定理 2.1 的证明（见 (2.1.17)—(2.1.20)），主要用到当 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2$ 时，

$$\begin{aligned}a\coth(a\rho)(g-d\rho\otimes d\rho)&\leqslant D^2\rho\\&\leqslant b\coth(b\rho)(g-d\rho\otimes d\rho),\end{aligned}$$

在计算时，只要注意

$$D^2\chi(\rho^2)=\chi''d\rho\otimes d\rho+\chi'D^2\rho,$$

及

$$\begin{aligned}\|(D^2\varphi)(x_0)\|&=\|D^2[\varphi-\varphi_1(x_0)](x_0)\|\\&\leqslant C_1\operatorname*{osc}_{B_{x_0}(1)}\varphi_1,\end{aligned}$$

而 $\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi_1=O(e^{-a\rho(x)})$.

ii) 如果 $y\in B_x(1)$，$\theta=\theta(\overline{Ox},\overline{Oy})$，则由 (2.1.11)，

$$\theta\leqslant C_1e^{-a\rho(x)},$$

因此，存在 R_0，当 $\rho(x)\geqslant R_0$ 时，$\theta(\overline{Ox},\overline{Oy})\leqslant C_1e^{-aR_0}<\varepsilon_1$，这样，当 $x\in\partial C_0\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\rho(x)\geqslant R_0$ 时，

$$\varphi(x)=\frac{1}{\int_M\chi(\rho^2(x,y))dy}\int_M\chi(\rho^2(x,y))\varphi_1(y)dy$$

$$= \frac{1}{\int_M \chi(\rho^2(x, y))dy} \int_{B_x(1)} \chi(\rho^2(x, y))dy$$

$$= 1.$$

这是因为此时 $y \in B_x(1)$，$\theta(\overline{Ox}, \overline{Oy}) < \varepsilon_1$，$\varphi_1(y) = 1$.

iii) 的证明与 ii) 相同.

引理 2. 设 $u(x) > 0$，$\Delta u = 0$，u 在 $\overline{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cap S(\infty)$ 上为零，则 $\exists \delta > 0$，$R_0 > 0$. 使

$$u(x) \leqslant C_1 e^{-\delta\rho(x)} \sup_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} u,$$

$$\forall x \in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right). \tag{2.4.3}$$

证明：在引理 1 中取 $\beta = 0$，则存在满足引理 1 中的 i), ii), iii) 的函数 $\varphi(x)$，由于 i)，$\forall x \in T\left(\frac{\pi}{4}, R_0\right)$，$\Delta\varphi \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}$.
改变 C_1 和 C_2，自然也可以使

$$\Delta\varphi \leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)}, \quad \forall x \in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

令 $f = \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)}$，其中 C 和 δ 为待定的正常数，则由 (2.1.22)，

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta\varphi + C\Delta e^{-\delta\rho(x)} \\ &\leqslant C_1 e^{-C_2\rho(x)} - C\delta(C_3 - \delta)e^{-\delta\rho(x)},\end{aligned}$$

其中 C_3 为仅与 n, a 有关的常数. 因此，只要 δ 适当小而 C 充分大. 就可以使 $\Delta f \leqslant 0$.

另一方面，同时可使 $f|_{\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)} \geqslant 1$. 这是因为当 $x \in \partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 时，由 ii)，

$$f(x) = \begin{cases} \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)} \geqslant 1, & \text{当 } \rho(x) \geqslant R_0, \\ \varphi + Ce^{-\delta\rho(x)} \geqslant Ce^{-\delta R_0} \geqslant 1, & \text{当 } \rho(x) \leqslant R_0, \end{cases}$$

只要 C 充分大.

同时，根据 φ 的性质 iii)，当 $x\in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right)$ 时，$\varphi\equiv 0$. 因此，$f=Ce^{-\delta\rho(x)}$, $\forall x\in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right)$.

再令 $\tilde{u}=u(x)/\sup\limits_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} u$，则 $\Delta\tilde{u}=0$，$\tilde{u}|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})}\leqslant 1$，考虑 $\tilde{u}-f$，则由于 $f|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})}\geqslant 1$，有

$$\Delta(\tilde{u}-f)\geqslant 0,$$

$$(\tilde{u}-f)|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})}\leqslant 0.$$

由极大值原理，在内部，特别是对 $x\in T\left(\frac{\pi}{8}, R_0\right)$，有

$$\tilde{u}\leqslant f\leqslant Ce^{-\delta\rho(x)},$$

即

$$u\leqslant Ce^{-\delta\rho(x)}\sup_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} u.$$

证毕.

现在我们可以给出定理 2.2 的证明了.

定理 2.2 的证明：

1° 根据引理 1，存在函数 $\varphi\in C^\infty(M)$，满足引理 1 之 i), ii), iii)，但在 iii) 中取 $\beta=\frac{1}{2}$. 由 i)

$$|\nabla\varphi|+|\nabla^2\varphi|\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)},\quad x\in T\left(\frac{\pi}{4}, R_0\right).$$

适当改变 C_1 和 C_2，可使 $\forall x\in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 都有

$$|\nabla\varphi|+|\nabla^2\varphi|\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}.\tag{2.4.4}$$

另外，由 φ 的造法可知 $1\geqslant\varphi\geqslant\frac{1}{2}$.

考虑函数 $u(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi\log u}$，则

$$\nabla u^\varphi=u^\varphi(\log u\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\log u),\tag{2.4.5}$$

$$\Delta u^\varphi=u^\varphi(|\log u\nabla\varphi+\varphi\nabla\log u|^2+\log u\Delta\varphi$$

$$+ 2\nabla\varphi\cdot\nabla\log u + \varphi\Delta\log u), \tag{2.4.6}$$

$$\Delta\log u = \frac{\Delta u}{u^2} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = -|\nabla\log u|^2 \quad (\because \Delta u = 0).$$

设 $u(O') = 1$，则由内部 Harnack 不等式（系 1.3.4）

$$|\nabla\log u| \leqslant C,$$

$$\log u(x) = \log u(x) - \log u(0')$$

$$\leqslant \int_{0'}^{x} |\nabla\log u| \leqslant C\rho(x). \tag{2.4.7}$$

由 (2.4.4), (2.4.6) 及 (2.4.7) 可得 Δu^φ 的估计为

$$\begin{aligned}
\Delta u^\varphi &= u^\varphi(|\nabla\varphi|^2\log^2 u + \varphi^2|\nabla\log u|^2 \\
&\quad + 2\varphi\log u\nabla\varphi\cdot\Delta\log u + \log u\Delta\varphi \\
&\quad + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\log u + \varphi\Delta\log u) \\
&\leqslant u^\varphi(C_1e^{-C_2\rho(x)} + (\varphi^2 - \varphi)|\nabla\log u|^2) \\
&\leqslant u^\varphi C_1e^{-C_2\rho(x)} \quad (\because \varphi\leqslant 1,\ \varphi^2\leqslant\varphi) \\
&= C_1e^{-C_2\rho(x)}u^{\varepsilon_0}u^{\varphi-\varepsilon_0} \\
&\leqslant C_1e^{-C_2\rho(x)}\cdot e^{\varepsilon_0 C\rho(x)}\cdot u^{\varphi-\varepsilon_0} \\
&\leqslant C_1e^{-C_3\rho(x)}u^{\varphi-\varepsilon_0},
\end{aligned}$$

其中 C_1, C_3 皆为正数，ε_0 为充分小的正数.

令 $\alpha = 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}$, $1 > \alpha > 0$, 则

$$u^{\varphi-\varepsilon_0} \leqslant u^\alpha + 1. \tag{2.4.8}$$

这是因为，如果 $u\leqslant 1$，则上式自然正确，当 $u > 1$ 时，因 $\varphi\leqslant 1$，上式也对. 于是我们有

$$\Delta u^\varphi \leqslant C_1e^{-C_3\rho(x)}(u^\alpha + 1), \quad x\in C_0\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{2.4.9}$$

2° 另一方面，计算

$$\begin{aligned}
\Delta(e^{-\delta\rho(x)}\cdot u^\alpha) &= u^\alpha\Delta e^{-\delta\rho(x)} + 2\nabla e^{-\delta\rho(x)} \\
&\quad \cdot\nabla u^\alpha + e^{-\delta\rho(x)}\Delta u^\alpha \\
&\leqslant -\delta(C_4 - \delta)e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha + 2\delta e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha-1}|\nabla u| \\
&\quad - \alpha(1-\alpha)e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha-2}|\nabla u|^2 \\
&= -\delta(C_4 - \delta)e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha + e^{-\delta\rho(x)}u^\alpha(2\delta|\nabla\log u|
\end{aligned}$$

$$- \alpha(1-\alpha)|\nabla \log u|^2).$$

对上式右端括号中的项利用不等式 $2Bt - At^2 \leqslant B^2/A^2$，即得

$$\Delta(e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha}) \leqslant -\delta(C_4-\delta)e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha}$$

$$+ \frac{\delta^2}{\alpha(1-\alpha)}e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha}$$

$$\leqslant -\delta C_5 e^{-\delta\rho(x)}u^{\alpha}. \tag{2.4.10}$$

只要 δ 充分小，自然也可使

$$\Delta e^{-\delta\rho(x)} \leqslant -\delta C_5 e^{-\delta\rho(x)}. \tag{2.4.11}$$

因此，对充分大的 C_6，由 (2.4.9)，(2.4.10)，(2.4.11)，

$$\Delta(u^{\varphi} + C_6 e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1)) \leqslant C_1 e^{-C_3\rho(x)}(u^{\alpha}+1)$$

$$- \delta C_6 C_5(u^{\alpha}+1)e^{-\delta\rho(x)}$$

$$\leqslant 0.$$

3° 至此我们已经构造了一个次调和函数

$$f = u^{\varphi} + C_O e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1).$$

$\Delta f \leqslant 0$，将 u 和 f 比较．在 $\partial C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上因 $\varphi \equiv 1$，因而

$$u|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \leqslant (u^{\varphi} + C_6 e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1))|_{\partial C_O(\frac{\pi}{4})},$$

所以

$$u \leqslant u^{\varphi} + C_6 e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1), \quad x \in C_O\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

特别，在 $\partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 上，$\varphi \equiv \frac{1}{2}$，所以

$$u \leqslant u^{\frac{1}{2}} + C_6 e^{-\delta\rho(x)}(u^{\alpha}+1)$$

$$\leqslant u^{\frac{1}{2}} + C_6(u^{\alpha}+1)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}u + 1 + C_6(u^{\alpha}+1),$$

$$\forall x \in \partial C_O\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

因 $\alpha < 1$，由上式只能有 $u|_{\partial C_O(\frac{\pi}{8})} \leqslant \text{const}$．在 $C_O\left(\frac{\pi}{8}\right)$中应用引理 2，即得

$$u(x) \leqslant Ce^{-\delta\rho(x)} \sup_{\partial C_O(\frac{\pi}{8})} u,$$

$$\leqslant \tilde{C} e^{-\delta\rho(x)}, \ x \in T\left(\frac{\pi}{16}, \ R_0\right).$$

注意上式是在假定 $u(O') = 1$ 下证明的，如果 $u(O') \neq 1$，那么用 $u(x)/u(O')$ 代替 $u(x)$ 即得

$$u(x) \leqslant \tilde{C} e^{-\delta\rho(x)} u(O'),$$

$$\forall x \in T\left(\frac{\pi}{16}, \ R_0\right).$$

将 $T\left(\frac{\pi}{16}, \ R_0\right)$ 扩大到 $T\left(\frac{\pi}{8}, \ 1\right)$ 只要用内部 Harnack 不等式 $u(x) \leqslant Cu(O')$，$x \in B_0(R_0)$，其中 C 仅与 R_0 及曲率上、下界有关，而 R_0 本身也可选择得仅与曲率上下界有关．因此最后总有

$$u(x) \leqslant Ce^{-\delta\rho(x)} u(O'), \quad \forall x \in T(\pi/8, 1).$$

定理至此证毕．

定理 2.3． 设 u, v 是定义在锥 $C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 上的正调和函数，在 $\overline{C_O\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ 上连续，并且 $u|_{\overline{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \cap S(\infty)} = v|_{\overline{\partial C_O(\frac{\pi}{4})} \cap S(\infty)} = 0$，则

$$\forall x \in T\left(\frac{\pi}{8}, \ 1\right).$$

下列估计成立：

$$\frac{1}{C_1} \frac{u(O')}{v(O')} \leqslant \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\leqslant C_1 \frac{u(O')}{v(O')}, \tag{2.4.12}$$

其中 O' 是截锥 $T\left(\frac{\pi}{8}, \ 1\right)$ 的顶点，C_1 为仅依赖于 n, a, b 的常数．

证明：任取定 $\frac{\pi}{4} > \theta_1 > \theta_2 > 0$．显然只要对 $T(\theta_2, 1)$ 证明不等式 (2.4.12) 即可．

无妨设 $u(O')=v(O')=1$，总的证明线索是设法构造一个次调和函数 F，使当 R_0 充分大时，有

$$\begin{cases}\Delta F\leqslant 0,\ \forall x\in T(\theta_1,R_0),\\ F|_{\partial T(\theta_1,R_0)}\geqslant v|_{\partial T(\theta_1,R_0)},\\ F|_{\partial T(\theta_2,R_0)}\leqslant Cu|_{\partial T(\theta_2,R_0)}.\end{cases}\tag{2.4.13}$$

根据极大值原理，在 $T(\theta_2,R_0)$ 中就有

$$v\leqslant F\leqslant Cu.$$

再由内部的 Harnack 不等式，上式在 $T(\theta_2,1)$ 中仍然成立(常数可能改变)，而这就是

$$\frac{u(x)}{v(x)}\leqslant C=C\frac{u(O')}{v(O')}.$$

交换 u, v 的位置得到 (2.4.12) 的另一端，从而完成定理的证明.

在下面的证明中以 C_1, C_2, $\cdots$等表示仅依赖于 n, a, b 的正常数.

1°. 根据定理 2.2，$\exists C_1$, $\alpha_1>0$，使 $\forall x\in T(\theta_1,1)$ 有

$$u(x),\ v(x)\leqslant C_1e^{-\alpha_1\rho(x)}.$$

同时，由内部 Harnack 不等式 $|\nabla\log u|<C$，易见亦有

$$u(x),\ v(x)\geqslant C_2e^{-\alpha_2\rho(x)},\ \forall x\in T(\theta_1,1).$$

因此，当 $x\in T(\theta_1,1)$ 时，

$$\begin{aligned}v(x)&\leqslant C_1e^{-\alpha_1\rho(x)}\\ &=C_1(C_2e^{-\alpha_2\rho(x)})^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\cdot C_2^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\\ &\leqslant C_3u^{\lambda_0},\ \lambda_0=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}<1.\end{aligned}\tag{2.4.14}$$

由定理 2.2 证明中的引理 1，存在函数 $\varphi\in C^\infty(M)$，满足，对充分大的 R_0，

$$\begin{cases}1\geqslant\varphi\geqslant\varepsilon_0,\ \varepsilon_0\text{ 为待定的小正数},\\ |\nabla\varphi|+|\nabla^2\varphi|<C_4e^{-C_5\rho(x)},\ \forall x\in T\left(\frac{\pi}{4},1\right),\\ \varphi|_{T(\theta_2,R_0)}=1,\\ \varphi|_{\partial C_O(\theta_1)\setminus B_0(R_0)}=\varepsilon_0.\end{cases}\tag{2.4.15}$$

令

$$\lambda = 1 - (1 - \varphi)^{2s} - (1 - \varphi)^{s} e^{-\delta_0 \rho(x)}, \qquad (2.4.16)$$

其中 s, δ_0 为待定的正常数. 由 (2.4.15), 易得

$$|\nabla \lambda| + |\nabla^2 \lambda| \leqslant C_6 e^{-C_7 \rho}(1 - \varphi)^{s-1}, \qquad (2.4.17)$$

同时有

$$\lambda|_{T(\theta_2, R_0)} = 1,$$

$$\lambda|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)} = 1 - (1 - \varepsilon_0)^{2s} - (1 - \varepsilon_0)^{s} e^{-\delta_0 \rho(x)},$$

因此,当 ε_0, s, δ_0 取定后,只要 R_0 充分大,就有

$$\frac{1}{2}(1 - (1 - \varepsilon_0)^{2s}) \leqslant \lambda|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)}$$

$$\leqslant 1 - (1 - \varepsilon_0)^{2s},$$

在 s 确定后,只要 ε_0 充分小, 将有

$$\lambda|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)} \leqslant \lambda_0 < 1.$$

因为 $u \leqslant C_1 e^{-\alpha_1 \rho(x)}$, 所以只要 R_0 充分大,由 (2.4.14) 就有

$$u^{\lambda}|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)} \geqslant u^{\lambda_0}|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)}$$

$$\geqslant \frac{1}{C_3} v.$$

这样,函数 u^{λ} 已可满足

$$\begin{cases} u^{\lambda}|_{\partial C_0(\theta_1) \setminus B_0(R_0)} \geqslant \dfrac{1}{C_3} v, \\ u^{\lambda}|_{T(\theta_2, R_0)} = u. \end{cases} \qquad (2.4.18)$$

由内部 Harnack 不等式, (2.4.18) 的第一式也就意味着

$$u^{\lambda}|_{\partial T(\theta_1, R_0)} \geqslant C_9 v|_{\partial T(\theta_1, R_0)}. \qquad (2.4.19)$$

(2.4.18)和(2.4.19)已经组成我们所要求的(2.4.13)中的后两式,但是可惜的是,无法证明 $\Delta u^{\lambda} \leqslant 0$. 因此必须对 u^{λ} 再加以改造.

2° 令 $\xi = -\log u$. 因为当 ρ 充分大时,

$$C_2 e^{-\alpha_2 \rho} \leqslant u \leqslant C_1 e^{-\alpha_1 \rho},$$

因此, $C_{10}\rho \geqslant \xi \geqslant C_{11}\rho$. 并且由 $\Delta u = 0$ 及 $|\nabla \log u| < C$, 得

$$|\nabla \xi| \leqslant C_{12}, \quad \Delta \xi = |\nabla \xi|^2 \leqslant C_{13}. \qquad (2.4.20)$$

令

$$F(x) = \phi(\xi(x) - e^{-\alpha\rho(x)})u(x)^{\lambda(x)}, \tag{2.4.21}$$

其中 α 为待定的常数，$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足：

$$C_{13} \geqslant \phi \geqslant 1,\ \phi'' \leqslant 0,\ \text{及当 } t \text{ 充分大时},$$

$$2 \geqslant \phi'(t)t^2 \geqslant 1. \tag{2.4.22}$$

注意因 $\xi \sim C\rho$，(2.4.22) 的最后式相当于(当 ρ 充分大时)

$$C_{14} \geqslant \rho^2\phi'(\xi - e^{-\alpha\rho}) \geqslant C_{15}. \tag{2.4.23}$$

因为 ϕ 是正有界量，因此 $F = \phi \cdot u^\lambda$ 和 u^λ 一样满足 (2.4.18) 和 (2.4.19)，即满足 (2.4.13) 中的边界条件，因此整个定理的证明只有赖于验证，可选适当的 α，使当 $\rho(x)$ 充分大时，$\Delta F \leqslant 0$。

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta(\phi \cdot u^\lambda)\\ &= \Delta\phi \cdot u^\lambda + 2\nabla\phi \cdot \nabla u^\lambda + \phi\nabla u^\lambda.\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

先看 $\Delta\phi$ 项，因为 $\phi'' < 0$，所以

$$\begin{aligned}\Delta\phi &\leqslant \phi'(\Delta\xi - e^{-\alpha\rho}(\alpha^2 - \alpha\Delta\rho))\\ &\leqslant \phi'\left(|\nabla \log u|^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha\rho}\right),\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

只要 ρ 充分大。此处用到 $\Delta\rho \leqslant C$ 及 α 足够大。

$$\begin{aligned}2\nabla\phi \cdot \nabla u^\lambda &= 2\phi' u^\lambda(-\nabla \log u - \alpha e^{-\partial\rho}\nabla\rho)\\ &\quad \cdot (\log u \nabla\lambda + \lambda\nabla \log u)\\ &\leqslant 2\phi' u^\lambda[-\lambda|\nabla \log u|^2 + C_{16}(\rho|\nabla\lambda||\nabla \log u|\\ &\quad + \alpha\rho e^{-\alpha\rho}|\nabla\lambda| + \alpha e^{-\alpha\rho})].\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

此处用到 $|\nabla\rho| = 1$，$|\log u| \leqslant C\rho$，$|\nabla \log u| \leqslant C$。于是(2.4.24)成为

$$\begin{aligned}\Delta F &\leqslant \phi\Delta u^\lambda + \phi' u^\lambda(1 - 2\lambda)|\nabla \log u|^2\\ &\quad + C_{16}\phi' u^\lambda \rho|\nabla\lambda||\nabla \log u| - \phi' u^\lambda e^{-\alpha\rho}\\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - C_{16}\alpha - C_{16}\alpha\rho|\nabla\lambda|\right)\\ &\leqslant \phi\Delta u^\lambda + (1 - 2\lambda)\phi' u^\lambda|\nabla \log u|^2\\ &\quad - C_{17}\phi' u^\lambda e^{-\alpha\rho} + C_{16}\phi' u^\lambda\rho|\nabla\lambda||\nabla \log u|,\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

此处用到 α 和 ρ 充分大，以及 $|\nabla\lambda| < C_6 e^{-C_7\rho}$，因而 $\rho|\nabla\lambda| \to 0$ (当 $\rho \to \infty$)。

再计算 Δu^λ 项

$$\begin{aligned}\Delta u^\lambda = & u^\lambda[|\nabla\lambda|^2(\log u)^2 + 2\lambda\log u(\nabla\lambda\cdot\nabla\log u)\\ & + \log u\cdot\nabla\lambda + 2\nabla\lambda\cdot\nabla\log u\\ & - \lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2]\\ \leqslant & u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2 + C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\\ & + \log u(\Delta\lambda) - \lambda(-\lambda)|\nabla\log u\rho|^2].\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant & (1-2\lambda)\phi' u^\lambda|\nabla\log u|^2\\ & - C_{17}\phi' u^\lambda e^{-\alpha\rho} + \phi u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2\\ & + C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u| + (\Delta\lambda)\log u\\ & - \lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2].\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

分析上式中的 $C_{19}\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u|\cdot\phi u^\lambda$ 项。由通常的 Schwarz 不等式及 ϕ 和 $\phi'\rho^2$ 是正有界量的事实，在点 $\left\{x\,|\,\lambda(x)\geqslant\frac{3}{4}\right\}$处.

$$\begin{aligned}C_{19}u^\lambda\phi\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u| \leqslant & (2\lambda-1)u^\lambda\phi'|\nabla\log u|^2\\ & + C_{20}\phi u^\lambda\rho^4|\nabla\lambda|^2.\end{aligned}$$

将其代入 (2.4.29)，得

$$\begin{aligned}\nabla F \leqslant & -C_{17}\phi' u^\lambda e^{-\alpha\rho} + \phi u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2\\ & + C_{20}\rho^4|\nabla\lambda|^2 + (\Delta\lambda)\log u],\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

在点 $\left\{x\,|\,\lambda(x)<\frac{3}{4}\right\}$ 处，当 ρ 充分大时，因为 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}(1-(1-\varepsilon_0)^{\mu})\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_0$，因此 $\lambda(1-\lambda)\geqslant\frac{1}{8}\varepsilon_0$. 所以

$$\begin{aligned}C_{19}\phi u^\lambda\rho|\nabla\lambda||\nabla\log u| \leqslant & (\lambda(1-\lambda)|\nabla\log u|^2\\ & + C_{21}\varepsilon_0^{-1}\rho^2|\nabla\lambda|^2)\phi u^\lambda,\end{aligned}$$

代入 (2.4.29)，注意到 $\phi'\rho^2\sim\phi$，当 R_0 充分大时，$\forall x\in T(\theta_1, R_0)$. 亦有

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant & -C_{17}\phi' u^\lambda e^{-\alpha\rho} + \phi u^\lambda[C_{18}\rho^2|\nabla\lambda|^2\\ & + C_{21}\varepsilon_0^{-1}\rho^2|\nabla\lambda|^2 + (\Delta\lambda)\log u].\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

(2.4.30) 和 (2.4.31) 合在一起可以写成，只要 R_0 充分大，$\forall x\in$

$T(\theta, R_0)$ 都有

$$\Delta F \leqslant -C_{17}\phi' u^{\lambda} e^{-\alpha\rho} + \phi u^{\lambda}[C_{22}\varepsilon_0^{-1}\rho^4|\nabla\lambda|^2 + (\Delta\lambda)\log u]. \tag{2.4.32}$$

再计算 $(\Delta\lambda)\log u$ 项:

$$\begin{aligned}(\Delta\lambda)\log u = &[-\Delta(1-\varphi)^{2s} \\ &-\Delta(1-\phi)^s\cdot e^{-\delta_0\rho} - 2\nabla(1-\varphi)^s\cdot\nabla e^{-\delta_0\rho} \\ &-(1-\varphi)^s\Delta e^{-\delta_0\rho}](\log u) \\ \leqslant &(|\Delta(1-\varphi)^{2s}| + |\Delta(1-\varphi)^s|e^{-\delta_0\rho} \\ &+2|\nabla(1-\varphi)^s||\nabla e^{-\delta_0\rho}|)|\log u| \\ &-(1-\varphi)^s\Delta e^{-\delta_0\rho}\log u \\ \leqslant &C_{23}e^{-C_{24}\rho}(1-\varphi)^{s-1} - C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}.\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

这里用到 $|\log u| \sim C\rho$. 另一方面,易证(当 ε_0 取定后), 对充分大的 R_0(依赖于 ε_0), $\rho \geqslant R_0$ 时有

$$\begin{aligned}C_{22}\varepsilon_0^{-1}\rho^4|\nabla\lambda|^2 \leqslant &C_{26}e^{-C_{27}\rho}(1-\varphi)^{s-1} \\ &+C_{28}\rho^4\varepsilon_0^{-1}e^{-2\delta_0\rho}(1-\varphi)^{2s} \\ \leqslant &C_{29}e^{-C_{30}\rho}(1-\varphi)^{s-1}.\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

将 (2.4.33) 和 (2.4.34) 代入 (2.4.32), 得

$$\begin{aligned}\Delta F \leqslant &-C_{17}\phi' u^{\lambda} e^{-\alpha\rho} + \phi u^{\lambda}(C_{31}e^{-C_{32}\rho}(1-\varphi)^{s-1} \\ &-C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}) \\ = &-C_{17}\phi' u^{\lambda} e^{-\alpha\rho} + \phi u^{\lambda}(1-\phi)^{s-1}(C_{31}e^{-C_{32}\rho} \\ &-C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)e^{-\delta_0\rho}).\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

如果 $C_{31}e^{-C_{32}\rho}(1-\varphi)^{s-1} \leqslant C_{25}\rho\delta_0(1-\varphi)^s e^{-\delta_0\rho}$, 由上式自然有 $\Delta F \leqslant 0$. 否则,有

$$0 < 1-\varphi < Ce^{-(C_{32}-\delta_0)\rho}.$$

因而

$$\Delta F \leqslant -C_{17}\phi' u^{\lambda} e^{-\alpha\rho} + \phi u^{\lambda} C_{32} e^{-(C_{32}+(s-1)(C_{32}-\delta_0))\rho}.$$

只要取 $\delta_0 < C_{32}$, $\alpha < C_{32} + (s-1)(C_{32}-\delta_0)$, 就仍有对充分大的 R_0, $\rho(x) \geqslant R_0$ 时, $\Delta F \leqslant 0$.

因此,首先取定充分大的 S, 再顺次定下 δ_0, α, ε_0, 最后定

R_0，使当 $x \in T(\theta_1, R_0)$ 时，$\Delta F \leqslant 0$. 定理至此证毕。

§5. 有关调和函数的其他存在性问题

我们在本章§1中证明了：单连通的完备 Riemann 流形，如果其截面曲率满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$，则调和函数的 Dirichlet 问题可解. 在§2和§3中又证明了 Possion 核的存在性及几何边界与 Martin 边界的等价关系. 一个自然的问题是：对于流形的曲率条件可以减弱到何种程度，使上述结果全部或者部分仍然成立？从有界对称域上调和分析的经典理论，我们知道有界对称域上的 Bergman 度量满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant 0$，同时 Possion 核函数是存在的. 因此，我们希望知道：在满足 $-b^2 \leqslant K_M \leqslant 0$ 的一般的单连通完备 Riemann 流形上，在何种条件下存在有界调和函数，存在 Possion 核函数，以及其 Martin 边界是什么样的，本节将给出这个方向上的一些初步结果.

定义. 设 M, N 为同维数的两完备 Riemann 流形. 微分同胚 $\phi: M \to N$，称为拟等度的（quasi-isometry）如果存在常数 $C > 0$，$\forall x \in M$，$X \in T_xM$，满足

$$\frac{1}{C}|X|_M \leqslant |\phi_* X|_N \leqslant C|X|_M. \tag{2.5.1}$$

定义. 完备 Riemann 流形M上两个度量 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 称为一致等价的，如果存在常数 $C > 0$，使得

$$\frac{1}{C}ds^2 \leqslant d\tilde{s}^2 \leqslant C ds^2. \tag{2.5.2}$$

显然，恒同映射 $(M, ds^2) \to (M, d\tilde{s}^2)$ 就是拟等度同胚. 根据定理 2.1，如果对 (M, ds^2) 而言，$-b^2 \leqslant K_M \leqslant -a^2 < 0$，则调和函数的 Dirichlet 问题可解. 今假设 $(M, d\tilde{s}^2)$ 和 (M, ds^2) 一致等价，是否对 $(M, d\tilde{s}^2)$ 而言，调和函数的 Dirichlet 问题仍然可解？一般而言不一定，但在一定情况下可以给出肯定的回答. 为此我们要引进一个关于完备 Riemann 流形的第一特征值的概念（见第三章）.

众所周知，对 M 中任何有界区域 Ω，其第一特征值 $\lambda_1(\Omega)$（Dirichlet 条件）可以定义为

$$\lambda_1(\Omega)=\inf_{f\in H^2_{1,0}(\Omega)}\frac{\int_\Omega|\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}. \tag{2.5.3}$$

这里 $H^2_{1,0}(\Omega)=\{f\in H^2_1(\Omega)|f|_{\partial\Omega}=0\}$，$H^2_1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间。根据这一定义就可推知，如果 $\Omega_1\subseteq\Omega_2\subset\subset M$，则

$$\lambda_1(\Omega_1)\geqslant\lambda_1(\Omega_2). \tag{2.5.4}$$

由特征值关于区域的递减性，我们可以合理地引进下列定义。

定义. 完备 Riemann 流形M的第一特征值 $\lambda_1(M)$ 定义为

$$\lambda_1(M)=\lim_{R\to\infty}\lambda_1(B(R)), \tag{2.5.5}$$

其中 $B(R)$ 为以某定点为中心，半径为 R 的测地球。

第三章 § 4 的 Mckean 定理指出，如果 M 的截曲率 $K_M\leqslant -C<0$，则 $\lambda_1(M)>0$。

不难看出，$\lambda_1(M)>0$ 对 M 上一致等价的度量而言是一个不变的性质。因为如果 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 一致等价，则两者体积形式 dV 和 $d\tilde{V}$ 也是一致等价，由 (2.5.1)，$|\nabla f|$ 和 $|\tilde{\nabla}f|$ 也是一致等价，再由第一特征值的极小性质 (2.5.3)，及特征值的递降性 (2.5.4)，自然导致这种不变性。

定理 2.11. 设单连通的完备 Riemann 流形 $(M, d\tilde{s}^2)$，其截面曲率满足 $-b^2\leqslant\tilde{K}_M\leqslant -a^2<0$，再设 ds^2 是 M 的另一完备度量，它和 $d\tilde{s}^2$ 一致等价。如果对 (M, ds^2) 而言，其截曲率满足 $|K_M|\leqslant 1$ 及其单射半径 (injectivity radius) >0，则对 (M, ds^2) 而言，其调和函数的 Dirichlet 问题可解。

证明：证明的基本路线仿同定理 2.1。我们仅着重讨论证明中和定理 2.1 不同的地方，根据 Mckean 定理对 $(M, d\tilde{s}^2)$ 而言 $\lambda_1(M)>0$，由 $\lambda_1(M)>0$ 的不变性，不妨假设，对 (M, ds^2) 而言，$\lambda_1(M)\geqslant\lambda_0>0$。又，根据题设，不妨假定单射半径(对 ds^2 而言)>1。

取定基点 $O\in M$，如 $x\in M$，记 x 与 O 的距离为 $\rho(x)$ 和 $\tilde{\rho}(x)$（分别对 ds^2 和 $d\tilde{s}^2$ 而言），由一致等价性，

$$\frac{1}{C}\rho(x)\leqslant\tilde{\rho}(x)\leqslant C\rho(x),$$

同样的理由，$\exists\delta_2>\delta_1>0$，使 $\tilde{B}_x(\delta_1)\subseteq B_x(1)\subseteq\tilde{B}_x(\delta_2)$，其中 B_x 和 $\tilde{B}_x$ 分别表示 (M,ds^2) 和 $(M,d\tilde{s}^2)$ 中的测地球.

在 $(M,d\tilde{s}^2)$ 上 $\partial M=s(\infty)\cong s_0(1)$，在 $s(\infty)$ 上给定 Lipschitz 函数 $\varphi(\theta)$，将 φ 沿径向扩充到整个 M 上，则由(2.1.17)

$$\operatorname*{osc}_{\tilde{B}_x(\delta_2)}\varphi=O(e^{-a\tilde{\rho}(x)}),$$

因此

$$\operatorname*{osc}_{B_x(1)}\varphi\leqslant\operatorname*{osc}_{\tilde{B}_x(\delta_2)}\varphi=O(e^{-a\tilde{\rho}(x)})=O(e^{-C_1\rho(x)}).\qquad(2.5.6)$$

下一步是将 φ 平均化成 $\tilde{\varphi}$（见(2.1.18)）

$$\tilde{\varphi}=\frac{\int_M\chi(\rho^2(x,y))\varphi(y)dy}{\int_M\chi(\rho^2(x,y))dy},$$

其中 $\operatorname{supp}\chi\subseteq[-1,1]$，则同样(见(2.1.19)—(2.1.20))可证，

$$\Delta\tilde{\varphi}=O(e^{-C_1\rho(x)}).\qquad(2.5.7)$$

这是因为(2.1.19)—(2.1.20)的证明中，只要 $|K_M|\leqslant1$ 及当

$$\rho(x,y)\leqslant1$$

时，$\rho(x,y)$（对 x）是可微的即可通过，而后者由单射半径 >1 保证.

为了用 Perron 方法证明 Dirichlet 问题解的存在性，除了由 φ 构造出满足(2.5.6)和(2.5.7)的 $\tilde{\varphi}$ 以外，还需要构造出满足以下条件的函数 $g\in C^\infty(M)$:

$$g(x)>0,\ \lim_{\rho(x)\to\infty}g(x)=0,$$

$$\Delta g\leqslant-C_2e^{-\delta\rho(x)},\qquad(2.5.8)$$

其中 δ 充分小，就足以保证定理的成立(见定理 2.1 证明中的 3°).

为了给出满足(2.5.8)的 $g(x)$，我们在 $B_0(R)\backslash B_0(1)$ 中解

以下 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}\Delta h_R(x)=-\mu h_R(x),\ 0<\mu<\lambda_1(M),\\ h_R(x)=1,\ x\in\partial B_0(1),\\ h_R(x)=0,\ x\in\partial B_0(R).\end{cases}\tag{2.5.9}$$

和定理 1.4.2 的证明完全一样(见(2.4.6),并注意在 $\mu<\lambda_1(M)$ 的情形对于算子 $\Delta+\mu$ 极大值原理仍然成立)，有结论 $h(x)=\lim\limits_{R\to\infty}h_R(x)$ 存在,并且

$$\begin{cases}\Delta h=-\mu h,\ x\in M\backslash B_0(1),\\ 1>h(x)>0.\end{cases}\tag{2.5.10}$$

因为在 Ric 曲率有下界的情况下,对满足 (2.5.10) 方程的解的梯度估计仍然成立,(见 (1.3.19))，$|\nabla\log h|<C_2$，因此，

$$h(x)\geqslant e^{-C_2\rho(x)}.\tag{2.5.11}$$

取 $\delta<1$，令 $g=h(x)^\delta$，则

$$\begin{aligned}\Delta g&=h^{\delta-2}|\nabla h|^2\delta(\delta-1)+\delta h^{\delta-1}\Delta h\\&\leqslant\delta h^{\delta-1}\Delta h\\&=-\mu\delta h^\delta\\&\leqslant-\mu\delta e^{-\delta C_2\rho(x)}.\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

因此，(2.5.8) 的第 1， 3 式证明． 剩下只需验证 $g(x)\to0$ (当 $\rho(x)\to\infty$ 时),当然只要证 $\lim\limits_{\rho(x)\to\infty}h(x)=0$ 即可．

回到 (2.5.9) 在 $B_0(R)\backslash B_0(1)$ 中，$\Delta h_R=-\mu h_R$，

$$h_R\Delta h_R=-\mu h_R^2,$$

由 Stokes 公式(注意在 $\partial B_0(R)$ 上 $h_R=0$)，得

$$-\int_{\partial B_0(1)}h_R\frac{\partial h_R}{\partial r}-\int_{B_0(R)\backslash B_0(1)}|\nabla h_R|^2$$

$$=-\mu\int_{B_0(R)\backslash B_0(1)}h_R^2$$

$$\frac{\partial h_R}{\partial r}=\nabla h_R\cdot\nabla r,$$

由梯度估计，$\left|\dfrac{\partial h_R}{\partial r}\right|$ 是有界量，$h_R|_{\partial B_0(1)}=1$，因此

$$\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}|\nabla h_R|^2-\mu\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}h_R^2\leqslant C_3,$$

其中 C_3 与 R 无关. 再由 $\lambda_1(B_R)$ 的极小性,

$$\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}|\nabla h_R|^2\geqslant\lambda_1(B_R)\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}h_R^2$$

$$\geqslant\lambda_1(M)\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}h_R^2>\mu\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}h_R^2,$$

所以

$$(\lambda_1(M)-\mu)\int_{B_0(R)\setminus B_0(1)}h_R^2\leqslant C_3.$$

令 $R\to\infty$, 得

$$\int_M h^2<+\infty.$$

因此,对充分大的 R, 有 $\int_{M\setminus B_0(R)}h^2<\varepsilon$, ε 可以任意小. 只要 $x\in M\setminus B_0(R)$, 并且 $B_x(1)\subseteq M\setminus B_0(R)$, 在 $B_x(1)$(因为单射半径>1, $B_x(1)$ 相当于 $\mathbb{R}^n$ 中的球)上对 $\Delta h=-\mu h$ 利用 Harnack 不等式(系 1.3.5)就有

$$h(x)\leqslant\frac{C}{V(B_x(1))}\int_{B_x(1)}h^2$$

$$\leqslant\frac{C}{\mathrm{Vol}(B_x(1))}\int_{M\setminus B_0(R)}h^2$$

$$\leqslant\tilde{C}\varepsilon.$$

这是因为, $K_M\leqslant+1$, 则 $\mathrm{Vol}B_x(1)\geqslant$ 常数 (见(1.1.21)), 定理至此证毕.

本定理有下列直接推论,其证明是明显的.

系. 设 M 是紧致的负曲率流形,则对 M 的任何度量,其通用覆盖流形 $\overline{M}$ 上有界调和函数存在.

定理 2.12. 设单连通完备 Riemann 流形 M 的截曲率 K_M 满足 $|K_M|\leqslant 1$, 其单射半径>0, $\lambda_1(M)>0$, 并存在一个双曲等距 (hyperbolic isometry) γ, 则 M 上存在非常数的正调和函数.

注: 等距 γ 称为双曲的,如果 M 上存在一测地直线 (geodesic

line) σ，使 $\gamma|_\sigma$ 是 σ 上的一个平移（translation）.

证明：任意固定基点 $O\in\sigma\subseteq M$，以 O 为中心，R 为半径的测地球记作 $B(R)$，距离 $d(O,x)$ 记作 $\rho(x)$.

取 $R>1$，在 $B(R)\backslash B(1)$ 中解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta f_R(x)=0,\\ f_R|_{\partial B(1)}=1,\ f_R|_{\partial B(R)}=0,\end{cases}\tag{2.5.13}$$

则根据我们一再应用过的 Harnack 原则，

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}f_R(x)$$

存在，并满足

$$\begin{cases}\Delta f(x)=0,\\ f|_{\partial B(1)}=1,\ 1>f(x)>0,\ x\in M\backslash B(1).\end{cases}\tag{2.5.14}$$

命题. 在定理条件下，(2.5.14) 中的 $f(x)$ 满足（$C_i(i=1,2,3,\cdots)$为不依赖于 R 的常数）：

i) $$\int_{M\backslash B(1)}f^2<+\infty,\tag{2.5.15}$$

ii) $$\int_{M\backslash B(R)}f^2\leqslant C_1e^{-C_2R},\tag{2.5.16}$$

iii) 当 $\rho(x)$ 充分大时，$f(x)\leqslant C_3e^{-C_4\rho(x)}$. (2.5.17)

命题的证明：由 $\Delta f_R=0$ 得到

$$\begin{aligned}0&=\int_{B(R)\backslash B(1)}f_R\Delta f_R\\&=-\int_{B(R)\backslash B(1)}|\nabla f_R|^2-\int_{\partial B(1)}f_R\frac{\partial f_R}{\partial r}.\end{aligned}$$

因为 $f_R|_{\partial B(1)}=1$，$\left|\dfrac{\partial f_R}{\partial r}\right|\leqslant C$（梯度估计），因此

$$\int_{B(R)\backslash B(1)}|\nabla f_R|^2\leqslant\text{常数},$$

再由 $\lambda_1(M)>0$，得

$$\text{常数}\geqslant\int|\nabla f_R|^2\geqslant\lambda_1(M)\int f_R^2.$$

令 $R\to\infty$，即有 $\int_{M\backslash B(1)}f^2<+\infty$，$\int_{M\backslash B(1)}|\nabla f|^2<+\infty$，此即

(2.5.15) 所欲证.

下证 (2.5.16)，任取 $r>1$，作 cut-off 函数 φ，满足

$$\begin{cases} \varphi=\begin{cases} 0, & x\in B(r), \\ 1, & x\notin B(r+1), \\ 1\geqslant\varphi\geqslant 0, & x\in B(r+1)\backslash B(r), \end{cases} \\ |\nabla\varphi|\leqslant 1. \end{cases}$$

设 $R>r+1$，由

$$\begin{aligned} 0&=\int_{B(R)}\varphi^2 f_R\Delta f_R \\ &=-\int_{B(R)}\nabla f_R\cdot\nabla(\varphi^2 f_R)+\int_{\partial B_R(R)}\varphi^2 f_R\frac{\partial f_R}{\partial\nu} \\ &=-\int_{B(R)}\nabla f_R\cdot\nabla(\varphi^2 f_R) \\ &\qquad(\because f_R|_{\partial B(R)}=0) \\ &=-\int_{B(R)}\varphi^2|\nabla f_R|^2-2\int_{B(r+1)\backslash B(r)}\varphi f_R\nabla\varphi\cdot\nabla f_R \\ &\qquad(\because \nabla\varphi|_{B(R)\backslash B(r+1)}=0). \end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式，

$$\begin{aligned} \int_{B(R)\backslash B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2&\leqslant 2\left(\int_{B(r+1)\backslash B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\cdot\left(\int_{B(r+1)\backslash B(r)}f_R^2|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2\left(\int_{B(r+1)\backslash B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\cdot\left(\int_{B(r+1)\backslash B(r)}f_R^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\int_{B(R)\backslash B(r)}\varphi^2|\nabla f_R|^2\leqslant 4\int_{B(r+1)\backslash B(r)}f_R^2.$$

令 $R\to\infty$，得

$$\int_{M\backslash B(r)}\varphi^2|\nabla f|^2\leqslant 4\int_{B(r+1)\backslash B(r)}f^2. \tag{2.5.18}$$

另一方面，因为

$$\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2=\int_{M\setminus B(r)}|f\nabla\varphi+\varphi\nabla f|^2$$

$$\leqslant 2\int_{M\setminus B(r)}(f^2|\nabla\varphi|^2+\varphi^2|\nabla f|^2)$$

$$\leqslant 2\left(\int_{M\setminus B(r)}\varphi^2|\nabla f|^2\right.$$

$$\left.+\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2\right),$$

结合(2.5.18)，也有

$$\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2\leqslant C\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2, \tag{2.5.19}$$

其中 C 为常数.

题设 $\lambda_1(M)>0$，因此存在 C_1，$0<C_1<\lambda_1(M)$，使

$$\int_{M\setminus B(r)}|\nabla(\varphi f)|^2\geqslant C_1\int_{M\setminus B(r)}(\varphi f)^2$$

$$\geqslant C_1\int_{M\setminus B(r+1)}f^2. \tag{2.5.20}$$

联合(2.5.19)与(2.5.20)，得

$$\int_{M\setminus B(r+1)}f^2\leqslant C_2\int_{B(r+1)\setminus B(r)}f^2$$

$$=C_2\left[\int_{M\setminus B(r)}f^2-\int_{M\setminus B(r+1)}f^2\right]$$

$$\int_{M\setminus B(r+1)}f^2\leqslant\frac{C_2}{1+C_2}\int_{M\setminus B(r)}f^2$$

$$\leqslant\left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^2\int_{M\setminus B(r-1)}f^2\leqslant\cdots.$$

如果一开始即取 $r=2k$，则

$$\int_{M\setminus B(2k)}f^2\leqslant\left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^k\int_{M\setminus B(k)}f^2$$

$$\leqslant\left(\frac{C_2}{1+C_2}\right)^k\int_{M\setminus B(1)}f^2$$

$$\leqslant C_3e^{-k\log\left(\frac{1+C_2}{C_2}\right)}$$

$$\leqslant C_3 e^{-\frac{r}{2}\log\left(\frac{1+C_2}{C_2}\right)},$$

此即 $\int_{M\setminus B(r)} f^2 \leqslant C_3 e^{-C_4 r}$，(2.5.16) 证毕.

最后证明 (2.5.17). 题设 M 的单射半径 $a > 0$，当 $\rho(x)$ 充分大时，令 $R = \rho(x) - a$，由 (2.5.16)

$$\int_{M\setminus B(R)} f^2 \leqslant C_3 e^{-C_4 R} = C_3' e^{-C_4 \rho(x)},$$

在 $B_x(a)$ 中考虑 $\Delta f = 0$，因为 $K_M \geqslant -1$，Harnack 不等式成立，因此

$$\sup_{B_x(a)} f \leqslant C_5 \inf_{B_x(a)} f,$$

所以

$$\begin{aligned} f^2(x) &\leqslant \frac{C_5}{\mathrm{Vol}(B_x(a))}\int_{B_x(a)} f^2 \\ &\leqslant \frac{C_5}{\mathrm{Vol}(B_x(a))}\int_{M\setminus B(R)} f^2 \\ &\leqslant C_6 e^{-C_4 \rho(x)}, \end{aligned}$$

最后式用到 $\mathrm{Vol}(B_x(a)) \geqslant$ 常数，这是因为 $K_M \leqslant 1$，(见(1.1.21)) 至此命题证毕.

现在回到定理 2.12 的证明. 由于 $\lambda_1(M) > 0$，M 具有整体 Green 函数 $g(x, y)$ (见本章附录定理 A. 3). 将 (2.5.14) 中定义的调和函数 $f(y)$ 和 $g(O, y)$ 相比较，存在正常数 $C_1 > 0$，使

$$1 = f|_{\partial B(1)} \geqslant C g(O, y)|_{\partial B(1)},$$

由极大值原理，

$$f(y) \geqslant C g(O, y),$$

因此由 (2.5.17)，有

$$g(O, x) \leqslant C_3 e^{-C_4 \rho(x)}. \tag{2.5.21}$$

命

$$u(x) = \lim_{\substack{y \in \alpha \\ y \to \infty}} \frac{g(x, y)}{g(O, y)}, \tag{2.5.22}$$

易见 $\Delta u(x) = 0$，$u > 0$，$u(O) = 1$，如果我们能证明 $u(x) \neq 1$，

则 $u(x)$ 即为定理所要求的正调和函数．证明这一点的方法是反证．

设 γ 是题设中的双曲等度同胚，现假定

$$u(\gamma(O))=\lim_{\substack{y\to\infty\\ y\in\sigma}}\frac{g(\gamma(O),y)}{g(O,y)}\leqslant 1.$$

任取 $\varepsilon>0$，则存在 $y_0\in\sigma$，使 $\forall y\in\sigma$，当 $\rho(y_0)<\rho(y)$ 时，有

$$\frac{g(\gamma(O),y)}{g(O,y)}\leqslant 1+\varepsilon.$$

取 $i_0\in\mathbf{Z}$，使 $\rho(\gamma^{i_0}(O))\geqslant\rho(y_0)$，因 γ 是等度同胚，$g(\gamma(x),\gamma(y))=g(x,y)$，因此 $\forall i>i_0$，

$$1+\varepsilon\geqslant\frac{g(\gamma(O),\gamma^{i}(O))}{g(O,\gamma^{i}(O))}$$

$$=\frac{g(O,\gamma^{i-1}(O))}{g(O,\gamma^{i}(O))},$$

所以，

$$(1+\varepsilon)^{i-i_0}\geqslant\frac{g(O,\gamma^{i_0-1}(O))}{g(O,\gamma^{i_0}(O))}\cdot\frac{g(O,\gamma^{i_0}(O))}{g(O,\gamma^{i_0+1}(O))}\cdots$$

$$\cdots\cdots\frac{g(O,\gamma^{i-1}(O))}{g(O,\gamma^{i}(O))}$$

$$=\frac{g(O,\gamma^{i_0-1}(O))}{g(O,\gamma^{i}(O))},$$

$$g(O,\gamma^{i}(O))\geqslant g(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{-(i-i_0)\log(1+\varepsilon)}.\qquad(2.5.23)$$

因为 γ 是等度同胚，$d(\gamma^{i+1}(O),\gamma^{i}(O))=d(O,\gamma(O))=C_0$，由此，$d(O,\gamma^{i}(O))=iC_0$，$i=\frac{1}{C_0}d(O,\gamma^{i}(O))$，(2.5.23)成为

$$g(O,\gamma^{i}(O))$$

$$\geqslant g(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{i_0\log(1+\varepsilon)}e^{-\frac{1}{C}d(O,\gamma^{i}(O))\log(1+\varepsilon)}$$

$$=g(O,\gamma^{i_0-1}(O))e^{i_0\log(1+\varepsilon)}e^{-\frac{1}{C_0}\log(1+\varepsilon)\rho(\gamma^{i}(O))}.$$

如果取 ε 使 $\frac{\log(1+\varepsilon)}{C_0} < C_4$（$C_4$ 为 (2.5.21) 中之指数常数），则上式就与(2.5.21)相矛盾。因此只能 $u(\gamma(O)) > 1$，因为 $u(O)=1$，所以 $u \neq$ 常数。定理证毕。

根据定理 2.11 与定理 2.12，我们提出下列猜测以结束本节：

猜测：设M是单连通的完备 Riemann 流形，$|K_M| \leqslant 1$，单射半径 >0，$\lambda_1(M) > 0$，则M上存在非常数的有界调和函数。

§6. 次调和函数与次中值公式

熟知，在 $\mathbf{R}^n$ 的经典调和函数论中有所谓中值公式（对调和函数）和次中值公式（对次调和函数）。这些公式对研究调和函数和次调和函数的性质，特别是证明 Liouville 型定理都起重要的作用，这些公式是：

中值公式（次中值公式）：设 $u(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中满足 $\Delta u=0$ ($\Delta u \geqslant 0$)，则 $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$，$R>0$，都有

$$u(x_0) \underset{(\leqslant)}{=} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_{x_0}(R))}\int_{B_{x_0}(R)} u, \tag{2.6.1}$$

其中 $B_{x_0}(R)$ 是以 x_0 为中心，R 为半径的球。

推广次中值公式至一般的完备 Riemann 流形自然是流形上分析的课题之一，一般这种推广可以有两条途径，一是根据 Riemann 几何中的比较定理，将流形与某类空间形式加以比较，通过 Stokes 公式而得到。这种类型的结果可以举以下定理为例。

定理．设M是完备的 Riemann 流形，$x_0 \in M$，M在 $B_{x_0}(R)$ 的截曲率 $\leqslant k$，而R小于 x_0 的单射半径，又记 M_k 为常曲率 k 的空间形式，设 $u \in C^\infty(M)$，$\Delta u \geqslant 0$，$u \geqslant 0$，则

$$u(x_0) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(B^k(R))}\int_{B_{x_0}(R)} u, \tag{2.6.2}$$

其中 $B^k(R)$ 表示 M_k 中以R为半径的测地球。

另一种方法是利用 Sobolev 不等式，设完备 Riemann 流形 M 的 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -K$，$B(R) \subseteq M$，则 $\forall \varphi \in C_0^\infty(B(R))$，

$$\left(\int_{B(R)} \varphi^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_0 \int_{B(R)} |\nabla\varphi|,$$

其中 $C_0 = C(n, K, R, \mathrm{Vol}(B(R)))$，然后通过 Moser 的迭代法可得 Harnack 不等式：若 $u \geqslant 0$，$\Delta u \geqslant 0$，则

$$\sup_{B(R/4)} u \leqslant C_1 \inf_{B(R/2)} u. \tag{2.6.3}$$

由此而得出次中值不等式。

本节将给出讨论次中值公式的后一种方法，我们首先从下述 Sobolev 型的不等式出发。

引理 1. 设M是可带边界的完备 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)K$，任意固定 $O \in M$，以O为中心，R为半径的测地球记为 $B(R)$，设

$$B(5R) \subset\subset M,$$

则存在仅依赖于 $n = \dim M$ 的正常数 C_1 和 C_2，使

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(B(R)),$$

有

$$\int_{B(R)} |\varphi| \leqslant C_1 R e^{C_2\sqrt{K}R} \int_{B(R)} |\nabla\varphi| \tag{2.6.4}$$

及

$$\int_{B(R)} |\varphi|^p \leqslant C_1 R^p e^{C_2\sqrt{K}R} \int_{B(R)} |\nabla\varphi|^p, \tag{2.6.5}$$

此处 $p > 1$。

证明：在 $\partial B(3R)$ 上任意固定一点 x_1，记相对于 x_1 的距离为 ρ_1，即 $\rho_1(x) = \mathrm{dist}(x_1, x)$，因为 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)K$，由比较定理 (1.1.8)，

$$\Delta\rho_1 \leqslant \frac{n-1}{\rho_1} + (n-1)\sqrt{K}. \tag{2.6.6}$$

当 $x \in B(R)$ 时，$2R \leqslant \rho_1(x) \leqslant 4R$，

$$\Delta\rho_1 \leqslant \frac{n-1}{2R} + (n-1)\sqrt{K} = \alpha_0.$$

取 $\alpha=\frac{n-1}{R}+2(n-1)\sqrt{K}=2\alpha_0$，则

$$\begin{aligned}\Delta e^{-\alpha\rho_1}&=e^{-\alpha\rho_1}(-\alpha\Delta\rho_1+\alpha^2)\\&=\alpha e^{-\alpha\rho_1}(\alpha-\Delta\rho_1)\\&\geqslant 2\alpha_0^2 e^{-\alpha\rho_1}.\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

任取 $\varphi\in C_0^\infty(B(R))$，$\varphi\geqslant 0$，则 $\varphi\Delta e^{-\alpha\rho_1}\geqslant\alpha_0\alpha e^{-\alpha\rho_1}\varphi$，注意 (2.6.7) 是在分布意义下的不等式，因此

$$\alpha\int_{B(R)}e^{-\alpha\rho_1}(\nabla\varphi\cdot\nabla\rho_1)\geqslant\alpha_0\cdot\alpha\int_{B(R)}\varphi e^{-\alpha\rho_1},$$

$$\int_{B(R)}e^{-\alpha\rho_1}|\nabla\varphi|\geqslant\alpha_0\int_{B(R)}\varphi e^{-\alpha\rho_1},$$

$$\alpha_0\int_{B(R)}\varphi\leqslant\left(\frac{\inf\limits_{B(R)}e^{-\alpha\rho_1}}{\sup\limits_{B(R)}e^{-\alpha\rho_1}}\right)^{-1}\int_{B(R)}|\nabla\varphi|.\tag{2.6.8}$$

当 $x\in B(R)$ 时，由 $2R\leqslant\rho_1(x)\leqslant 4R$，$e^{-2\alpha R}\geqslant e^{-\alpha\rho_1}\geqslant e^{-4\alpha R}$ 将 $\alpha=2\alpha_0=\frac{n-1}{R}+2(n-1)\sqrt{K}$ 代入 (2.6.8) 即得

$$\int_{B(R)}\varphi\leqslant C_1Re^{C_2\sqrt{K}R}\int_{B(R)}|\nabla\varphi|,$$

其中 C_1，C_2 仅依赖于 n，(2.6.4)得证．以 $\varphi^p(p>1)$代入(2.6.4)

$$\int_{B(R)}\varphi^p\leqslant C_1Re^{C_2\sqrt{K}R}\int_{B(R)}p\varphi^{p-1}|\nabla\varphi|,$$

再用 Hölder 不等式得出 (2.6.5)．

定理 2.13. 设M是完备的 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -K$，$u\geqslant 0$，$\Delta u\geqslant 0$，$\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则

$$\sup_{B((1-\tau)R)}u^2\leqslant C_1\tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)}\hat{\int}_{B(R)}u^2,\tag{2.6.9}$$

其中 C_1，C_2 为常数．$\hat{\int}_{B(R)}=\frac{1}{\mathrm{Vol}B(R)}\int$．

证明：先证以下命题．

命题 1. 在定理条件下，如果在 $B(R)$ 中成立 $\Delta h=0$，$h>$

0，则

$$\sup_{B((1-\tau)R)} h^2 \leqslant \tau^{-C(1+\sqrt{K}R)} \inf_{B((1-\tau)R)} h^2, \qquad (2.6.10)$$

其中 C 为常数.

这是因为，根据调和函数梯度估计(系 1.3.4)，

$$(R^2 - \rho^2(x)) \frac{|\nabla h|}{h} \leqslant C_1 R(1 + \sqrt{K}R), \qquad (2.6.11)$$

这里 $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, O)$，$O$ 是 $B(R)$ 的中心. 因此，

$$|\nabla \log h| \leqslant C_1(1 + \sqrt{K}R) \frac{1}{R-\rho}.$$

如 $h(x_1) = \sup_{B((1-\tau)R)} h(x)$，$x_1 \in B((1-\tau)R)$，则

$$\log \frac{h(x_1)}{h(O)} \leqslant C_1(1 + \sqrt{K}\cdot R) \int_0^{(1-\tau)R} \frac{ds}{R-s}$$

$$= \log \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)}.$$

因此，

$$\sup_{B((1-\tau)R)} h(x) \leqslant h(O) \cdot \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)},$$

同理，

$$h(O) \leqslant \inf_{B((1-\tau)R)} h \cdot \tau^{-C_1(1+\sqrt{K}R)},$$

两者合在一起，即得命题 1.

命题 2. 如果在 $B_{(1+a)R}$ 中 $u \geqslant 0$，$\Delta u \geqslant 0$，则

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \leqslant \frac{C}{a^2 R^2} \int_{B(1+a)R} u^2. \qquad (2.6.12)$$

这是因为，取函数 $\varphi \in C_0^\infty(B_{(1+a)R})$，使 $|\nabla\varphi| \leqslant \dfrac{C}{aR}$ 及

$$\varphi = \begin{cases} 1, & x \in B_R, \\ 0, & x \in \partial B_{(1+a)R}, \end{cases}$$

则由 Stokes 公式，

$$0 \leqslant \int_{B_{(1+a)R}} \varphi^2 u \Delta u$$

$$= -\int_{B_{(1+a)R}} \varphi^2 |\nabla u|^2 - 2\int_{B_{(1+a)R}} \varphi u \nabla \varphi_1 \nabla u,$$

$$\int_{B_{(1+a)R}} \varphi^2 |\nabla u|^2 \leqslant -2\int_{B_{(1+a)R}} \varphi u \nabla \varphi \cdot \nabla u$$

$$\leqslant 2\left(\int_{B_{(1+a)R}} \varphi^2 |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_{B_{(1+a)R}} u^2 |\nabla \varphi|^2\right)^{1/2},$$

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \leqslant \int_{B_{(1+a)R}} \varphi^2 |\nabla u|^2$$

$$\leqslant 4\int_{B_{(1+a)R}} u^2 |\nabla \varphi|^2$$

$$\leqslant \frac{C}{a^2 R^2}\int_{B_{(1+a)R}} u^2.$$

命题证毕.

现在回到定理的证明. 在 $B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)$ 中解 Dirichlet 问题如下:

$$\begin{cases} \Delta h = 0, \text{在 } B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right) \text{ 中}, \\ h = u, \quad \partial B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right), \end{cases} \tag{2.6.13}$$

则在 $B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)$ 上 $\Delta(u-h) \geqslant 0$. 由极大值原理,在

$$B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right) \text{ 中}, \ 0 \leqslant u \leqslant h.$$

由刚刚证明过的命题 1,

$$\sup_{B((1-\tau)R)} u^2 \leqslant \sup_{B((1-\tau)R)} h^2 \leqslant C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)} \int_{B((1-\tau)R)} h^2, \tag{2.6.14}$$

下面估计 $\int h^2$.

$$\int_{B((1-\tau)R)} h^2 = \int_{B((1-\tau)R)} (h-u+u)^2$$

$$\leqslant 2\int_{B((1-\tau)R)} u^2 + 2\int_{B((1-\tau)R)} (h-u)^2, \tag{2.6.15}$$

但 $h-u\in C^2\left(B\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)$，$h-u|\partial B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)=0$，通过引用引理 1，(2.6.5)，

$$\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}(h-u)^2\leqslant R^2e^{C_3\sqrt{K}R}\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}|\nabla(h-u)|^2$$

$$\leqslant 2R^2e^{C_3\sqrt{K}R}\left(\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}|\nabla h|^2+\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}|\nabla u|^2\right)$$

$$\leqslant 4R^2e^{C_3\sqrt{K}R}\int_{B\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R\right)}|\nabla u|^2,$$

式中用到 $\int|\nabla h|^2\leqslant\int|\nabla u|^2$ 是由于 Dirichlet 极小原则．再由命题 2，(2.6.12)，

$$\int_{B\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R}|\nabla u|^2\leqslant\frac{C}{(\tau R)^2}\int_{B_R}u^2,$$

因此

$$\int_{B\left(1-\frac{\tau}{2}\right)R}(h-u)^2\leqslant\frac{4}{\tau^2}e^{C_3\sqrt{K}R}\int_{B_R}u^2,$$

代入 (2.6.15) 及 (2.6.14)，

$$\int_{B(1-\tau)R}h^2\leqslant\left(\frac{4}{\tau^2}e^{C_3\sqrt{K}R}+2\right)\int_{B_R}u^2$$

$$\sup_{B_{(1-\tau)R}}u^2\leqslant\frac{C_1\tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)}}{\operatorname{Vol}B_{(1-\tau)R}}\left(2+\frac{4}{\tau^2}e^{C_3\sqrt{K}R}\right)\int_{B_R}u^2$$

$$\leqslant C_1\tau^{-C_4(1+\sqrt{K}R)}e^{C_5\sqrt{K}R}\int_{B_R}u^2\cdot\frac{\operatorname{Vol}B_R}{\operatorname{Vol}B_{(1-\tau)R}}.$$

因为 $\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\tau^{-1}\geqslant 2$，$\tau^{-2}\geqslant e$，所以

$$\sup_{B_{(1-\tau)R}}u^2\leqslant C_1\tau^{-C_6(1+\sqrt{K}R)}\int_{B_R}u^2\cdot\frac{\operatorname{Vol}B_R}{\operatorname{Vol}B_{(1-\tau)R}}.\qquad(2.6.16)$$

据第一章 § 4,(1.4.8),当 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -K$ 时,即有 $R^{-n}e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}R}\mathrm{Vol}B_R$ 是 R 的递降函数,因而

$$R^{-n}e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}R}\mathrm{Vol}B_R \leqslant (1-\tau)^{-n}R^{-n}e^{-\frac{\sqrt{K}}{2}(1-\tau)R}\mathrm{Vol}B_{(1-\tau)R},$$

$$\frac{\mathrm{Vol}B_R}{\mathrm{Vol}B_{(1-\tau)R}} \leqslant (1-\tau)^{-n}e^{\tau\frac{\sqrt{K}}{2}R},$$

代入(2.6.16)并忆及 $e\leqslant\tau^{-2}$, 即得

$$\sup_{B_{(1-\tau)R}} u^2 \leqslant C_1\tau^{-C_2(1+\sqrt{K}R)}\hat{\int}_{B_R} u^2. \tag{2.6.17}$$

定理证毕.

系. 如果 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -K$, $u\geqslant 0$, $\Delta u\geqslant 0$, 则

$$u^2(x_0)\leqslant C_1e^{C_2\sqrt{K}}\hat{\int}_{B_R} u^2(x). \tag{2.6.18}$$

证明: 在(2.6.17)中取 $\tau=e^{-1}$ 即可.

定理 2.14. 设 M 为完备的 Riemann 流形 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$, 则 M 上任何有界调和函数皆为常数.

这一定理前面已用梯度估计证过, 下面用次中值公式重证如下: 因为 $\Delta u=0$, 所以 $\Delta|\nabla u|\geqslant 0$, 因此根据(2.6.18), 有

$$|\nabla u|^2(x_0)\leqslant C_1\hat{\int}_{B_R}|\nabla u|^2(x),$$

但由定理 2.13 中之命题 2, (2.6.12),

$$|\nabla u|^2(x_0)\leqslant \frac{C_1}{R^2}\hat{\int}_{B_{2R}} u^2(x)$$

$$\leqslant \frac{\text{常数}}{R^2}.$$

令 $R\to\infty$, $|\nabla u(x_0)|=0$, 证毕.

定理 2.15. 设 M 为完备 Riemann 流形, u 为正的次调和函数,即 $\Delta u\geqslant 0$, 同时 $u\in L^p(M)$, $p>1$. 则 u 必为常数.

证明,设 $p=1+\lambda$, $\lambda>0$. 任取 $\varphi\in C_0^\infty(B_{2R})$, $\varphi|_{B_R}\equiv 1$,

使 $|\nabla\varphi| \leqslant \frac{C}{R}$，则

$$0 \leqslant \int_M \varphi^2 u^\lambda \Delta u = -\int_M \nabla u \cdot \nabla(\varphi^2 u^\lambda).$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda \int_{B_{2R}} u^{\lambda-1}\varphi^2|\nabla u|^2 &\leqslant 2\int_{B_{2R}} u^\lambda \varphi|\nabla u \cdot \nabla\varphi| \\ &\leqslant 2\left(\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 u^{2a}\varphi^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2R}} |\nabla\varphi|^2 u^{2b}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

其中 a, b 满足 $a+b=\lambda$, $2b=1+\lambda$. 因此，

$$\begin{aligned}\lambda \int_{B_{2R}} u^{\lambda-1}\varphi^2|\nabla u|^2 &\leqslant 4\int_{B_{2R}} |\nabla\varphi|^2 u^{1+\lambda} \\ &\leqslant \frac{C_1}{R^2}\int_M u^p.\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$，只能 $|\nabla u|\equiv 0$. 定理证毕.

注：定理 2.14 当 $p=1$ 时不正确. 存在完备的 Riemann 流形及 $u>0, \Delta u=0, u\in L^1(M)$，但 u 不是常数. 关于这方面的进一步的工作请参看 P. Li 和 R. Schoen 的文章：*Acta Math.*, **153** (1984), 279—301.

附录 整体 Green 函数的存在性

设 M 是非紧、完备的 n 维 Riemann 流形. 我们讨论 M 上整体 Green 函数的存在性. 所谓整体 Green 函数是 $M\times M\backslash \mathrm{diag}(M\times M)$ 上的光滑函数(这里 $\mathrm{diag}(M\times M)=\{(x,x)\in M\times M; x\in M\}$)，满足：

1° $G(x,y)=G(y,x)$，且在 y 固定时有 $\Delta_x G(x,y)=0$, $\forall x\neq y$;

2° $G(x,y)\geqslant 0$;

3° 固定 y，则当 $x\to y$ 时有

$$G(x,y)=\begin{cases}\rho_y(x)^{2-n}(1+o(1)), & \text{如 } n>2,\\ -(\log\rho_y(x))\cdot(1+o(1)), & \text{如 } n=2.\end{cases}$$

其中 $\rho_y(x)$ 表示 x 到 y 点的距离. 令 O 为 M 上的一定点, $R>0$, 记 $B(R)$ 为以 O 为中心, 半径 R 的测地开球. 我们知道存在 $B(R)$ 上的 Green 函数 $G_R(x, y)$, 它在 $\overline{B(R)}\times\overline{B(R)}\backslash$ diag $(\overline{B(R)}\times\overline{B(R)})$上定义, 满足上列的 1°—3°, 并且还满足 Dirichlet 条件:

4° $G_R(x, y)=0$, $\forall y\in B(R)$, $x\in\partial B(R)$.

利用极大值原理可以得出: 设 y 固定,

$$\text{如 } R_2\geqslant R_1, \text{ 则 } G_{R_2}(x, y)\geqslant G_{R_1}(x, y), \quad \forall x\in B(R)\backslash\{y\}. \tag{A.1}$$

事实上,由 2°, 4° 可知,任取 $\varepsilon>0$ 在 $\partial B(R_1)$ 上总有

$$(1+\varepsilon)G_{R_2}(x,y)\geqslant G_{R_1}(x,y). \tag{A.2}$$

又由 3° 可知, 存在充分小的 $r>0$ 使得以上不等式对 $x\in\partial B(r)$ 也成立. 因此,由极大值原理 (A.2) 在 $B(R_1)\backslash B(r)$ 上成立. 但 r 可以任意小,故 (A.2) 在 $B(R)\backslash\{y\}$ 上成立. 令 $\varepsilon\to0$, 即得 (A.1).

(A.1) 说明如果对于 $x\neq y$, $G_R(x, y)$ 上方有界,则可以定义 $G(x, y)=\lim\limits_{R\to\infty}G_R(x, y)$, 并验证 $G(x, y)$ 即是整体 Green 函数. 以下定理指出在相当一般的条件下(即只要存在在无穷远处趋于 0 的正值上调和函数),这确实是可行的.

定理 A.1. 设 M 为非紧、完备 Riemann 流形. 如果存在 $\varphi\in C^2(M)$ 满足: $\varphi>0$, $\Delta\varphi\leqslant0$ 以及 $\varphi(x)\to0$ 当 $\rho(x)\to\infty$, 则 M 上存在整体 Green 函数.

证明: 令 $G_R(x, y)$ 如上所述, 固定 $y\in M$, 将证: 对每个 $r>0$, 存在 $C(r)>0$, 使得

$$\lim_{R\to\infty}G_R(x, y)\leqslant C(\rho_y(x)), \quad \forall x\in M. \tag{A.3}$$

设不然,则存在某个 $r_0>0$, 使得

$$m_R=\max\{G_R(x, y): x\in\partial B_y(r_0)\}\to+\infty$$

当 $R\to\infty$. 令 $v_R=\delta m_R^{-1}G_R(x, y)$, 则 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)}v_R=\delta$, 且由极大值原理

$$0 \leqslant v_R(x) \leqslant \delta, \quad \forall x \in B(R) \setminus B_y(r_0).$$

取 $\delta > 0$ 充分小，使得 $v_R(x) \leqslant \varphi(x)$，$\forall x \in \partial B_y(r_0)$. 注意在 $\partial B(R)$ 上 $v_R = 0 < \varphi$. 因此由极大值原理

$$v_R(x) \leqslant \varphi(x), \quad \forall x \in B(R) \setminus B_y(r_0). \tag{A.4}$$

另一方面，取定 $\bar{R} > 0$，使 $B_y(r_0) \subset B(\bar{R})$，以及任取 $\varepsilon > 0$. 用证明 (A.1) 的同样方法可证：当 $\delta m_{\bar{R}}^{-1} < \varepsilon$ 时有

$$v_R(x) \leqslant \delta + \varepsilon G_{\bar{R}}(x, y),$$
$$\forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}. \tag{A.5}$$

(A.2) 和 (A.5) 一起给出了 v_R 的一个不依赖于 R 的上界估计. 因此，由于 $\Delta v_R = 0$，利用椭圆方程的内估计以及抽取对角线子列的办法（参见定理 1.4.2 的证明）可知存在 $R_i \to \infty$，使得 v_{R_i} 在 $M \setminus \{y\}$ 的每个紧致区域上 C^2 收敛于某个函数 $\bar{v} \in C^2(M \setminus \{y\})$，满足 $\Delta \bar{v} = 0$. 由 (A.4) 推出 $\bar{v}(x) \leqslant \varphi(x)$，$\forall x \in M \setminus B_y(r_0)$，因此

$$\bar{v}(x) \to 0, \quad \text{当 } \rho(x) \to \infty. \tag{A.6}$$

又由 (A.5) 推出 $\bar{v}(x) \leqslant \delta + \varepsilon G_{\bar{R}}(x, y)$，$\forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}$. 但 ε 可任意小，所以

$$\bar{v}(x) \leqslant \delta, \quad \forall x \in B_y(r_0) \setminus \{y\}. \tag{A.7}$$

又注意 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)} v_R = \delta$，因此 $\max\limits_{\partial B_y(r_0)} \bar{v} = \delta$. 由 (A.6) 和 (A.7) 可知 $\bar{v}$ 在 $M \setminus \{y\}$ 的内部某点 $x_0 \in \partial B_y(r_0)$ 达到极大值 δ. 但 $\bar{v}$ 是调和函数，由极大值原理推出 $\bar{v} \equiv \delta > 0$，这显然与 (A.6) 矛盾. 这个矛盾证明了 (A.3).

任取 $0 < \bar{r} < \bar{R}$. 利用极大值原理和 (A.3) 即可得到估计：

$$G_R(x, y) \leqslant 1 + \max(C(\bar{r}), C(\bar{R})),$$
$$\forall x \in B(\bar{R}) \setminus B(\bar{r}), \quad \text{当 } R \text{ 充分大时}.$$

从这个估计出发，仍利用椭圆方程的内估计和抽对角线子列的办法，可以推出 $G(x, y) = \lim\limits_{R \to \infty} G_R(x, y)$ 存在并满足 $\Delta_x G(x, y) = 0$，$x \in M \setminus \{y\}$. 最后，不难利用 $G_R(x, y)$ 的性质，验证 $G(x, y)$ 满足 1°—3°，因而是所求的整体 Green 函数. 具体证明请读者

自己补出.

在以上定理中，如果把上调和函数 $\varphi(x)$ 在无穷远处为零的条件改成可积性条件，则可以得出:

定理 A.2. 设M为非紧、完备 Riemann 流形，其体积

$$\mathrm{Vol}(M)=\infty.$$

如果存在 $\varphi\in C^2(M)$ 满足: $\varphi>0$, $\Delta\varphi\leqslant 0$ 以及 $\int_M\varphi^p dV<\infty$, 其中 $p>1$, 则M具有整体 Green 函数.

证明: 和定理 A.1 的证明完全一样，只是 (A.6) 这时复为:

$$\int_M\bar{v}^p dV<\infty.$$

又注意 (A.7) 保证 $\bar{v}$ 是M上的整体调和函数(即奇点 y 可去), 因而由定理 2.15 可知 $\bar{v}\equiv\delta>0$. 于是 $\int_M\bar{v}^p dV=\delta^p\mathrm{Vol}(M)=\infty$, 与 $\int_M\bar{v}^p dV<\infty$ 矛盾.

定理 A.3. 设M为非紧、完备 Riemann 流形. 如果 $\lambda_1(M)>0$, 则M具有整体 Green 函数.

证明: 证明方法仍仿照定理 A.1. 注意我们仍有

$$0\leqslant v_R(x)\leqslant\delta,\ \forall x\in B(R)\backslash B_y(r_0). \tag{A.8}$$

我们的目的是利用 $\lambda_1(M)>0$ 证明: 如 $B_y(r_0)\subset B(\bar{r})$, 这里 $0<\bar{r}<\frac{1}{2}R$, 则

$$\int_{B(R)\backslash B}v_R^2 dV\leqslant C,\forall R>2\bar{r}, \tag{A.9}$$

其中C是不依赖于R的常数. 假定 (A.9) 成立，则由于 v_{R_i} 在 $M\backslash\{y\}$ 的每一紧区域上一致收敛于 $\bar{v}$, 利用 Fatou 引理可推出

$$\int_{M\backslash B(\bar{r})}\bar{v}^2 dV\leqslant C.$$

结合 (A.7) 即有 $\int_M\bar{v}^2 dV<\infty$. 再由定理 2.15 知 $\bar{v}\equiv\delta>0$. 于是, $\mathrm{Vol}(M)=\delta^{-2}\int_M\bar{v}^2 dV<\infty$. 定义 Lipschitz 函数 u_R 使在

$B(R)$ 上 $u_R=1$，在 $M\setminus B(R+1)$ 上 $u_R=0$，在其余处 $0\leqslant u_R\leqslant 1$，并且 $|\nabla u_R|\leqslant 1$ 几乎处处成立．由 $\lambda_1(M)$ 的定义有

$$\lambda_1(M)\leqslant\int_M|\nabla u_R|^2dV\Big/\int_M u_R^2dV$$
$$\leqslant\frac{\mathrm{Vol}(B(R+1)\setminus B(R))}{\mathrm{Vol}(B_R)}.$$

由于 $\mathrm{Vol}(M)<\infty$，上式右端 $\to 0$ 当 $R\to\infty$，因此 $\lambda_1(M)=0$，这与原设矛盾．这个矛盾证明了 (A.3)．以下的证明与定理 A.1 相同．

为了完成定理 A.3 的证明，我们只需证明 (A.9)．令 η 为一 Lipschitz 截断函数，满足：$\eta\equiv 0$ 在 $B(\bar r)$ 中，$\eta\equiv 1$ 在 $M\setminus B(2\bar r)$ 中，$0\leqslant\eta\leqslant 1$ 以及 $|\nabla\eta|\leqslant\frac{C}{\bar r}$，则有(注意 $v_R|\partial B(R)=0$)

$$0=\int_{B(R)\setminus B(\bar r)}\eta^2v_R\Delta v_R dV$$
$$=-\int_{B(R)\setminus B(\bar r)}\nabla v_R\cdot\nabla(\eta^2v_R)dV$$
$$=\int_{B(2\bar r)\setminus B(\bar r)}|\nabla\eta|^2v_R^2dV$$
$$-\int_{B(R)\setminus B(\bar r)}|\nabla(\eta v_R)|^2dV.$$

又由 $\lambda_1(M)$ 之定义，有

$$\lambda_1(M)\int_{B(R)\setminus B(2\bar r)}v_R^2dV\leqslant\lambda_1(M)\int_{B(R)\setminus B(\bar r)}(\eta v_R)^2dV$$
$$\leqslant\int_{B(R)\setminus B(\bar r)}|\nabla(\eta v_R)|^2dV$$
$$=\int_{B(2\bar r)\setminus B(\bar r)}|\nabla\eta|^2v_R^2dV$$
$$\leqslant\frac{c^2}{\bar r^2}\int_{B(2\bar r)\setminus B(\bar r)}v_R^2dV$$
$$\leqslant\frac{c^2\delta^2}{\bar r^2}\mathrm{Vol}(B(2\bar r)\setminus B(\bar r))=C'.$$

由于 $\lambda_1(M)>0$，(A.9) 因而得证．定理 A.3 到此证毕．

第三章　特征值问题

§1. 特征值问题

设M是n维紧 Riemann 流形具有边界∂M(可能$\partial M=\emptyset$)，其度量在局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 下的表示为 $ds^2=\sum g_{ij}dx^idx^j$，其 Laplace 算子

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其中 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$，$g=\det(g_{ij})$.

为了研究 Laplace 算子的谱问题，我们首先引述若干熟知事实．设 $\varphi\in C^\infty(M)$，令

$$\|\varphi\|_1^2=\int_M\varphi^2+\int_M|\nabla\varphi|^2,$$

对$\|\ \ \|_1$而言的完备化 Hilbert 空间是熟知的 Sobolev 空间，记作$H_1^2(M)$，如 $\varphi\in C_0^\infty(M)$，其完备化的 Hilbert 空间记为 $\mathring{H}_1^2(M)$. Sobolev 空间的基本理论指出，当M是完备 Riemann 流形时，$H_1^2(M)=\mathring{H}_1^2(M)$.

另一熟知的事实是：

$H_1^2(M)\in\varphi\Longleftrightarrow\varphi$ 具有一阶 L^2 广义导数.

当 $\partial M=\emptyset$ 时，Δ 是作用在 $H_1^2(M)$ 上的二阶椭圆型自共轭算子．根据自共轭算子的谱理论，它具有离散的特征值：$\{0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\}$，及相应的特征函数 $\{\varphi_i\}$，

$$\Delta\phi_i=-\lambda_i\phi_i,\ \phi_i\not\equiv 0,\ \phi_i\in C^\infty(M),$$

并且$\{\phi_i\}$组成 Hilbert 空间 $H_1^2(M)$ 的一组正交基.

当 $\partial M\neq\emptyset$ 时，为了保证Δ是自共轭的，我们必须赋加一定的边界条件，通常是两类条件：

A) Dirichlet 条件：此时

$\text{Dom}\Delta = \mathring{H}_1^2(M)$，其相应的特征值和特征函数为

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$（注意 λ_1 的重数为 1），及 $\{\phi_i\}$：

$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i$，$\phi_i|_{\partial M} = 0$，$\phi_i \in C^\infty(M)$，$\{\phi_i\}$ 组成 $\mathring{H}^2(M)$ 的一组正交基.

B) Neumann 边界条件：此时

$$\text{Dom}\Delta = H_1^2(M),$$

相应的特征值和特征函数为

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots,$$

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i, \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu}\bigg|_{\partial M} = 0, \ \phi_i \in C^\infty(M).$$

$\{\phi_i\}$ 组成 $H_{1,N}^2(M)$ 的一组正交基，其中 ν 表示 ∂M 的外法线方向.

在 Δ 的特征值理论中，以下的极小极大原理有基本的作用.

极小极大原理：

为了简便起见，我们记空间 H 为

(1) $\partial M = \emptyset$，

$$H = \{f \in H_1^2(M) \mid \int_M f = 0\},$$

(2) $\partial M \neq \emptyset$，$D$-条件

$$H = \mathring{H}_1^2(M),$$

(3) $\partial M \neq \emptyset$，$N$-条件

$$H = \{f \in H_1^2(M) \mid \int_M f = 0\},$$

则我们可找到一组可数正交基 $\{f_i\}$，$\Delta f_i = -\lambda_i f_i$，$f_i \in C^\infty(M)$，$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$，使

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\int|\nabla f|^2}{\int f^2} \,\middle|\, f \in H\right\},$$

$$\lambda_i = \inf\left\{\frac{\int|\nabla f|^2}{\int f^2} \,\middle|\, f \in H, \int ff_j = 0, j = 1\cdots i-1\right\}. \tag{3.1.1}$$

特别有，如 λ_1 是第一非零特征值，则当且仅当 $C \leqslant \lambda_1$ 时，

$$\int_M |\nabla f|^2 \geqslant C \int_M |f|^2, \forall f \in H, \tag{3.1.2}$$

即最小特征值等于满足以上类型不等式中最大正数 C. 这种不等式称为 Poincaré 不等式.

Poincaré 不等式为微分方程理论中基本不等式之一. 另一个基本不等式是 Sobolev 不等式.

Sobolev 不等式：如 M 是紧致具有边界的 Riemann 流形，则存在常数 C，使

$$C\left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_M |\nabla f| \tag{3.1.3}$$

对一切 $f \in C^\infty(M)$，并且满足 $f|_{\partial M} = 0$(D 氏条件)，或者 $\int_M f = 0$. (后一条件称为 Neumann 条件；当然在不同条件下常数 C 也不同.)

当 M 不是紧致的，而是一般的 Riemann 流形时，Sobolev 不等式不一定成立. 它的成立与等周不等式的成立相等价.

等周不等式：设 Ω 是 M 中的区域，$\Omega \ll M$，则存在常数 C (不依赖于 Ω)，使

$$C(\mathrm{Vol}(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \mathrm{Vol}(\partial\Omega). \tag{3.1.4}$$

由(3.1.3)⇒(3.1.4)，只要取函数

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega,\ d(x, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon, \\ \dfrac{d(x, \partial\Omega)}{\varepsilon}, & x \in \Omega,\ d(x, \partial\Omega) \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

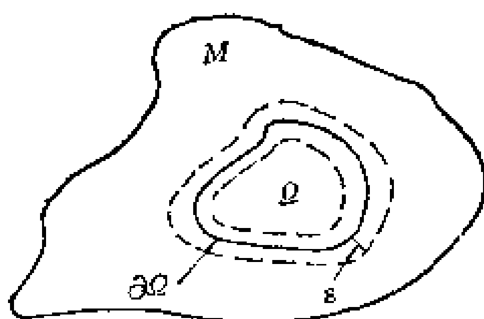
对 f_ε 利用 Sobolev 不等式，再令 $\varepsilon \to 0$ 便可得出等周不等式. 现在我们证明(3.1.4)⇒(3.1.3). 首先我们需要下面的

Co-Area 公式：设 M 是紧致带边界的 Riemann 流形，$f \in H^1(M)$，那么对 M 上的任何非负函数 g 有

$$\int_M g = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\{f=\sigma\}} \frac{g}{|\nabla f|}\right) d\sigma.$$

(证明请见 H. Federer: Geometric Measure Theory, Springer, 1969.)为简便起见不妨设 $f\geqslant 0$. 由 Co-Area 公式

$$\int_M |\nabla f| = \int_0^\infty \text{Area}(f=\sigma)d\sigma.$$



同时我们有

$$\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} = \int_0^\infty \text{Vol}(f^{\frac{n}{n-1}} > \lambda)d\lambda$$

$$= \frac{n}{n-1}\int_0^\infty \text{Vol}(f>\sigma)\sigma^{\frac{n}{n-1}-1}d\sigma.$$

利用等周不等式

$$\int_M |\nabla f| = \int_0^\infty \text{Area}(f=\sigma)\,d\sigma \geqslant C\int_0^\infty \text{Vol}(f>\sigma)^{\frac{n-1}{n}}d\sigma.$$

因此只要证明

$$\int_0^\infty \text{Vol}(f>\sigma)^{\frac{n-1}{n}}\,d\sigma \geqslant C_n\left(\int_0^\infty \text{Vol}(f>\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma\right)^{\frac{n-1}{n}(*)}$$ 即可.

令 $F(\sigma)=\text{Vol}(f>\sigma)$, $\varphi(t)=\int_0^t F(\sigma)^{\frac{n-1}{n}}d\sigma$,

$$\psi(t)=\left(\int_0^t F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

则 $\varphi(0)=\psi(0)$. 此外利用 $F(\sigma)$ 单调递减不难验证 $\varphi'(t)\geqslant \frac{n}{n-1}\psi'(t)$.

因而 $\varphi(\infty)\geqslant \frac{n}{n-1}\psi(\infty)$. 即(*)成立.

为了研究第一特征值的几何意义, Cheeger 引进了两个等周常数,它们和第一特征值有密切的关系:

定义 (Cheeger). 设M是紧 Riemann 流形,定义常数

当 $\partial M\neq\varnothing$时, $h_D(M)=\inf\left\{\frac{\text{Vol}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(\Omega)}\middle|\Omega\subset\subset M\right\}$,

当 $\partial M=\varnothing$ 时,

$$h_N(M)=\inf\left\{\frac{\text{Vol}(M)}{\min\{\text{Vol}(M_1),\ \text{Vol}(M_2)\}}\middle|\begin{array}{l}H\text{ 是}M\text{ 中超曲面, 它将}M\text{分}\\ \text{为两部分 }M_1M_2,\text{ 且 }\partial M_1=\\ \partial M_2=H.\end{array}\right\}$$

这两个等周常数和第一特征值有密切的关系.

定理 (Cheeger). 对 Dirichlet 边界条件而言,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4} h_D^2(M).$$

对 Neumann 边界条件而言,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4} h_N^2(M).$$

证明: (对 Dirichlet 边界条件.) 设 f 是对应 λ_1 的特征函数, 熟知, $f(x) > 0$, $x \in \Omega$, $f|_{\partial M} = 0$.

i) 如果存在常数 μ, 使

$$\int_M |\nabla\varphi| \geqslant \mu \int_M |\varphi|, \ \forall \varphi \in C^\infty(M), \ \varphi|_{\partial M} = 0,$$

则 $\lambda_1 \geqslant \dfrac{1}{4}\mu^2$. 这是因为, 考虑 f^2, $\nabla f^2 = 2f\nabla f$.

$$\mu \int_M f^2 \leqslant 2\int_M |f||\nabla f| \leqslant 2\sqrt{\left(\int_M f^2\right)\left(\int_M |\nabla f|^2\right)},$$

$$\therefore \qquad \lambda_1 \int_M f^2 = \int_M |\nabla f|^2 \geqslant \frac{\mu^2}{4}\int_M f^2,$$

即

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}\mu^2.$$

ii) 根据 Co-Area 公式,

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla\varphi| &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\varphi=\sigma} \frac{|\nabla\varphi|}{|\nabla\varphi|} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\varphi=\sigma} 1\right) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Area } (\varphi = \sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Area}(\varphi = \sigma)}{\text{Vol}(\varphi \geqslant \sigma)} \text{Vol}(\varphi \geqslant \sigma) d\sigma \\
&\geqslant \inf_\sigma \left(\frac{\text{Area}(\varphi = \sigma)}{\text{Vol}(\varphi \geqslant \sigma)}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{Vol}(\varphi \geqslant \sigma) d\sigma \\
&\geqslant \inf_\sigma \left(\frac{\text{Area}(\varphi = \sigma)}{\text{Vol}(\varphi \geqslant \sigma)}\right) \int_M |\varphi|,
\end{aligned}$$

但

$$h_D(M)=\inf_{\Omega\subset\subset M}\frac{\mathrm{Area}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\leqslant\inf_{\sigma}\left(\frac{\mathrm{Area}(\varphi=\sigma)}{\mathrm{Vol}(\varphi\geqslant\sigma)}\right),$$

故由 i) 知 $\lambda_1\geqslant\frac{1}{4}h_D^2(M)$.

对 Neumann 条件，仅需要证明(此时 $\partial M=\varnothing$)

$$h_N(D)=\inf_{\substack{f\in C(M)\\ \int_M f=0}}\left(\frac{\int_M|\nabla f|}{\int_M|f|}\right).$$

设超曲面H将M分成 M_1 和 M_2 两部分，无妨设 $\mathrm{Vol}(M_1)\leqslant\mathrm{Vol}(M_2)$。对于一切 $\varepsilon>0$，定义

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}-\dfrac{d(x,H)}{\varepsilon}, & \text{当 } d(x,H)\leqslant\varepsilon,\ x\in M_1,\\ 1, & \text{当 } d(x,H)>\varepsilon,\ x\in M_1,\\ 0, & x\in M_2,\end{cases}$$

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{d(x,H)}{\varepsilon}, & \text{当 } d(x,H)\leqslant\varepsilon,\ x\in M_2,\\ 1, & \text{当 } d(x,H)>\varepsilon,\ x\in M_2,\\ 0, & x\in M_1.\end{cases}$$

选择常数 $C(\varepsilon)$，使

$$\int_M[f_\varepsilon(x)-C\tilde{f}_\varepsilon(x)]=0.$$

显然

$$\lim_{\varepsilon\to 0}C=\frac{\mathrm{Vol}(M_1)}{\mathrm{Vol}(M_2)}=C_0.$$

但当 $\varepsilon\to 0$ 时，又有

$$\int_M|\nabla[f_\varepsilon(x)-C\tilde{f}_\varepsilon(x)]|\to(1+C_0)\mathrm{Area}(H),$$

$$\begin{aligned}\int_M|f_\varepsilon(x)-C\tilde{f}_\varepsilon(x)|&\to V(M_1)+CV(M_2)\\ &\geqslant(1+C_0)\min\{V(M_1),V(M_2)\},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_M|\nabla(f_\varepsilon-C\tilde{f}_\varepsilon)|}{\int_M|f_\varepsilon-C\tilde{f}_\varepsilon|}\leqslant\frac{A(H)}{\min\{V(M_1),V(M_2)\}}.$$

因此

$$\inf_{\int_M f=0} \frac{\int_M |\nabla f|}{\int_M |f|} \leqslant h_N(M).$$

再证

$$\inf_{\int_M f=0} \frac{\int |\nabla f|}{\int |f|} \geqslant h_N(M).$$

任取 $f \in C^\infty(M)$, $\int_M f = 0$.

令

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如 } f \geqslant 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{如 } f \leqslant 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则 $$f = f^+ - f^-.$$

用 Co-Area 公式

$$\int_M |\nabla f^+| = \int_0^\infty \left(\int_{f=C} \frac{|\nabla f^+|}{|\nabla f^+|} \right) dC$$

$$= \int_0^\infty \text{Area}(f^+ = C)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\text{Area}(f^+ = C)}{\text{Vol}(f^+ > C)} \text{Vol}(f^+ > C) dC$$

$$\geqslant h_N(M) \int_M f^+.$$

同理 $$\int_M |\nabla f^-| \geqslant h_N(M) \int_M f^-.$$

因此

$$\int_M |\nabla f| \geqslant h_N(M) \int_M |f|.$$

利用 Co-Area 公式和等周 (isoperemetric) 不等式，还可以证明以下的 Rayleigh 猜想。

定理 (Faba-Krahn). 设 $\Omega \subset R^n$ 是一域，$B(R)$ 是 R^n 中以原点为中心，半径为 R 的球体，$\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Vol}(B(R))$，则对 Dirichlet 边界条件的第一特征值而言，

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_1(B(R)).$$

证明：取对 Ω 而言的第一特征函数 f，满足

$$\Delta f = -\lambda_1(\Omega) f,$$

$$f|_{\partial\Omega} = 0,\ f > 0,\ 在\ \Omega\ 内.$$

此处
$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

现在利用 f，通过"对称化"来构造 $B(R)$ 中的函数 $g: B(R) \to R^+$，使得对于任意常数 C 有

$$\mathrm{Vol}(f \geqslant C) = \mathrm{Vol}(g \geqslant C),$$

并且 g 只是径向函数，$g = g(r)$，$r \leqslant R$. 因此，$\forall C$，点集 $\{g \geqslant C\} =$ 球，$g(R) = 0$. 根据造法显然有，

$$\int_\Omega f^2 = \int_0^\infty \mathrm{Vol}(f^2 \geqslant C)dC = \int_0^\infty \mathrm{Vol}(g^2 \geqslant C) = \int_{B(R)} g^2,$$

并且因为 g 仅依赖于 r，所以在 $g = C$ 上，$|\nabla g| = \left|\frac{d}{dr} g(r)\right| =$ 常数，因而

$$\mathrm{Area}(g = C) = \int_{g=C} 1 = \left(\int_{g=C} |\nabla g| \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|}\right)^{1/2},$$

但由 R^n 中的等周不等式（同体积的区域以球的表面积为最小），

$$\int_{f=C} |\nabla f| \int_{f=C} \frac{1}{|\nabla f|} \geqslant \left(\int_{f=C} 1\right)^2 = [\mathrm{Area}(f = C)]^2$$

$$\geqslant [\mathrm{Area}(g = C)]^2 = \int_{g=C} |\nabla g| \cdot \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|},$$

但由 Co-Area 公式，

$$\frac{d\mathrm{Vol}(f \geqslant C)}{dC} = \int_{f=C} \frac{1}{|\nabla f|},$$

$$\frac{d\mathrm{Vol}(g \geqslant C)}{dC} = \int_{g=C} \frac{1}{|\nabla g|},$$

而
$$\frac{d\mathrm{Vol}(f \geqslant C)}{dC} = \frac{d\mathrm{Vol}(g \geqslant C)}{dC},$$

所以
$$\int_{f=C} |\nabla f| \geqslant \int_{g=C} |\nabla g|.$$

再用 Co-Area 公式
$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 = \int_0^\infty \left(\int_{f=C} |\nabla f| \right) dC \geqslant \int_0^\infty \left(\int_{g=C} |\nabla g| \right) dC$$
$$= \int_{B(R)} |\nabla g|^2,$$

由极小极大原理
$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2} \geqslant \frac{\int_{B(R)} |\nabla g|^2}{\int_{B(R)} g^2} \geqslant \lambda_1(B(R)).$$

§2. Riemann 流形的热核函数（heat kernal）

设Ω是一般的 Riemann 流形(不带边界)，令
$$\mathscr{D}(d) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_1 < +\infty\},$$
其中 $\|f\|_1^2 = \int f^2 + \int |df|^2$，按 $\|\cdot\|_1$ 的完备化是 Sobolev 空间 $H^1(\Omega) < L^2(\Omega)$. 算子$d$在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包记作 $\bar{d}$，令 d_C 为 d 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 的限制，d_C 的闭包 $\bar{d}_C$ 的定义域是 $H_0^1(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(M)$ 按$\|\cdot\|_1$ 的完备化. 显然 $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Sobolev 空间理论指出，如$\Omega$是完备的 Riemann 流形，则 $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

算子 $\delta = -*d*$，满足 $\langle df, w\rangle = \langle f, \delta w\rangle$，其中$w$是 C^∞1-形式，f, w 只要二者之一具有紧支集，令
$$D(\delta) = \left\{ w \in C^\infty 1\text{-形式} \,\Big|\, \int |w|^2 + \int |\delta w|^2 < +\infty \right\},$$
根据 Gaffney 的一个引理 [*Ann. of Math.*, 60, 1954, 458—466],
$$\bar{\delta} = \bar{d}_C^*,\ \delta_C = \bar{d}^*,$$
其 Laplace 算子(具 Dirichlet 和 Neumann 边界条件)为
$$\Delta_D = \bar{\delta}\bar{d}_C,\ \Delta_N = \delta_C\bar{d},$$

当 Ω 具有光滑边界，则 $\bar{\Delta}=\bar{\Delta}_N=$ 通常的算子. 假设 Ω 是完备的（此时 $H_0^1(\Omega)=H^1(\Omega)$），则因为 $\bar{d}_C=\bar{d}$，$\bar{\delta}_C=\bar{\delta}$，有 Gaffney 证明了 [*Ann. of Math.*, 60, 1954, 140—145]

$$\bar{\Delta}=\bar{\Delta}_D=\bar{\Delta}_N=\bar{\delta}\bar{d}.$$

熟知，$\bar{\Delta}$ 是自共轭的，因此 $e^{-\bar{\Delta}t}$ 组成有界自共轭算子的半群，根据自共轭算子的谱理论，如果 dE_λ 是 $\bar{\Delta}$ 的谱测度，则

$$e^{-\bar{\Delta}t}=\int_C^\infty e^{\lambda t}dE_\lambda,\ t>0,$$

并且对于 $t>0$，$e^{-\bar{\Delta}t}$：$L^2(\Omega)\to\bigcap_{i=1}^\infty D(\bar{\Delta}^i)\subset C^\infty(\Omega)$. 当 $f\in L^2(\Omega)$ 时，$\bar{\Delta}^i(e^{-\bar{\Delta}t}f)=\int_0^\infty\lambda^i e^{-\lambda t}dE_\lambda(f)$. 这里 $\bigcap D(\bar{\Delta}^i)\subset C^\infty(\Omega)$ 是基于椭圆型算子的理论（Weyl 理论）.

下面我们来叙述并证明本节的基本事实.

定理 1. 存在热核 $H(x,y,t)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times R^+)$，使 $(e^{-\bar{\Delta}t}f)(x)=\int_\Omega H(x,y,t)f(y)$，$\forall f\in L^2(\Omega)$. 满足：

1) $H(x,y,t)=H(y,x,t)$，

2) $\lim\limits_{t\to 0^+}H(x,y,t)=\delta_x(y)$，

3) $\left(\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)H=0$，

4) $H(x,y,t)=\int H(x,z,t-s)H(z,y,s)dz$.

证明：

A 首先证明，$\forall f\in L^2(\Omega)$，$e^{-t\bar{\Delta}}f\in C^\infty(\Omega\times R^+)$. 为此先证，在广义导数意义下（weak sense）

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\bar{\Delta}}f)=\int_0^\infty-\lambda e^{-\lambda t}dE_\lambda(f),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\bar{\Delta}}f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda(t+\varepsilon)}dE_\lambda(f)\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty e^{-\lambda t}dE_\lambda(f)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^A \frac{e^{-\lambda \varepsilon} - 1}{\varepsilon} e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) + \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda \varepsilon} - 1}{\lambda \varepsilon} \lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) \right]$$

$$= \int_0^A -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) + O(Ae^{-At} \|f\|),$$

最后项是由于 $(e^{-x} - 1)/x$ 在 $[0, \infty)$ 上一致有界，而极限是在 L^2 意义下取的.

为证明 $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\bar{\Delta}}f) = \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f)$（弱）．需证 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times R^+)$ 应有

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(e^{-t\bar{\Delta}}f) = -\int \varphi\left(\int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f)\right).$$

令 $f_0 = e^{-t\bar{\Delta}}f$，则由

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(e^{-t\bar{\Delta}}f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t)}{\varepsilon} f_0$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int \varphi(t) \frac{f_0(t+\varepsilon) - f_0(t)}{\varepsilon}$$

$$= -\int \varphi(t) \left[\int_0^A -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) + O(Ae^{-At}\|f\|) \right].$$

再令 $A \to +\infty$，即得

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} f_0 = -\int \varphi \left[\int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) \right].$$

类似的推理，可得（在广义意义下）

$$\left(\bar{\Delta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^l (e^{-t\bar{\Delta}}f) = \int_0^\infty (\lambda + \lambda^2)^l e^{-\lambda t} dE_\lambda(f),$$

而 $L = \bar{\Delta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 是 $\Omega \times R^+$ 的 Laplace 算子．椭圆算子理论指出 $\bigcap^\infty \mathscr{D}(L^l) \subset C^\infty$，因此，$e^{-t\bar{\Delta}}f \in C^\infty(\Omega \times R^+)$．如果 $f_1(x,t) = e^{-t\bar{\Delta}}f$，则 $\frac{\partial}{\partial t} f_1 = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda(f) = -\bar{\Delta}[e^{-\bar{\Delta}t}f] = -\bar{\Delta} f_1$，

所以
$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)f_1(x,t)=0,$$
因为 $f_1(x,t)$ 是光滑的,导数已是通常意义下的.

$\hat{B}$. 证明 $e^{-t\Delta}f=\int_{\Omega}H(x,y,t)f(y)dy$.

根据单位分解,我们不妨假定 $f\in C_0^\infty(\Omega)$,并且 suppf 是足够小。考虑算子 $\square=\Delta+\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的参数化 (parametrix) —— 见本定理后的附注——$P(x,y,t)$, $P(x,y,t)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times R^+)$,
$$\lim_{t\to 0}P(x,y,t)=\delta_y,$$
并且对任何 $N>0$, $\lim\limits_{t\to 0}\square_x P(x,y,t)=O(t^N)$, 而且当 $d(x,y)$ 足够小时, $t\to+0$, 有渐近展开
$$P(x,y,t)\sim\frac{\exp(-d(x,y)^2/4t)}{(4\pi t)^{n/2}}\sum_i a_i(x,y)t^i,$$
其中 $n=\dim\Omega$, $d(x,y)=x$, y 的 Riemann 距离. $a(x,y)\in C^\infty$, $a_0(x,y)=1$. 对于 $0<\varepsilon<s<t-s$
$$\begin{aligned}&e^{-\bar{\Delta}\varepsilon}P(x,y,t-\varepsilon)-e^{-\bar{\Delta}(t-\varepsilon)}P(x,y,\varepsilon)\\&=\int_\varepsilon^{t-\varepsilon}\frac{d}{ds}\left(e^{-\bar{\Delta}(t-s)}P(x,y,s)\right)ds\\&=\int_\varepsilon^{t-\varepsilon}\left[\bar{\Delta}e^{-\bar{\Delta}(t-s)}P(x,y,s)+e^{-\bar{\Delta}(t-s)}\frac{\partial P}{\partial s}(x,y,s)\right]ds\\&=\int_\varepsilon^{t-\varepsilon}e^{-\bar{\Delta}(t-s)}\square_x P(x,y,s)ds.\end{aligned}$$
用 t 代替 $t-\varepsilon$,再令 $\varepsilon\to 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-\bar{\Delta}t}P(x,y,\varepsilon)=P(x,y,t)-\int_0^t e^{-\bar{\Delta}(t-s)}\square_x P(x,y,s)ds$$
$$\overset{\text{def}}{=\!=}H(x,y,t).$$
记 $F(x,y,s)=\square_x P(x,y,s)$, 则
$$\begin{aligned}&\bar{\Delta}^i\int_0^t e^{-\bar{\Delta}(t-s)}F(x,y,s)ds\\&=\int_0^t\int_0^\infty\lambda^i e^{-\lambda(t-s)}dE_\lambda(F(x,y,s))\end{aligned}$$

$$= \int_{s_0}^{t}\int_0^{\infty}\lambda^i e^{-\lambda(t-s)}dE_\lambda(F(x, y, s))ds$$

$$+ \int_0^{s_0}\int_0^{\infty}\lambda^i e^{-\lambda(t-s)}dE_\lambda(F(x, y, s))ds$$

$$= \int_{s_0}^{t}\int_0^{\infty}\lambda^i e^{-\lambda(t-s)}dE_\lambda(F(x, y, s))ds + \int_0^{s_0} O(s^N)ds,$$

这是由于 $F(x, y, s) = O(s^N)$，当 $s \to 0$ 时，因此，$H(x, y, t) \in \mathscr{D}(\bar{\Delta}^i)$，所以 $H(x, y, t) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times R^+)$. 因为

$$|e^{-\bar{\Delta}(t-s)}\Box_x P(x, y, s)| = O(s^N),$$

所以 $H(x, y, t)$ 和 $P(x, y, t)$ 具有同样的渐近展开. 由 $H(x, y, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} e^{-\Delta t}P(x, y, \varepsilon)$ 得，$\forall f(y) \in C_0^\infty(\Omega)$，都有

$$\int H(x, y, t)f(y)dy = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_\Omega e^{-\Delta t}P(x, y, \varepsilon)f(y)dy$$

$$= e^{-\Delta t}\lim_{\varepsilon \to 0}\int_\Omega P(x, y, \varepsilon)f(y)dy = e^{-\Delta t}f(x),$$

最后的等号成立是由于 $P(x, y, t)$ 的 δ 性质.

同时，由 $H(x, y, t)$ 的定义可验证，当 y 固定，$t > 0$ 时，$H(x, y, t) \in L^2(\Omega)$，因此

$$e^{-\Delta t}f(x) = \int H(x, y, t)f(y) \qquad (*)$$

对一切 $f \in L^2(\Omega)$ 成立. $H(x, y, t)$ 是 $e^{-\Delta t}$ 的核函数. 至于性质 1)，$H(x, y, t) = H(y, x, t)$，是由于 Δ 是自共轭的；性质2)即 (*)式.

性质 3) 的证明：由定义

$$H(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\Delta t}P(x, y, t),$$ 对任何 $\varepsilon > 0$，

$e^{-\Delta t}P(x, y, t)$ 均满足热方程$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0$，因而亦有$\left(\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)H(x, y, t) = 0$.

性质 4)的证明：由 $e^{-\Delta s}e^{-\Delta(t-s)} = e^{-\Delta t}$ 及(*)即得

$$H(x, y, t) = \int_\Omega H(x, z, t-s)H(z, y, s)dz.$$

附：关于热方程的拟基本解（parametrix）.

熟知，对 R^n 而言，热方程 $\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0$ 的基本解是 $\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)/(4\pi t)^{\frac{n}{2}}$. 对一般的 Riemann 流形 M，我们希望找到具以下形式的热方程基本解

$$U(x,y,t)\sim(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-d^2(x,y)/4t}\left\{\sum_{i\geq 0}\phi_i(x,y)t^i\right\},$$

其中 $d(x,y)$ 是M上的两点的 Riemann 距离.

取围绕 x 的正规坐标系 $y^i(i=1,\cdots,n)$，$r=d(x,y)=$ 连接 x, y 的测地线距离. 熟知对于仅依赖于 r 的函数 $\phi(r)$,$\phi(r)$

$$\Delta\phi=\frac{d^2\phi}{dr^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\frac{d\phi}{dr},$$

$$\Delta(\phi\phi)=\phi\Delta\phi+\phi\Delta\phi+2\frac{d\phi}{dr}\frac{d\phi}{dr}.$$

令

$$\phi=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}},\ \phi=\phi_0+\phi_1t+\cdots+\phi_Nt^N,$$

及

$$u_N=\phi\phi=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)\sum_{i=0}^{N}\phi_it^i,$$

则

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_N=\phi\left(\Delta\phi-\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)+\phi\left(\Delta\phi-\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)$$
$$+2\frac{d\phi}{dr}\frac{d\phi}{dr}.$$

由

$$\Delta\phi-\frac{\partial}{\partial t}\phi=\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\frac{d\phi}{dr},\quad\frac{d\phi}{dr}=-\frac{r}{2t}\phi,$$

可得

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_N$$

$$-\frac{\phi}{t}\sum_{k=0}^{N}\left[\Delta\phi_{k-1}-\left(k+\frac{r}{2}\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\phi_k-r\frac{d\phi_k}{dr}\right]t^k,$$

化为解方程

$$r\frac{d\phi_k}{dr}+\left(k+\frac{r}{2}\frac{d\log\sqrt{g}}{dr}\right)\phi_k=\Delta\phi_{k-1},\ k=0,\cdots,N,$$

此式即

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}(r^k g^{\frac{1}{4}}\phi_k)=r^{k-1}g^{\frac{1}{4}}\Delta\phi_{k-1},\ k\geqslant 1,\\ \dfrac{d\phi_0}{dr}+\dfrac{d\log\sqrt{g}}{\partial dr}\phi_0=0\quad(令\ \phi_{-1}\equiv 0).\end{cases}$$

由此解得

$$\phi_0=g^{-\frac{1}{4}},$$

$$\phi_k(x,y)=g^{-\frac{1}{4}}(y)r^{-k}\int_0^{r(x,y)}r^{k-1}(\Delta\phi_{k-1})g^{\frac{1}{4}}dr.$$

这样定义的 $\phi_k(i=0,\cdots,N)$，显然是 C^∞ 的，而

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_N=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}}\Delta\phi_N\cdot t^N.$$

取 cut-off 函数 $\theta\in C_0^\infty$，使

$$\theta(r,t)=\begin{cases}1,在\ (r,t)=(0,0)\ 的邻域,\\0,较以上邻域稍大的某邻域外.\end{cases}$$

令

$$P_N(x,y,t)=\theta(r(x,y),t)u_N(x,y,t),$$

$P_N(x,y,t)$ 显然满足：$P_N(x,y,t)\in C^\infty(M\times M\times R^+)$，且

$$\lim_{s\to 0}P_N(x,y,s)=\delta_x(y),$$

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)P_N=O(t^N).$$

从热方程初值问题

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u=G,\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解对初值及 G 的依赖性可知，如果 G 在 $t=0$ 时有足够高阶零点，则解亦如此。因此上面构造的 $P_N(x,y,t)$，可以逼近到热方

程严格解至任意阶.

下面讨论热核 $H(x, y, t)$ 的性质.

引理 1. 设 Ω 是 Riemann 流形,无论是 Dirichlet,还是 Neumann 边界条件,则

$$H(x, y, t) > 0, \qquad \forall t > 0.$$

证明: 由 Sobolev 空间理论知,如 $u \in H^1(\Omega)$ (或 $H_0^1(\Omega)$),则 $|u| \in H^1(\Omega)$(或 $H_0^1(\Omega)$). 因此,

$$d\,\frac{1}{2}(u - |u|) = \begin{cases} du, & u \leqslant 0, \\ 0, & u > 0, \end{cases}$$

固定 y,由 $H(x, y, t)$ 的渐近展开,知当 ε, δ 充分小时,$H(x, y, t) > -K_N t^N$,只要 $d(x, y) < \varepsilon$, $t < \delta$. 设 $B_\varepsilon(y)$ 为以 y 为中心,ε 为半径的球,考虑

$$R_{\delta,t} = \Omega \times [0, t] \backslash B_\varepsilon(y) \times [0, \delta],$$

则

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{R_{\delta,t}} dH \cdot d\left(\frac{1}{2}(H - |H|)\right) \\ &= \int_{R_{\delta,t}} \Delta H \frac{1}{2}(H - |H|) - \int_{S_\varepsilon(y)\times[0,\delta]} \frac{1}{2}(H - |H|) * dH. \end{aligned}$$

式中利用了 Stokes 公式及边界条件. 注意当 $\delta \to 0$ 时,上式的第二项$\to 0$,这是因为$-H < H_N t^N \leqslant K_N \delta^N$. 而第一项

$$\begin{aligned} \int_{R_{\delta,t}} \Delta H \cdot \frac{1}{2}(H - |H|) &= -\int_{R_{\delta,t}} \frac{\partial}{\partial t} H \cdot \frac{1}{2}(H - |H|) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{R_{\delta,t}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(H - |H|)\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega\times[0,t]} \left[\frac{1}{2}(H - |H|)\right]^2 \right. \\ &\qquad \left. - \int_{B_\varepsilon(y)\times[0,\delta]} \left[\frac{1}{2}(H - |H|)\right]^2\right\}. \end{aligned}$$

同理当 $\delta \to 0$ 时,后一项$\to 0$. 因此 $H - |H| \equiv 0$,即 $H \geqslant 0$. 但由热算子的极小值原理,只能有 $H > 0$.

引理 2. 设 Ω 是常曲率的完备 Riemann 流形 (space form)

中的测地球 B_R,熟知其热核仅为 $r=d(x,y)$ 的函数 $H(r,t)$,则 $\frac{\partial H(r,t)}{\partial r}<0$.

证明：其思路同上一引理．当 $0<r,t<\varepsilon$ 时,由 $H(x,y,t)$ 的渐近展开

$$\frac{\partial H}{\partial r}\sim\frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\left(-\frac{r}{2t}\right)(a_0(r)+a_1(r)t+\cdots)$$

$$+\frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\left(\frac{\partial a_0}{\partial r}(r)+\frac{\partial a_1}{\partial r}(r)t+\cdots\right),$$

$a_i(r)\in C^\infty(M)$,此时 $\frac{\partial a_i}{\partial r}=O(r)$. 同时 $a_0(O)=1$, 因此在 r,t 很小时,首项 $[e^{-r^2/4t}/(4\pi t)^{n/2}]\times\left[-\frac{r}{2t}\right]a_0(r)$ 起主要作用．所以此时 $\frac{\partial H}{\partial r}(r,t)\leqslant 0$, 并且对任何$N$都有 $\frac{\partial H}{\partial r}=O(t^N)$. 令

$$R_{\delta,t}=M\times[0,t]\backslash B_\varepsilon\times[0,\delta],$$

$$\mathfrak{M}_t^+=\left\{(x,y,t)\in R_{\delta,t}\middle|\frac{\partial H}{\partial r}>0\right\},$$

则

$$0\leqslant\int_{\mathfrak{M}_t^+}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2=\int_{\mathfrak{M}_t^+}\frac{1}{2}\langle dH,dH\rangle$$

$$=\int_\delta^t\int_{\mathfrak{M}_t^+}\left\langle\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r},\frac{\partial H}{\partial r}\right\rangle$$

$$+\int_0^\delta\int_{\mathfrak{M}_t^+\backslash B_\varepsilon\times(s)}\left\langle\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial r},\frac{\partial H}{\partial r}\right\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\int_{B_\varepsilon\cap\mathfrak{M}_\delta^+}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2.$$

当 $\varepsilon,\delta\to 0$ 时,最后项$\to 0$,而

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right),\frac{\partial H}{\partial r}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial s},\frac{\partial H}{\partial r}\right\rangle$$

$$=\left\langle d\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right),dH\right\rangle=-\langle d\Delta H,dH\rangle.$$

当 $(\delta, t) \ni s$ 时，因为 H 仅依赖于 r，故 $\mathfrak{M}_s^+$ 由一些闭环组成，其边界 $\partial\mathfrak{M}_s^+ = S_R$. 由边界条件再用 Stokes 公式

$$\int_{\mathfrak{M}_s^+} \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial r}, \frac{\partial H}{\partial r} \right\rangle = -\int_{\mathfrak{M}_s^+} \langle d\Delta H, dH \rangle = -\int_{\mathfrak{M}_s^+} |\Delta H|^2.$$

类似地，当 $s \in (0, \delta)$ 时，

$$\int_{\mathfrak{M}_s^+ \setminus B_\varepsilon \times \{s\}} \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial r}, \frac{\partial H}{\partial r} \right\rangle = -\int_{\mathfrak{M}_s^+ \setminus B_\varepsilon(x) \times \{s\}} |\Delta H|^2 - \int_{S_\varepsilon(x) \times \{s\}} \Delta H * dH.$$

上式的最后项 $\to 0$（当 $\varepsilon, s \to 0$）. 由此得到 $\mathfrak{M}_s^+ = \varnothing$，即 $\frac{\partial H}{\partial r} \leqslant 0$，因为

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - m(r)\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} H\right) - m(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) - m'(r)\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) = 0,$$

由抛物方程的极大值原理可得 $\frac{\partial H}{\partial r} < 0$.

在完备的 Riemann 流形中，以 x_0 为中心，r_0 为半径的测地球记作 $B(x_0, r_0)$；记 $V_n(k, r_0)$ 为 n 维单连通常曲率 k 的空间形式中的半径为 r_0 的测地球. $V_n(k, r_0)$ 中的热核为 $\mathscr{E}(x, y, t) = \mathscr{E}(r(x, y), t)$ 可以看作 $B(x_0, r_0)$ 上的函数. 此函数在 $B(x_0, r_0) \setminus C$ 上光滑，其中 C 是 x_0 的割迹.

定理 2（热核函数的比较定理，Cheeger-Yau）. 设 M 是完备 Riemann 流形，其 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)k$，任意固定 $x \in M$，$r_0 > 0$，则 $B(x, r_0)$ 的热核 $H(x, y, t)$ 和空间形式中的测地球 $V(k, r_0)$ 的热核 $\mathscr{E}(r(x, y), t)$ 满足不等式

$$\mathscr{E}(r(x, y), t) \leqslant H(x, y, t)$$

（核函数的边界条件为 Dirichlet 或 Neumann 条件）.

证明：由热核函数的 δ 性质

$H(x, y, t) - \mathscr{E}(x, y, t)$

$$= \int_0^t \int_{B(x,r_0)} \frac{d}{ds} [\mathscr{E}(x, z, t-s) H(z, y, s)] dz ds$$

$$= -\int_0^t \int_{B(x,r_0)} \left[\frac{d}{ds} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) \right] H(z, y, s) dz ds$$

$$+ \int_0^t \int_{B(x,r_0)} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) \frac{d}{ds} H(z, y, s) dz ds$$

$$= \int_0^t \int_{B(x,r_0)} \tilde{\Delta} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) H(z, y, s) dz ds$$

$$- \int_0^t \int_{B(x,r_0)} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) \Delta H(z, y, s) dz ds$$

其中 Δ 和 $\tilde{\Delta}$ 分别为M上及空间形式上的 Laplace 算子. 由 Green 公式. 无论是 Dirichlet 的还是 Neumann 边界条件,都有

$$\int_{B(x,r_0)} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) \Delta H(z, y, s) dz$$

$$= \int_{B(x,r_0)} \Delta \mathscr{E}(r(x, t), t-s) H(z, y, s) dz,$$

因为 $H(z, y, s) > 0$,所以剩下只需要证明

$$\tilde{\Delta} \mathscr{E}(r(x, z), t-s) \geqslant \Delta \mathscr{E}(r(x, z), t-s)$$

用在 x 的正规坐标,(r, ξ), $\xi \in s^{n-1}$,

$$\tilde{\Delta} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - m(r) \frac{\partial}{\partial r}, \quad m(r) = \frac{d \log \sqrt{\tilde{g}}}{dr}$$

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - m(r, \xi) \frac{\partial}{\partial r}, m(r, \xi) = \frac{d \log \sqrt{g}}{dr}$$

因为M的 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)k$, 由体积的比较定理可知

$$m(r, \xi) \leqslant m(r),$$

所以

$$-m(r, \xi) \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r} \leqslant -m(r) \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r}.$$

这里用到 $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r} < 0$,因此

$$\tilde{\Delta} \mathscr{E}(r, t-s) \geqslant \Delta \mathscr{E}(r, t-s).$$

注: 以上的证明未考虑到割迹. 如测地球在割迹内, 则自然

通过；如计及割迹，那么采取一定的极限手续，按着证明的同一思路也可通过，请见 Cheeger-Yau: *Comm Pure and Applied Math.*, Vol. 34(1981).

关于热方程的基本解，以下定理是熟知的，其证明可见：M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math., 194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

定理．设 f_i 是M上的特征函数的一组正交基，λ_i 是其相应的特征值，那么热方程的基本解（heat kemal）可写成

$$H(x, y, t) = \sum e^{-\lambda_i t} f_i(x) f_i(y),$$

特别

$$\sum e^{-\lambda_i t} = \int_M H(x, x, t) dx,$$

当 $t \to +0$ 时

$$H(x,y,t) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}} \sum \phi_i(x, y) t^i.$$

§3. 第一特征值上界估计

设M是紧致的 C^∞ Riemann 流形（可有边界）根据热核函数的谱展开式

$$H(x, y, t) = \sum e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y),$$

其中 φ_i 是相应 λ_i 的特征函数，$\Delta\varphi_i = -\lambda_i \varphi_i$，$\varphi_i|_{\partial M} = 0$，$\int \varphi_i \varphi_j = \delta_{ij}$．$L^2(M) = \oplus(\varphi_i)$．本节的目的是在$M$的曲率的一定假设下，给出 λ_1 尽可能精确的上界估计．

上界估计的基本结果是 S. Y. Cheng (*Math, Z.*, 143, 289—297 (1975)) 的工作．在该文中 Cheng 建立了对第一特征值的比较定理．在前文中我们已经有了关于热核函数的比较定理，Cheng 的特征值比较定理就很容易导出了：

定理 (S. Y. Cheng)．设M是完备的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)k$，$n = \dim M$．以 $B(x_0, r)$ 表示M中以

x_0 为中心，r 为半径的测地球；再以 $V(k, r)$ 表示单连通的 n 维具常曲率 k 的空间形式中半径为 r 的测地球，则对 Dirichlet 边界条件而言

$$\lambda_1(B(x_0, r)) \leqslant \lambda_1(V(k, r)).$$

证明：分别记 $B(x_0, R)$ 的热核函数为 $H(x, y, t)$，$V(k, r)$ 的热核函数为 $\mathscr{E}(d(x, y), t)$。按热核的谱展开

$$H(x, x, t) = \sum e^{-\lambda_i t}\phi_i^2(x),$$
$$\mathscr{E}(0, t) = \sum e^{-\bar{\lambda}_i t}\bar{\phi}_i^2(0).$$

由热核比较定理

$$H(x, x, t) \geqslant \mathscr{E}(0, t),$$

即

$$e^{-\lambda_1 t}[\varphi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\varphi_2^2(x) + \cdots]$$
$$\geqslant e^{-\bar{\lambda}_1 t}[\bar{\varphi}_1^2(0) + \bar{\varphi}_2^2(0)e^{-(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)t} + \cdots],$$

所以

$$\varphi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\varphi_2^2(x) + \cdots$$
$$\geqslant e^{-(\bar{\lambda}_1-\lambda_1)t}[\bar{\varphi}_1^2(0) + e^{-(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)t}\bar{\varphi}_2^2(0) + \cdots].$$

由于 $\varphi_1(0)$ 和 $\bar{\varphi}_1(x)$ 都是第一特征函数，$\varphi_1(x) > 0$，$\bar{\varphi}(x) > 0$。而且 $\lambda_m > \lambda_1 (m \geqslant 2)$。令 $t \to \infty$，得

$$\lambda_1 \leqslant \bar{\lambda}_1.$$

证毕。

定理 (S. Y. Cheng). 设 M 是 n 维紧 Riemann 流形，$\mathrm{Ricci}(M) \geqslant (n-1)k$，则

$$\lambda_m(M) \leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right),$$

其中 $d = M$ 的直径，$V\left(k, \frac{d}{2m}\right)$ 表 n 维截面率为 k 的空间形式中半径为 $\frac{d}{2m}$ 的球。

证明：可以找到 $x_1, \cdots, x_{m+1} \in M$，使 $B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)$ 两两不相交，设 φ 是 $V\left(k, \frac{d}{2m}\right)$ 上的第一特征函数，熟知它只与径向有关。设

$\varphi_i = \varphi \circ r_i$，其中 r_i 为相对于 x_i 的 M 中的距离函数，则由上述定理

$$\int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\nabla \varphi_i|^2 \leqslant \lambda_1\left(B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)\right) \int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\varphi_i|^2$$

$$\leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right) \int_{B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)} |\varphi_i|^2,$$

将 φ_i 零扩充到 $B\left(x_i, \frac{d}{2m}\right)$ 以外，显然存在 $a_1, \cdots, a_{m+1}$（常数）使 $\sum a_i \varphi_i \neq 0$，$\sum a_i \varphi_i \perp \{\phi_0, \cdots, \phi_{m-1} | \Delta \phi_j = -\lambda_j \phi_j\}$，由此根据极小极大原理，

$$\lambda_m(M) \int_M \left(\sum a_i \varphi_i\right)^2 \leqslant \int_M \left|\sum a_i \nabla \varphi_i\right|^2$$

$$= \int_M \sum a_i^2 |\nabla \varphi_i|^2$$

$$\leqslant \lambda_1\left(V\left(k, \frac{d}{2m}\right)\right) \int_M \left(\sum a_i \varphi_i\right)^2,$$

所以

$$\lambda_m(M) \leqslant \lambda_1\left(k, \frac{d}{2m}\right).$$

系. $m = 1$，有 $\lambda_1(M) \leqslant \lambda_1\left(k, \frac{d}{2}\right)$.

S. Y. Cheng 具体估计了空间形式中球的第一特征值：

1）如 $\mathrm{Ricci}(M) \geqslant 0$，则 $\lambda_1 \leqslant \frac{C_n}{d^2}$，其中 C_n 可取 $2n(n+4)$。

2）如果 $\mathrm{Ricci}(M) \geqslant n-1$，则 $\lambda_1 \leqslant \frac{n\pi^2}{d^2}$.

3）如果 $\mathrm{Ricci}(M) \geqslant (n-1)(-k)$，$k > 0$，则

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{4} k + \frac{C_n}{d^2}.$$

§4. 第一特征值下界估计

给出特征值的精确下界估计通常较估计上界更为困难。

对于单连通的完备、非紧 Riemann 流形，一个重要问题是，在

何种条件下 $\lim\limits_{R\to\infty}\lambda_1(B(x_0, R))$ 存在？并给出明显的表达式？这方面我们有下述 Mckean 定理：

定理 (Mckean)．如果M是完备非紧 Riemann 流形，其截面曲率 $\leqslant -C<0$，那么 λ_1 有正的下界，且该下界仅依赖于常数 C.

证明：根据第一特征值与 Cheeger 的等周常数 h_D 的关系，有

$$\lambda_1(B(x_0, R)) \geqslant \frac{1}{4} h_D^2(B(x_0, R)),$$

因此，只要证 $h_D(B(x_0,R)) >$ 正常数即可.

任取 $\Omega \Subset M$，$x_0\in \Omega$，令 $r(x)=\mathrm{dist}(x, x_0)$．因为$M$的曲率为负，$r$ 是可微分函数(除点 x_0 外)，

$$\mathrm{Area}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \geqslant \int_{\partial\Omega} \frac{dr}{d\eta} = \int_{\Omega} \Delta r,$$

其中不等号是因为 $|dr|=1$，$\frac{dr}{d\eta}<1$，η 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向．最后式是 Stokes 公式.

但熟知，当截曲率 $\leqslant -C$ 时，

$$\Delta r \geqslant \frac{n-1}{r} + C_a, \quad C_a>0,$$

因而

$$\mathrm{Area}(\partial\Omega) \geqslant C_a\int_{\Omega} 1 = C_a\mathrm{Vol}(\Omega),$$

所以

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4} C_a^2.$$

下面来研究紧致流形的情况．对于 R^n 中带边界的域 (domain)，其第一特征值的估计是一个历史悠久的问题．其中代表工作有 Fabér -Krahn, Polya-Szegö, Payne, Weinberger 等．对于一般的无边界紧致 Riemann 流形，在一定的曲率假设下给出第一特征值的下界估计，这一方面第一个重要工作属于 Lichnerowicz. 1958 年他首先建立了下述定理：

定理 (Lichnerowicz)．如M是紧致无边 Riemann 流形，其

$\mathrm{Ricci}(M) \geqslant (n-1)k > 0$，则第一特征值满足

$$\lambda_1 \geqslant nk.$$

1962 年 Obata 证明，如果上式等号成立，则M等距于常曲率k的球面 S^n.

以后，Cheeger 给出了 λ_1 的下界估计，其中涉及到他所定义的某些等周常数. 在此基础上，Yau 给出了用更便于计算的几何量，例如直径、体积、Ricci 曲率下界，来估计 λ_1 的下界的方法. 从 1979 年开始，Li 与 Yau 发展了对第一特征函数进行梯度估计来求得 λ_1 的下界的有效方法(当 $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ 时，Li 在他的论文中得出此结果). 1980 年他们证明了以下结果:

定理 (Li-Yau).

1) 设M是紧致 Riemann 流形，$\partial M = \varnothing$，$\mathrm{Ricci} \geqslant 0$，则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2}$$

其中 d 为M的直径.

2) 设M是紧致 Riemann 流形，$\partial M = \varnothing$，$\mathrm{Ricci} \geqslant -(n-1)K$ $(K > 0)$，则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\exp\{-[1+(1+2C^2d^2K)^{1/2}]\}}{Cd^2},$$

其中C为仅依赖于n的常数，d为M的直径.

3) $\partial M = \varnothing$，$\mathrm{Ricci} \geqslant 0$，$\partial M$是凸的(即 ∂M 的第二基本形是非负的)，则对 Neumann 边界条件而言，其第一特征值 η_1 满足

$$\eta_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2},$$

其中 d 为M的直径.

现在我们来讨论用梯度估计以求得第一特征值下界的 P. Li-Yau 方法.

设M是紧致的不带边界的 Riemann 流形，其 Ricci 曲率 $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$. 设 u 是对应于 λ_1 的第一特征函数，因为 $\int_M u = -\frac{1}{\lambda_1}\times$

$\int_M \Delta u = 0$，所以无妨设

$$1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1,\quad 1 \geqslant k > 0.$$

引理 1. 如 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，则

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(k+u).$$

证明：令

$$\tilde{u} = \frac{u - \dfrac{1-k}{2}}{\dfrac{1+k}{2}},$$

则

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = -\lambda_1(\tilde{u} + a),\ a = \dfrac{1-k}{1+k},\ 1 > a \geqslant 0, \\ \max\tilde{u} = 1, \\ \min\tilde{u} = -1. \end{cases}$$

取 ε 充分小，令 $v = \dfrac{\tilde{u}}{1+\varepsilon}$，则

$$\begin{cases} \Delta v = -\lambda_1(v + a_\varepsilon),\ a_\varepsilon = \dfrac{a}{1+\varepsilon}, \\ \max v = \dfrac{1}{1+\varepsilon}, \\ \min v = -\dfrac{1}{1+\varepsilon}. \end{cases}$$

考虑函数

$$F(x) = \frac{|\nabla v|^2}{1 - v^2}.$$

对 $F(x)$ 应用极大值原理. 设 $F(x)$ 在 $x_0 \in M$ 处达到极大值，则 $\nabla F(x_0) = 0$，$\Delta F(x_0) \leqslant 0$. 由 $\nabla F(x_0) = 0$，得

$$\sum_j v_j v_{ji} = \frac{|\nabla v|^2(-v)v_i}{1-v^2},\ \forall i. \tag{1}$$

又

$$0 \geqslant \Delta F(x_0) = \frac{2\sum\limits_{ij} v_{ij}^2 + 2\sum v_i v_{jji}}{(1-v^2)^2} - \frac{4\sum v_j v_{ji} v_i}{(1-v^2)^2}(-2v)$$

$$+\frac{|\nabla v|^4(-2)+|\nabla v|^2(-2v)\Delta v}{(1-v^2)^2}+2\frac{|\nabla v|^4(-2v)^2}{(1-v^2)^3}. \quad (2)$$

(1)代入(2),得,在 x_0 点

$$0\geqslant 2\sum_{i,j}v_{ij}^2+2\sum_{i,j}v_jv_{jii}$$
$$-\frac{|\nabla v|^4(-2)+|\nabla v|^2(-2v)\Delta v}{(1-v^2)}.$$

由 Ricci 等式

$$\sum v_jv_{jii}=\sum v_jv_{iji}=\sum v_jv_{iij}+\sum_{ijk}v_jv_kR_{kiji}$$
$$=\sum v_j(\Delta v)_j+\mathrm{Ric}(\nabla v,\nabla v)$$
$$\geqslant -\lambda_1|\nabla v|^2.$$

在 x_0 取坐标架,使 $v_j=0\ (j\neq 1)$,由(1)

$$\sum v_{ij}^2\geqslant\sum v_{i1}^2\geqslant v_{11}^2=\frac{|\nabla v|^4v^2}{(1-v^2)^2}.$$

(此式在 $v_1\neq 0$ 时推得,如 $v_1=0$,则 $\nabla v=0$,此式更无问题.)将以上结果综合起来,得

$$\frac{2|\nabla v|^4v^2}{(1-v^2)^2}-2\lambda_1|\nabla v|^2\leqslant\frac{-2|\nabla v|^4-2v\Delta v|\nabla v|^2}{1-v^2},$$

$$\frac{|\nabla v|^2v^2}{1-v^2}-\lambda_1(1-v^2)\leqslant-|\nabla v|^2+\lambda_1v(v+a_\varepsilon),$$

$$\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}(x_0)\leqslant\lambda_1(1+a_\varepsilon v)\leqslant\lambda(1+a_\varepsilon), \quad (*)$$

因此,$\forall x\in M$,都有

$$|\nabla v|^2\leqslant\lambda_1(1+a_\varepsilon)(1-v^2).$$

以 $v=\left(u-\frac{1-k}{2}\right)\Big/(1+\varepsilon)\frac{1+k}{2}$, $a_\varepsilon=\frac{1-k}{1+k}\frac{1}{1+\varepsilon}$ 代入,再令 $\varepsilon\to 0$,即

$$|\nabla u|^2\leqslant\frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(u+k).$$

定理 (P. Li-Yau). 设M为紧致的 Riemann 流形,$\partial M=\varnothing$,$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$. 又$d$表$M$的直径,则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2.$$

证明：取第一特征函数 u，根据上述引理我们有梯度估计

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(u+k),$$

其中

$$1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1.$$

取 $x_1, x_2 \in M$，使 $u(x_1) = \sup u = 1$，$u(x_2) = \inf u = -k$. 用极小测地线 Γ 连接 x_1, x_2，则

$$\pi = \int_{-k}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(k+u)}} \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_1}{1+k}} \int_{x_1}^{x_2} ds \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_1}{1+k}}\, d,$$

即

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1+k}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 > \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{d^2}.$$

在以上方法的基础上，最近钟家庆与杨洪苍将定理改进为 $\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{d^2}$，得到了这一问题的最佳估计.

设 M 为紧致 Riemann 流形，$\partial M = \varnothing$，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，仍设 u 为第一特征函数.

$$-k = \inf u < \sup u = 1,\quad 1 \geqslant k > 0.$$

令

$$v = \frac{u - \frac{1-k}{2}}{\frac{1+k}{2}(1+\varepsilon)},\qquad a = \frac{1-k}{1+k},$$

则 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = -\lambda_1(v + a_\varepsilon), \\ \sup v = \dfrac{1}{1+\varepsilon},\quad \inf v = \dfrac{-1}{1+\varepsilon}, \end{cases}$$

$$a_\varepsilon = \frac{a}{1+\varepsilon}.$$

令 $v = \sin\theta$，则$-\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \sin\theta \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}$，而

$$\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2} = |\nabla\theta|^2.$$

定义函数 $$F(\theta) = \max_{\substack{x \in M \\ \theta(x)=\theta}} |\nabla\theta|^2 = \max_{\substack{x \in M \\ \theta(x)=\theta}} \frac{|\nabla v|^2}{1-v^2},$$

显然 $F(\theta)$ 是$\left[-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta\right] \to R$ 的连续函数，其中 δ 满足 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}$，并且

$$F\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right) = F\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = 0.$$

采用这种术语，引理1(特别是(*)式)可以改叙述成

引理 2. $F(\theta) \leqslant \lambda_1(1+a_\varepsilon)$，$a_\varepsilon = \frac{a}{1+\varepsilon}$，$a = \frac{1-k}{1+k}$.

从 Li-Yau 定理的证明可见，如 $k=1$，即 $a=0$，那么 $\lambda_1 \geqslant \left(\frac{\pi}{d}\right)^2$ 的结果已有．因此，我们下面假定 $1 > a > 0$.

下一步是求出关于 $F(\theta)$ 较引理 2 更为精确的估计，为此，设

$$F(\theta) = \lambda_1(1+a_\varepsilon\varphi(\theta)), \tag{2}$$

其中 $\varphi(\theta)$ 是$\left[-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta\right] \to R$ 的连续函数．因为F在区间两端为零，因此有

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right) < -1,$$

而引理 1 此时可叙述成

$$\varphi(\theta) \leqslant 1.$$

定义. C^2 类函数 $\phi(\theta)$ 称为 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta\right)$ 的闸 (barrier) 函数，如果

$$\begin{cases}\varphi(\theta)\leqslant\psi(\theta), & \forall\theta,\\ \varphi(\theta_0)=\psi(\theta_0),\\ \psi'(\theta_0)\geqslant 0,\end{cases}$$

于是,我们有下述两个引理:

引理 3. 如果 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 θ_0 的闸函数,则有

$$\varphi(\theta_0)\leqslant\sin\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0 y'(\theta_0)+\frac{1}{2}\cos^2\theta_0 y''(\theta_0). \tag{3}$$

引理 4. 定义函数 $\psi(\theta)$ 为

$$\psi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\frac{4}{\pi}(\theta+\cos\theta\sin\theta)-2\sin\theta}{\cos^2\theta}, & \theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ \psi\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1,\end{cases} \tag{4}$$

则 $\psi(\theta)$ 满足 $\psi'(\theta)\geqslant 0$,并且

$$\psi-\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\psi'-\frac{1}{2}\cos^2\theta\psi''=0. \tag{5}$$

引理 4 的证明是直接验证,引理 3 的证明我们留待后面.现在我们从这些引理出发来讨论本节的主要结果:

定理(钟家庆-杨洪苍). 设M为无边的紧 Riemann 流形,$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$,则

$$\lambda_1\geqslant\frac{\pi^2}{d^2}.$$

证明:记 $F(\theta)=\lambda_1(1+a_\varepsilon\varphi(\theta))$,同时记 $\psi(\theta)$ 为公式(4)中函数,则我们有以下断定:

$$\varphi(\theta)\leqslant\psi(\theta). \tag{6}$$

这是因为,如果(6)不成立,那么因为 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<-1$,而 $\psi'(\theta)\geqslant 0$, $\psi(\theta)\geqslant\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$,所以存在 $\theta_1\in\left(-\frac{\pi}{2}+\delta,\frac{\pi}{2}-\delta\right)$,使

$$\varphi(\theta_0) - \phi(\theta_0) = \max_{\theta\in\left[-\frac{\pi}{2}+\delta,\frac{\pi}{2}-\delta\right]} (\varphi(\theta) - \phi(\theta)) = b > 0. \qquad (7)$$

因此，$\phi(\theta)+b$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 θ_0 的闸函数．根据引理 3，有

$$\begin{aligned}\varphi(\theta_0) &\leqslant \sin\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0(\phi+b)' + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0(\phi+b)'' \\ &= \sin\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0\phi'(\theta_0) + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0\phi''(\theta_0) \\ &= \phi(\theta_0).\end{aligned}$$

最后一步是根据引理 4 得出的，这与(7)矛盾．因而断言(6)成立．这样我们就有

$$F(\theta) \leqslant \lambda_1(1+a_\varepsilon\varphi(\theta)) \leqslant \lambda_1(1+a_\varepsilon\phi(\theta)),$$

即
$$|\nabla\theta|^2 \leqslant \lambda_1(1+a_\varepsilon\phi(\theta)).$$

在M上取 x_1，x_2，使 $\theta(x_1)=\frac{\pi}{2}-\delta$，$\theta(x_2)=-\frac{\pi}{2}+\delta$，用极小测地线 γ 连接 x_1 和 x_2，有

$$\lambda_1^{1/2}d \geqslant \lambda_1^{1/2}L(\gamma) = \int_\gamma \lambda_1^{1/2}ds \geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{1+a_\varepsilon\phi(\theta)}}.$$

由引理 4，易见 $\phi(0)=0$，$\phi(-\theta)=-\phi(\theta)$，$|a_\varepsilon\phi(\theta)|<1$．因此

$$\begin{aligned}\lambda_1^{1/2}d &\geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{1+a_\varepsilon\phi(\theta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{1+a_\varepsilon\phi(\theta)}}\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{\sqrt{1-a_\varepsilon\phi(\theta)}}\right]d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(4k-1)}{2\cdot 4\cdots(4k)}a_\varepsilon^{2k}\phi^{2k}\right)d\theta \\ &\geqslant \pi - 2\delta.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，因而 $\delta\to 0$，即有$\sqrt{\lambda_1}\geqslant\frac{\pi}{d}$．定理证毕．

现在剩下的唯一问题是验证引理 3．证明引理 3 的方法是再一次应用极大值原理．

引理3之证明：根据题设 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta_0\in\left(-\frac{\pi}{2}+\delta,\frac{\pi}{2}-\delta\right)$的闸函数．即 $\varphi(\theta)\leqslant y(\theta)$，$\varphi(\theta_0)=y(\theta_0)$，$y'(\theta_0)\geqslant 0$．考虑函数

$$G(x)=\left\{\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}-\lambda_1(1+a_\varepsilon y(\theta(x))\right\}\cos^2\theta(x),\qquad(8)$$

因为 $y(\theta)$ 是 $\varphi(\theta)$ 的闸函数，因而

$$G(x)\leqslant 0,\ G(x_0)=0,\ \theta_0=\theta(x_0),$$

即 $G(x)$ 在 x_0 达到极大值，由极大值原理，

$$\nabla G(x_0)=0,\ \Delta G(x_1)\leqslant 0.\qquad(9)$$

注意 $v=\sin\theta$．有

$$v_j=\cos\theta\cdot\theta_j$$

$$\Delta\theta=\frac{\Delta v}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\nabla v\cdot\nabla\theta$$

$$=\frac{-\lambda_1(\sin\theta+a_\varepsilon)}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}|\nabla\theta|^2,\qquad(10)$$

$$\Delta\cos^2\theta=2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)|\nabla\theta|^2-2\sin\theta\cos\theta\Delta\theta$$

$$=2\lambda_1\sin\theta(\sin\theta+a_\varepsilon)-2|\nabla\theta|^2\cos^2\theta.$$

(9) 可写成

$$2\sum v_jv_{ij}=\lambda_1[(1+a_\varepsilon y)(-2\sin\theta\cos\theta)+ay'\cos^2\theta]\theta_i,$$

$$2\sum v_{ij}^2+2\sum v_iv_{ijj}=\lambda_1a_\varepsilon(y''|\nabla\theta|^2+y'\Delta\theta)\cos^2\theta$$

$$-2\lambda_1a_\varepsilon y'(-2\sin\theta\cos\theta)|\nabla\theta|^2-\lambda_1(1+a_\varepsilon y)\Delta\cos^2\theta\leqslant 0.$$

将(10)诸式代入上两式，并应用

$$\left(\sum_{i,j}v_{ij}^2\right)(\sum v_j^2)\geqslant(\sum v_{ij}v_iv_{ij})^2$$

及

$$\sum v_iv_{ijj}=-\lambda_1|\nabla v|^2+\mathrm{Ric}(\nabla v,\nabla v)$$

$$\geqslant-\lambda_1|\nabla v|^2=-\lambda_1\cos^2\theta|\nabla\theta|^2$$

可得，在 x_0 点

$$\frac{1}{2}\lambda_1^2[(1+a_\varepsilon y)(-2\sin\theta)+a_\varepsilon y'\cos\theta]^2-2\lambda_1^2\cos^2\theta(1$$

$$+ a_\varepsilon y) - \lambda_1^2 a_\varepsilon(1 + a_\varepsilon y)y''\cos^2\theta - \lambda_1^2 a_\varepsilon[-\cos\theta(\sin\theta + a_\varepsilon)$$
$$+ \sin\theta\cos\theta(1 + a_\varepsilon y)]y' + \lambda_1^2 a_\varepsilon \cdot 4\cos\theta\sin\theta(1 + a_\varepsilon y)y'$$
$$- \partial\lambda_1^2(1 + a_\varepsilon y)[\sin\theta(\sin\theta + a_\varepsilon) - (1 + a_\varepsilon y)\cos^2\theta] \leqslant 0,$$

消去 $\lambda_1^2 a_\varepsilon$，由上式得到

$$\frac{1}{a_\varepsilon} 2(1 + a_\varepsilon y)[1 + a_\varepsilon y - (1 + a_\varepsilon \sin\theta)]$$
$$+ \frac{1}{2} a_\varepsilon \cos^2\theta y'^2 + \cos\theta\sin\theta(1 + a_\varepsilon y)y'$$
$$+ \cos\theta(\sin\theta + a_\varepsilon)y' - (1 + a_\varepsilon y)y''\cos^2\theta \leqslant 0.$$

因此在 x_0 点

$$y - \sin\theta \leqslant -\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta + a_\varepsilon}{1 + a_\varepsilon y}\cos\theta\right)y'$$
$$+ \frac{1}{2}\cos^2\theta y'',$$

因为 $|y| \leqslant 1$，$0 < a_\varepsilon < 1$，$1 \geqslant y\sin\theta$，$1 + a_\varepsilon y > 0$，

$$\frac{a_\varepsilon + \sin\theta}{1 + a_\varepsilon y} \geqslant \frac{a_\varepsilon y\sin\theta + \sin\theta}{1 + a_\varepsilon y} \geqslant \sin\theta,$$

所以

$$\varphi(\theta_0) = y(\theta_0) \leqslant \sin\theta_0 - \cos\theta_0\sin\theta_0 y'(\theta_0) + \frac{1}{2}\cos^2\theta_0 y''(\theta_0).$$

引理证毕.

定理 (P. Li-Yau). 设M是带边界的紧致 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，$\partial M \neq \varnothing$. 设 ∂M 是凸的(即它对外法线方向而言的第二基本形是正的)，则 Neumann 条件的第一特征值 η_1 满足

$$\eta_1 \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2},$$

其中 d 为M的直径.

证明：如同上面一样，取规格化的第一特征函数 u，

$$\begin{cases} \Delta u = -\eta_1 u, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = 0, \\ 1 = \sup u > \inf u = -k \geqslant -1. \end{cases}$$

考虑函数

$$G(x)=\frac{|\nabla u|^2}{(1+\varepsilon-u)(k+\varepsilon+u)},$$

$G(x)$ 是光滑到边界的函数. 对 $G(x)$ 应用极大值原理. 设 $G(x_0)=\sup G(x)$. 那么 x_0 可有两种情况. 如果 $x_0\in M-\partial M$, 那么和定理(关于 λ_1) 的证明完全一样,可得(令 $\varepsilon\to 0$)

$$|\nabla u|^2\leqslant\frac{2\eta_1}{1+k}(1-u)(u+k),$$

再逐字重复定理证明,即有

$$\eta_1\geqslant\frac{\pi^2}{2d^2}.$$

因此剩下的问题是排除 $x_0\in\partial M$ 的可能性. 设 $x_0\in\partial M$ 达到 $G(x)$ 的极大值. 取 x_0 附近的局部标架 $(e_1,\cdots,e_n)$, 使 $\frac{\partial}{\partial\nu}=e_n$,则因为 $G(x_0)$ 极大

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iu_{in}}{(1+\varepsilon-u)(k+\varepsilon+u)}-\frac{|\nabla u|^2(1-k-2u)u_n}{(1+\varepsilon-u)(k+\varepsilon+u)^2}\geqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_{in}(x)\geqslant 0.$$

由 Hession 及第二基本形的定义,

$$u_{ij}=u_{ji}=H(e_i,e_j)(u)=e_ie_ju(\nabla_{e_i}e_j)u,$$

$$\begin{aligned}u_{in}&=e_ie_nu-(\nabla_{e_i}e_n)u=-(\nabla_{e_i}e_i)u\\&=-(\nabla_{e_i}e_n)^Tu\\&=-\sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle e_ju=-h_{ij}u_j,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_{in}=-\sum_{i,j=1}^{n-1}h_{ij}u_iu_j\geqslant 0.$$

这和 $(h_{ij})>0$ 相矛盾。除非 $u_i=0$, $\forall i$,但此时 $G(x_0)=0$,因而 $G(x)\equiv 0$,即 $\nabla u\equiv 0$。这是不可能的。定理证毕。

下面将去掉 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 的条件，用梯度估计得到的一个结果是

定理 (P. Li-Yau). 设M是紧 Riemann 流形，$\partial M=\varnothing$, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -(n-1)K$ $(K\geqslant 0)$,则

$$\lambda_1\geqslant\frac{\exp\{-[1+(1+4(n-1)^2d^2K)^{1/2}]\}}{(n-1)d^2},$$

其中 $d=M$的直径。

证明：取规格化的第一特征函数 u,设

$1=\sup u$, 取 $\beta>1$,考虑

$$G(x)=\frac{|\nabla u|^2}{(\beta-u)^2}.$$

取极大点 $x_0\in M$, 则 $\nabla G(x_0)=0$, $\Delta G(x_0)\leqslant 0$. 由

$$G(x)(\beta-u)^2=|\nabla u|^2,\qquad \text{得}$$

$$\Delta G\cdot(\beta-u)^2+2\nabla G\cdot\nabla(\beta-u)^2+G\Delta(\beta-u)^2=\Delta|\nabla u|^2,$$

所以在 x_0 点有

$$\begin{aligned}0&\geqslant\Delta|\nabla u|^2-G\Delta(\beta-u)^2\\&=2\sum u_{ij}^2+2\sum u_iu_{ijj}-2G[(\beta-u)(-\Delta u)+|\nabla u|^2]\\&=2\sum u_{ij}^2+2\sum u_i(\Delta u)_i+2\mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)\\&\quad-2G[\lambda_1u(\beta-u)+|\nabla u|^2],\end{aligned}$$

即
$$\sum u_{ij}^2-\lambda_1|\nabla u|^2-(n-1)K|\nabla u|^2-G[\lambda_1u(\beta-u)+|\nabla u|^2]\leqslant 0.$$

在 x_0 选取局部标架，使 $u_i=0$ $(i=2,\cdots,n)$, $u_1=|\nabla u|$, 则 $u_1\neq 0$ (否则 $|\nabla u|=0$, 则 $G(x)=G(x_0)=0$, 这是不可能的). 由 $\nabla G(x_0)=0$, 有

$$\begin{cases}u_{11}=-\dfrac{|\nabla u|^2}{\beta-u},\\u_{1i}=0,\ i\neq 1.\end{cases}\tag{11}$$

注意到 $\displaystyle\sum_{ij=2}^{n}u_{ij}^2\geqslant\sum_{i=2}^{n}u_{ii}^2\geqslant\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=2}^{n}u_{ii}\Big)^2=\frac{1}{n-1}(\Delta u-u_{11})^2$

$$= \frac{1}{n-1}(\lambda u + u_{11})^2 = \frac{1}{n-1}[\lambda^2 u^2 + 2\lambda u u_{11} + u_{11}^2]$$

$$\geqslant \frac{u_{11}^2}{2(n-1)} - \frac{1}{n-1}\lambda^2 u^2, \tag{12}$$

所以

$$\sum_{i,j\geqslant 2} u_{ij}^2 - (\lambda_1 + (n-1)K)|\nabla u|^2 - \lambda_1 G\ u(\beta - u)$$

$$+ u_{11}^2 - G|\nabla u|^2 \leqslant 0.$$

以(11),(12)代入上式,得

$$\frac{1}{2(n-1)}\frac{|\nabla u|^4}{(\beta-u)^2} - \frac{\lambda^2 u^2}{n-1} - (\lambda_1 + (n-1)K)|\nabla u|^2$$

$$-\lambda_1 \frac{|\nabla u|^2 u}{\beta - u} \leqslant 0. \tag{13}$$

如令 $\alpha = \frac{u}{\beta - u}$, 则

$$\alpha \leqslant \frac{1}{\beta - u} \leqslant \frac{1}{\beta - 1}.$$

(13)式可写成

$$\frac{1}{2(n-1)}G^2(x_0) - \frac{\lambda^2}{n-1}\alpha^2 - (\lambda_1 + (n-1)K)G(x_0)$$

$$-\lambda_1 G(x_0)\alpha \leqslant 0.$$

将上式看成关于 $G(x_0)$ 的二次式,易知

$$G(x_0) \leqslant 4(n-1)\left[\lambda + (n-1)K + \frac{\lambda}{\beta - 1}\right]$$

$$= 4(n-1)\left(\frac{\lambda\beta}{\beta-1} + (n-1)K\right).$$

因此,

$$|\nabla u| \leqslant \left[4(n-1)\left(\frac{\lambda\beta}{\beta-1} + (n-1)K\right)\right]^{1/2}(\beta - u),$$

其中 $\beta > \sup u = 1$. 在M上以极小测地线 γ 连接 x_1 和x_2, $u(x_1) = 0$, $u(x_2) = \sup u = 1$,那么

$$\log\frac{\beta}{\beta-1}\leqslant\int_{\gamma}\frac{|\nabla u|}{\beta-u}\leqslant\left[4(n-1)\left(\frac{\beta\lambda_1}{\beta-1}+(n-1)K\right)\right]^{1/2}d,$$

所以

$$\lambda_1\geqslant\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{4(n-1)d^2}\left(\log\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2-(n-1)K\right].$$

取 β_0，使

$$\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{4(n-1)d^2}\left(\log\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2-(n-1)K\right]$$

极大，即得定理的证明。

§5. 高阶特征值的估计

现在我们转向高阶特征值的研究． 从 R^n 中域的 Dirichlet 问题开始．

设 Ω 是 R^n 中的有界域，考虑 Dirichlet 边界条件的特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\phi=-\lambda\phi,\\ \phi|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

利用热核函数和 Tauber 型定理， H. Weyl 于 1912 年首先证明了渐近式

$$\lambda_k\sim C_n\left(\frac{k}{V}\right)^{2/n}\qquad(k\to\infty),$$

其中 $C_n=(2\pi)^2\Big/\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{2/n}$, $\omega_{n-1}=\mathrm{Area}(S^{n-1})$.

在此基础上，Polya (1960) 提出了著名的猜想：对于任意 k，

$$\lambda_k\geqslant C_n\left(\frac{k}{V}\right)^{2/n},\quad V=\mathrm{Vol}(\Omega).$$

Polya 本人在 $n=2$ 时，证明了对一些特殊的平面区域猜想成立．1980 年，E. Lieb 证明存在较 C_n 为小的常数 $\tilde{C}_n$，$\lambda_k\geqslant\tilde{C}_n\left(\frac{k}{V}\right)^{2/n}$.

关于这一问题的最新结果是

定理 (Li-Yau). 对于任何 k，有

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geqslant \frac{nC_n k}{n+2}\left(\frac{k}{V}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

系. 因为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$，所以

$$\lambda_k \geqslant \frac{nC_n}{n+2}\left(\frac{k}{V}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

为了证明定理，首先需要以下引理.

引理. 如 f: $R^n \to R$，满足：1° $0 \leqslant f \leqslant M$，2° $\int_{R^n} f(x)|x|^2 dx \leqslant M_2$，此处 M_1，M_2 为两个正常数，则

$$\int_{R^n} f(x)dx \leqslant \left(M_1 \frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{2}{n+2}} M_2^{\frac{n}{n+2}}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

证明：选择 R_0，使 $\int_{|x|\leqslant R_0} |x|^2 M_1 dx = M_2$.

令

$$g(x) = \begin{cases} M_1, & |x| < R_0, \\ 0, & |x| \geqslant R_0, \end{cases}$$

自然有 $\int_{R^n} |x|^2 g(x)dx = M_2$. 同时

$$\begin{aligned} &(|x|^2 - R_0^2)(f(x) - g(x)) \\ &= \begin{cases} (|x|^2 - R_0^2)(f(x) - M_1) \geqslant 0, & |x| < R_0, \\ (|x|^2 - R_0^2)f(x) \geqslant 0 & |x| \geqslant R_0, \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} R_0^2\int_{R^n} (f(x) - g(x)) &\leqslant \int_{R^n} |x|^2(f - g) \\ &= \int_{R^n} |x|^2 f - \int_{R^n} |x|^2 g = \int_{R^n} |x|^2 f - M_2 \leqslant 0, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} R_0^2\int_{R^n} f dx &\leqslant R^2\int_{R^n} g = M_1 R_0^2 \mathrm{Vol}(B(R_0)) \\ &= \frac{M_1}{n} R_0^{n+2}\omega_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\int_{R^n} f(x)dx \leqslant \frac{M_1}{n} R_0^n \omega_{n-1}.$$

由 $$M_2=\int_{R^n}|z|^2g=M_1\omega_{n-1}\int_0^{R_0}r^{n+1}dr$$

决定 R_0，解得 $R_0=\left(\frac{M_2}{M_1}\frac{n+2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n+2}}$，代入上式即得引理的证明.

现在回到 Li-Yau 定理的证明.

设 $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ 是相应于 $\{\lambda_i\}$ 的正交特征函数. 令

$$\Phi(x,y)=\sum_{i=1}^k\phi_i(x)\phi_i(y),$$

记 $\Phi(x,y)$ 对 x 的 Fourier 变换为 $\hat{\Phi}(z,y)$，即

$$\hat{\Phi}(z,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\Phi(x,y)e^{ix\cdot z}dx.$$

由 Planchel 公式

$$\int_{R^n}\Phi^2(x,y)dx=\int_{R^n}|\hat{\Phi}(x,y)|^2dz,$$

所以，一方面

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\int_{R^n}|\hat{\Phi}(z,y)|^2dzdy&=\int_{R^n}\int_{R^n}\Phi^2(x,y)dxdy\\&=\int_{\Omega\times\Omega}\Phi^2(x,y)dxdy\\&=\sum\int_\Omega\phi_i(x)\phi_i(x)dx\int_\Omega\phi_i(y)\phi_i(y)dy=k,\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_{R^n}|\hat{\Phi}(z,y)|^2dy&=\int_\Omega(2\pi)^{-n}\left|\int_{R^n}\phi(x,y)e^{ix\cdot z}dx\right|^2dy\\&=\int_\Omega(2\pi)^{-n}\left|\int_\Omega\phi(x,y)e^{ix\cdot z}dx\right|^2dy.\end{aligned}$$

因为 $f\to Tf=\int_\Omega\Phi(x,y)fdx$，是 $L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 中由 $\{\phi_1,\cdots,\phi_k\}$ 张成的子空间的投影变换，所以

$$\|f\|^2\geqslant\|Tf\|^2,$$

即

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_\Omega\left|\int_\Omega \Phi(x, y)e^{iz\cdot x}dz\right|^2 dy$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_\Omega\int_\Omega |e^{iz\cdot x}|^2 dz dy$$

$$= (2\pi)^{-n}V.$$

同时，由 Fourier 变换熟知性质

$$\left(\widehat{i\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi}\right)(z, y) = z_j\hat{\Phi}(z, y),$$

由 Planohei 公式$\int_{R^n}\int_\Omega |z|^2|\hat{\Phi}|^2(z, y)dydz$

$$= \int_{R^n}\int_\Omega |\widehat{\nabla_x\Phi}|^2 dydx$$

$$= \int_{R^n}\int_\Omega |\nabla_x\Phi|^2(x, y)dydx$$

$$= -\int_\Omega\int_\Omega \Phi(x, y)\Delta_x\Phi(x, y)dydx = \sum\lambda_i.$$

将引理应用于

$$F(z) = \int_\Omega |\hat{\Phi}(z, y)|^2 dy,$$

其中 $M_1 = (2\pi)^{-n}V$，而 $M_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i$，即得定理.

在第二节及第三节中我们看到热核函数与 Laplace 算子的特征值和特征函数有着密切的关系. 下面我们将给出郑绍远及 Peter Li 利用热核来估计流形上高阶特征值下界的方法.

设 $\{\varphi_i\}$ 是由特征函数构成的一组正交基. 相应的特征值为 $\{\lambda_i\}$，那么我们知道热核 $H(x, y, t)$ 可表成

$$H(x, y, t) = \sum_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

根据热核的半群性质有

$$H(x, y, t) = \int_M H(x, z, s)H(z, y, t-s)dz, \quad 0 < s < t.$$

因此

$$H(x, x, 2t) = \int H(x, z, t)^2 dz.$$

另一方面

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M H(x, z, t)^2 dz = 2\int_M H(x, z, t)\Delta H(x, z, t) dz$$

$$= -2\int |\nabla_z H(x, z, t)|^2 dz$$

$$\leqslant -2C\left(\int |H(x, z, t)|^{\frac{2n}{n-2}} dz\right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

其中最后一式是 Sobolev 不等式，C 为M的 Sobolev 常数。

因为 $\forall 0 < t$ 有$\int H(x, z, t) dz \leqslant 1$，所以

$$\left(\int_M |H(x, z, t)|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \geqslant \left(\int_M H(x, z, t)^2 dz\right)^{\frac{2+n}{n}}.$$

注意到 $\lim\limits_{t\to 0} H(x, x, t) = \infty$，根据以上几式我们得到

$$H(x, x, 2t) \leqslant \left(\frac{4}{n} Ct\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

将上式积分，注意 $\lambda_i \leqslant \lambda_k$，当 $i < k$ 时，得到

$$k e^{-2\lambda_k t} \leqslant \sum e^{-2\lambda_i t} \leqslant \left(\frac{4}{n} Ct\right)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M).$$

令 $2\lambda_k t = \frac{n}{2}$，上式成为

$$k e^{-\frac{n}{2}} \leqslant \left(\frac{C}{n} \cdot \frac{n}{\lambda_k}\right)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M),$$

于是

$$\lambda_k \geqslant \frac{C}{e} \cdot \left[\frac{k}{\mathrm{Vol}(M)}\right]^{\frac{2}{n}}.$$

§6. 结点（nodal）集与特征值的重数

在特征值的研究中，极小极大原理有着基本的重要性。在前面我们已经看到它对估计特征值的意义。本节将展示它的另一应用，这就是 Courant 结点域定理与关于 Riemann 曲面特征值重

数估计的 S. Y. Cheng 定理。

设M是紧致带边界的 Riemann 流形(可能$\partial M=\varnothing$)。我们将讨论两类特征值问题：

1° $\partial M=\varnothing$，此时特征值$0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$。

2° $\partial M\neq\varnothing$，边界条件为 Dirichlet 条件，$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots$。

定义．设f是M上某一椭圆型方程的解，$f^{-1}(0)\subset M$ 称为f的结点集．开集 $M\backslash f^{-1}(0)$ 的任一连通分支称为f的一个结点域．

如果f是 Laplace 算子的特征函数，那么因为在每个结点域中f具有相同的符号，所以f对任一结点域而言是满足 Dirichlet 边界条件的第一特征函数．这样就可能将涉及第i个特征值的问题化为第一特征值问题讨论．

结点集的整体结构一般十分复杂，还有待人们去研究．而研究其内部结构的根据是 L. Bers 关于线性椭圆型方程解的局部性状的结果 (Comm. Pure and Applie Math., 8(1955)473—496)。

定理 (Lipman Bers)．设

$$L\phi(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\phi(x)=0$$

是在原点($\in R^n$)附近的C^∞系数的椭圆型方程．$\phi(x)$是它的解．ϕ在原点的零点重数为N，则在原点附近

$$\phi(x)=P_N(x)+O(|x|^{N+\varepsilon}),\quad 0<\varepsilon<1,$$

其中 $P_N(x)$ 是阶为N的齐次多项式．满足

$$\sum a_{i_1\cdots i_n}(0)\frac{\partial^m P_N(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=0.$$

将此结果用于 Riemann 流形特征函数的结点集．由 N. Aronszajn 关于 Riemann 流形上二阶椭圆型方程的唯一性定理，任何非零特征函数其零点均是有限阶的，如 $P\in f^{-1}(0)$，采用P点的正规坐标，则在P点附近，$f(x)$可以表示成

$$f(x)=P_N(x)+O(|x|^{N+\varepsilon}),$$

其中 P_N 是阶为N的球调和多项式，即满足

$$\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}P_N(x)=0$$

的N次多项式，不仅如此，尚可进一步证明，在P点附近，存在一个C^1-微分同胚Φ，使

$$f(x)=P_N(\Phi(x)).$$

利用这些准备，S. Y. Cheng 证明了以下关于结点集的局部性状定理：

定理 (S. Y. Cheng). 设M是n维 C^∞ Riemann 流形，如$f\in C^\infty(M)$，满足 $(\Delta+h(x))f=0$, $h\in C^\infty(M)$，则除去一低维($\dim<n-1$) 闭集外，$f^{-1}(0)$ 组成$n-1$维 C^∞-流形.

证明：用归纳法，$n=1$是明显的. 设定理对$n-1$维正确，现在考虑n维情况，由上已知就局部而言 $f^{-1}(0)\sim P_N^{-1}(0)$，其中"$\sim$"表 C^1-微分同胚. 如果 $N=1$, $P_1^{-1}(0)$ 显然是 $C^\infty-(n-1)$维流形.

如果 $N>1$，则由P_N的齐次性

$$P_N^{-1}(0)=\{tx;t>0,P_N|_{S^{n-1}}(x)=0\}.$$

但熟知 $P_N|_{S^{n-1}}$ 是 S^{n-1}的特征函数，当 $N>1$时，P_N非S^{n-1}的第一特征函数，它在 S^{n-1}上必有零点，因此 $P_N^{-1}(0)$ 以原点为奇点，根据归纳法，$P_N^{-1}(0)$ 除去一低维闭集 $A(\dim A<n-1)$ 处是光滑的，即 $f^{-1}(0)\backslash\Phi^{-1}(A)=M_0$ 是$n-1$维 C^1-流形(其中Φ是上文所述的 C^1-微分同胚). 下证M_0是C^∞的.

设 $y_0\in M_0$，则 $f(y_0)=0$, $\Phi(y)\bar{\in}A$，利用上述同样的论证于y_0的局部，则在y_0的附近，$f(x)\sim P_{N'}(x)$，其中 $P_{N'}$是N'次球调和函数.

下证 $N'=1$. 如果$N'>1$，那么前面已经证明，0是 $P_{N'}^{-1}(0)$的奇点，而在y附近M_0与 $P_{N'}^{-1}(0)$ 是 C^1-微分同胚，因而y也是M_0的奇点，导致矛盾.

因此 $N'=1$，但因 $f(x)\sim P_{N'}(x)$，所以 $df|_{y_0}\neq0$, M_0 在y_0局部是 C^∞ 的. 证毕.

系. 如M是紧致的 Riemann 曲面. f是任一特征函数，则f的结点集具有以下性质：

1° 结点集由有限条 C^2-immersed circles 组成 (所谓 C^2-

immersed circle 指 $\Phi(S^1)$，其中 $S^1 \to M$ 是浸入)。

2° 结点线上的临界点是孤立的。

3° 当结点线相交时，它们是周角的分角线。

证明：只要注意到，当结点线相交时，在交点附近与 R^2 中球调和多项式的结点集是 C^1-微分同胚。如果 $P_N(x, y)$ 是 R^2 上的球调和多项式，令 $z = x + \sqrt{-1}\ y$，则 $P_N(z)$ 是 $\mathrm{Re} z^N$ 和 $\mathrm{Im} z^N$ 的实线性组合，则 $P_N|_{S^1}$ 上是 $\cos N\theta$ 与 $\sin N\theta$ 的线性组合。其零点将 S^1 均分成 $2N$ 等分。而 $P_N^{-1}(0) = \{tx \mid x > 0, P_N|_{S^1}(x) = 0\}$。因此 $P_N^{-1}(0)$ 由通过 0 点的 $2N$ 条等分周角的直线组成。在指数映射下，这些直线映成等角的基点出发的测地线。

下面证明 Courant 的结点域定理。

定理．设 M 是紧致的 C^∞ 流形，λ_i 表其第 i 个特征值，则

1° 如果 $\partial M \neq \varnothing$，则 λ_i 的结点域的个数 $\leqslant i$。

2° 如果 $\partial M = \varnothing$，则 λ_i 的结点域个数 $\leqslant i + 1$。

证明：只考虑 $\partial M \neq \varnothing$ 的情况，而 $\partial M = \varnothing$ 的情况完全类似。设 ϕ_i 是 M 的第 i 个特征函数，又设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_{i+1} \cdots$ 是 ϕ_i 的结点域，定义 $(j \leqslant i)$

$$\phi_i^j = \begin{cases} \phi_i, \text{在 } \Omega_j \text{ 中}, \\ 0, \text{在 } \Omega_j \text{ 外}. \end{cases}$$

因 $\dim\{\phi_i^1, \cdots, \phi_i^i\} > \dim\{\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}\}$，可以找到不全为零的实数 $a_1, \cdots, a_i$，满足

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_i^j \perp \{\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}\},$$

根据极小极大原理，

$$\lambda_i \leqslant \frac{\int |\nabla\phi|^2}{\int \phi^2} = \frac{\sum_{j=1}^{i} a_j^2 \int_{\Omega_j} |d\phi_i|^2}{\sum a_j^2 \int_{\Omega_j} \phi_i^2},$$

根据前面的定理，除去一低维点集外，ϕ_i 的结点集由 $n-1$ 维 C^∞ 流形组成。因此由 Stokes 公式

$$\int_{\Omega_j}|d\phi_i|^2=\int_{\Omega_j}-\Delta\phi_i\phi_i=\lambda_i\int_{\Omega_j}\phi_i^2,$$

所以

$$\frac{\int_M|d\phi|^2}{\int\phi^2}=\lambda_i.$$

因此，ϕ 是 C^∞ 的．并满足 $\Delta\phi+\lambda_i\phi=0$。如果结点域多于 i 个，则因 $\phi|_{\Omega_{i+1}}=0$，可得 $\phi\equiv0$ 在M上，得到矛盾。

系. 1° 当 $\partial M\neq\varnothing$ 时，第一特征函数在M中不改变符号，即 ϕ_1 的结点域的个数$=1$；而 $\phi_2\perp\phi_1$，ϕ_2 在M中必改变符号．所以 ϕ_2 的结点数 $=2$.

2° 当 $\partial M=\varnothing$ 时，因$\int_M\phi_1=0$，ϕ_1 必改变符号，因此，ϕ_1 的结点域的个数 $=2$。

因为对 Riemann 面而言，其结点集的结构相对比较简单，根据 Courant 结点域定理，可以获得关于特征值重数的信息，为此，我们首先需要以下拓扑引理：

引理. 设M是紧致 Riemann 曲面，其亏格为 g。$\phi_j:S^1\to M$($1\leqslant j\leqslant 2g+t$, $t\geqslant1$) 是 M 上的 C^1 闭曲线．并且 $\phi_i(S^1)\cap\phi_k(S^1)$, $i\neq k$, 仅由有限个点组成，则 $M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+t}(S^1)$ 至少是 $t+1$ 连通的.

证明：从以下的证明过程可见，只需证 $t=1$ 的情况即可，即要证$M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$ 不是单连通的.

M的亏格数为 g，熟知 $\dim H(M,Z)=2g$，因此存在不全为零的 $n_j\in Z(j=1,\cdots,2g+1)$ 使 $\sum n_j\phi_j\sim0$，无妨假定 $n_1\neq0$，根据假定，存在 $x_0\in\phi_1(S^1)$ 使 ϕ_1 在 $\phi_1^{-1}(x_0)\in S^1$ 的局部是 C^1-微分同胚．同时 $x_0\bar{\in}\phi_2(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$. 在$M$上作过 x_0 与 ϕ_1 相垂直(在 x_0) 的，同时与 $\phi_2(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$不相交的 C^1 曲线 α，即 $\alpha:(-1,1)\to M$，使

$$\alpha|_{(-1,1)} \cap (\phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1))$$
$$= \{\alpha(0)\} = \{x_0\}.$$

如果 $M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$ 是单连通的，那么可以找到 C^1 曲线 $\beta:[-1,1]\to M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$，使 $\beta(-1)=\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\beta(1)=\alpha(1)$. 连接 $\alpha|_{[-1/2,1/2]}\cup\beta|_{[-1,1]}$ 就得到一条在 x_0 与 $\phi_1(S^1)$ 正交，除 x_0 外全在 $M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup_{2g+1}(S^1)$ 内的闭曲线. 在曲线 $\phi_1(S^1)$ 点 x_0 的邻域都如法炮制. 这样我们就得到一个单 C^1 映射

$$\phi:(-1,1)\times S^1\to M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1),$$
$$\text{Image}(\phi)\cap\phi_1(S^1)\subset\phi_1(S^1)\ \text{上}\ x_0\ \text{的某邻域}.$$

取非负函数 $f\in C_0^\infty((-1,1))$，使 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=1$. 则 $w=f(t)\,dt$ 是$(-1,1)\times S^1$上的闭形式. ϕ 是单，C^1 映射，ϕ^*w 是M上闭形式. 因为 $\sum n_j\phi_j\sim 0$，所以 $(\phi^{-1})^*w(\sum n_j\phi_j)=0$. 但是

$$(\phi^{-1})^*w\left(\sum_{j=1}^{2g+1}n_j\phi_j\right)=n_i\int_{-1}^{1}f(t)\,dt\neq 0,$$

得到矛盾.

现在我们已经可以证明本节主要结果.

定理 (S. Y. Cheng, *Comment. Math. Helvetici*, **51** (1976), 43—55). 设M是紧致的 Riemann 曲面，亏格数为 g，则第 i 个特征值 λ_i 的重数 m_i 满足

$$m_i\leqslant\frac{1}{2}(2g+i+1)(2g+i+2).$$

证明：任取一个固定的相应于 λ_i 的特征函数 ϕ_i. 设 $x_0\in\phi_i$ 的结点集，则我们断言 ϕ_i 在 x_0 的零阶数 $\leqslant 2g+i$.

由关于结点集的结构知，如 x_0 的零阶数 $=k$ 的话，则从 x_0 出发有 k 条结点线，因此如 $k>2g+i$，则由引理，$M\backslash\phi_i^{-1}(0)$至少是 $i+1$ 连通的，再由 Courant 定理，$M\backslash\phi_i^{-1}(0)$ 至多是 i 连通的，此为矛盾

下面证明定理. 为简明起见，看 $i=1$ 的情形. 其它的 i 的

证明完全一样。

任取 $P\in M$. 令M在P点的正规坐标为x, y, 令 λ_i 的特征空间为$V_i=\{\varphi|\Delta\varphi=-\lambda_i\varphi\}$. 令 $N=\frac{1}{2}(2g+3)(2g+2)$. 考虑映射 T: $V_i\to R^N$ 如下:

$$\varphi\to\left(\cdots\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}\varphi}{\partial x^{\nu_1}\partial x^{\nu_2}}(p),\cdots\right),\ 0\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant 2g+2.$$

如果 $\dim V_i=m_i>N$ 的话,则 $\ker T\neq\varnothing$,即存在$\varphi\in\ker T$,使φ在P点的零阶数 $>2g+1$,因而与前面断言矛盾. 因此 $m_i\leqslant N=\frac{1}{2}(2g+2)(2g+3)$. 定理证毕.

注: 1) 在以上的研究中,如果注意到特征函数φ,满足 $\Delta\varphi=-\lambda_i\varphi$, 因而 $\varphi(p),\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(p),\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(p)$并非独立, 而是有一线性关系. 因此,

$$\left(\cdots,\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}\varphi}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\nu_2}}(p),\cdots\right)$$

仅落在 R^N 的低维子空间中,根据这一观察, G. Besson 将 m_i 的估计改进为

$$m_i\leqslant 4g+2i+1.$$

(*Ann. Inst. Fourier. Grenoble*, **30**(1980).)

2) 如果 $g=0$,即M同胚于 S^2, 则 $m_i\leqslant 3$. 对于S^2的标准度量, Cheng 的估计正好达到.

§7. 关于相邻两特征值之差

高阶特征值估计的一个侧面是给出相邻两特征值之差的尽可能精确的估计. 这一方面我们将限于提及两个结果, 一是早在1956年由 Payne-Polya-Weinberger 给出的上界, 一是新近由 B. Wang 及 S. T. Yau 给出的下界.

定理 (Payne-Polya-Weinberger). 设Ω是 R^N 中有界区域,λ_k是Ω的第k个特征值 (Dirichlet 条件),则下述估计成立.

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \leqslant \frac{4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{Nk}.$$

证明：根据极小极大原理，如果 u_i 是相应于 λ_i 的满足 Dirichlet 边界条件的特征函数，则

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\left\{\begin{array}{l}\int \varphi u_i = 0\\ i=1,\cdots,k\\ \varphi|\partial\Omega = 0\end{array}\right.} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2}{\int_\Omega \varphi^2},$$

不失一般性，我们可以假定 u_k 是正交规格化的，即

$$\int_\Omega u_i u_j = \delta_{ij}.$$

现在我们来选取适当的试测函数 φ. 任意固定 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$，取一待定函数 g，令

$$\varphi_i = gu_i - \sum_{i}^{k} a_{ij}u_j,$$

显然 $\varphi_i|_{\partial\Omega} = 0$. 条件 $\int \varphi_i u_e = 0$ 给出

$$0 = \int gu_i u_e - \sum_i a_{ij}\int u_j u_e = \int gu_i u_e - a_{ie},$$

所以 $a_{ie} = a_{ei}$,

$$\int_\Omega \varphi_i^2 = \int_\Omega gu_i\varphi_i - \int_\Omega \sum_i a_{ij}u_j\varphi_i = \int gu_i\varphi_i,$$

$$\int |\nabla\varphi_i|^2 = -\int \varphi_i\Delta\varphi_i,$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_i &= \Delta g u_i + 2\nabla g\cdot\nabla u_i + g\Delta u_i - \sum_i a_{ij}a_{ij}\Delta u_j\\ &= \Delta g u_i + 2\nabla g\cdot\nabla u_i - \lambda_i g u_i + \sum_i \lambda_j a_{ij}u_j,\end{aligned}$$

所以

$$\int |\nabla\varphi_i|^2 = -\int \Delta g\varphi_i u_i - 2\int \nabla g\cdot\nabla u_i\cdot\varphi_i + \lambda_i\int gu_i\varphi_i,$$

其中 $$\sum_i -2\int \varphi_i\nabla g\cdot\nabla u_i = -2\sum_i\int g\nabla g\cdot u_i\nabla u_i$$

$$+2\sum_{ji} a_{ij}\int u_j\nabla u_i\cdot\nabla g$$

$$=\sum_i\left(-\frac{1}{2}\int\nabla g^2\cdot\nabla u_i^2\right)+\sum_{ij} a_{ij}\int\nabla(u_iu_j)\nabla g$$

$$=\sum_i\frac{1}{2}\int u_i^2\Delta g^2-\sum_{ij} a_{ij}\int u_iu_j\Delta g, \qquad (*)$$

$$\sum_i\int|\nabla\varphi_i|^2=\sum_i\left(-\int\varphi_iu_i\Delta g\right)+\frac{1}{2}\sum_i\int u_i^2\Delta g^2$$

$$-\sum_{ij} a_{ij}\int u_iu_j\Delta g+\sum_i\lambda_i\int gu_i\varphi_i$$

$$=-\sum_i\int u_i^2 g\Delta g+\sum_{ij} a_{ij}\int u_iu_j\Delta g+\frac{1}{2}\sum_i\int u_i^2\Delta g^2$$

$$-\sum_{ij}a_{ij}\int u_iu_j\Delta g+\sum_i\lambda_i\int gu_i\varphi_i$$

$$=\sum_i\int u_i^2|\nabla g|^2+\sum_i\lambda_i\int\varphi_i^2$$

$$\leqslant\sum_i\int u_i^2|\nabla g|^2+\lambda_k\sum\int\varphi_i^2.$$

因为 $\forall i$，$\lambda_{k+1}\int\varphi_i^2\leqslant\int|\nabla\varphi_i|^2$，所以

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\sum\int u_i^2|\nabla g|^2}{\sum\int\varphi_i^2}.$$

取 $g=g_a(x)=\sum_{i=1}^N a_ix_i$，$\sum a_i^2=1$，则 g 满足

$$\Delta g=0,\quad|\nabla g|=1.$$

于是

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k\leqslant\frac{\sum_i\int u_i^2}{\sum_i\int\varphi_{ia}^2}=\frac{k}{\sum_i\int_\Omega\varphi_{ia}^2}.$$

其中 $\varphi_{ia}=g_a(x)u_i-\sum a_{ij}u_j$，由(*)式

$$\sum_i\int_\Omega u_i^2-k=-2\sum_i\int_\Omega\varphi_{ia}(\nabla g\cdot\nabla u_i)$$

$$=-2\sum_i\int_\Omega\varphi_{ia}\left(\sum_j a_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

对 $a=(a_1\cdots a_N)\in S^{N-1}$ 进行平均。取规格化的积分 $\int_{S^{N-1}}da=1$，则由 Schwarz 不等式

$$\int\sum\xi_i\eta_i\leqslant\left(\int\sum\xi_i^2\right)^{1/2}\left(\int\sum\eta_i^2\right)^{1/2}$$

得到

$$\frac{k}{2}=-\sum_i\int_{S^{N-1}}\int_\Omega\varphi_{ia}\left(\sum_j a_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\leqslant\left(\int_\Omega\int_{S^{N-1}}\sum_i\varphi_{ia}^2\right)^{1/2}\left[\int_\Omega\int_{S^{N-1}}\sum_i\left(\sum_j a_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}.$$

利用熟知的事实 $\int_{S^{N-1}}a_ja_e=\begin{cases}\dfrac{1}{N}, & j=e,\\ 0, & j\neq e.\end{cases}$

$$\int_\Omega\int_{S^{N-1}}\sum_i\left(\sum_j a_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2=\sum_i\int_\Omega\frac{1}{N}\sum_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$$

$$=\sum_i\frac{1}{N}\int|\nabla u_i|^2=\frac{1}{N}\sum_i\lambda_i\int u_i^2=\frac{\sum\lambda_i}{N},$$

所以

$$\frac{k^2}{4}\leqslant\frac{\sum\lambda_i}{N}\cdot\sum_i\int_\Omega\int_{S^{N-1}}\sum_i\varphi_{ia}^2.$$

因为 $\forall a\in S^{N-1}$，$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\sum_i\int_\Omega\varphi_{ia}^2\leqslant k$，

所以

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\sum_i\int_\Omega\int_{S^{N-1}}\varphi_{ia}^2\leqslant k,$$

所以

$$\frac{k^2}{4}\leqslant\frac{\sum_i\lambda_i}{N}\frac{k}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)},$$

即 $\lambda_{k+1}-\lambda_k\leqslant\frac{4}{Nk}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

现在考虑两特征根之差的下界.

定理. 设 Ω 是 R^n 中有界光滑凸域，λ_1，λ_2 为 Dirichlet 问题的第一和第二特征值

$$\begin{cases}\Delta u=-\lambda u,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{*}$$

则 $\lambda_2-\lambda_1\geqslant\frac{\pi^2}{4d^2}$,其中 d 为 Ω 的直径.

首先证明引理.

引理. 设 u_1,u_2 为(*)的第一和第二特征函数,则 $u_1(x)>0$, $\forall x\in\Omega$, $\frac{u_2}{u_1}$ 光滑到边界.

证明：$u_1(x)>0$, $\forall x\in\Omega$ 是 Courant 定理的结果.

在充分小的开集 U 上,选择局部坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得 $U\cap\partial\Omega=U\cap\{x_1=0\}$,由于在 Ω 内 $u_1>0$,而在 $\partial\Omega$ 上 $u_1=0$. 由 Hopf 引理,有 $\frac{\partial u_1}{\partial x}<0$,在 $\partial\Omega$ 上,又 u_1 光滑到 $\partial\Omega$ 上,所以它是 $U\cap\bar\Omega$ 上的光滑函数. 由 Malgrange 定理和 $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\partial\Omega}\neq 0$,我们有

$$u_1=g_1x_1$$

在局部成立. 其中 g_1 在 $\bar\Omega\cap U$ 上光滑且 $g_1\neq 0$.

另外,在 $\partial\Omega$ 上 $U_2\equiv 0$. 由 Malgrange 定理

$$u_2=g_2x_1h_1,$$

其中 $g_2\neq 0$,且在 $U\cap\bar\Omega$ 上 g_2 和 h_1 为光滑的. 显然

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{g_2h_1}{g_1}$$

必在 $\bar\Omega\cap U$ 光滑.

现在证明定理. 令 $v=\frac{u_2}{u_1}$,通过简单计算我们有

$$\Delta v=-\lambda v-2(\nabla v\cdot\nabla\log u_1),$$

其中 $\lambda=\lambda_2-\lambda_1>0$. 令 $G:\bar{\Omega}-\mathrm{R}$ 为

$$G=|\nabla v|^2+\lambda(\mu-v)^2,\quad \mu>\sup v,$$

则 G 是 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数. 因此必在 $x_0\in\bar{\Omega}$ 取得其极大值，断言 $G\leqslant\sup\limits_{\Omega}\lambda(\mu-v)$.

首先设 $x_0\in\partial\Omega$. 我们选取 R^n 中的局部正交标架 $\{l_1,\cdots,l_n\}$,使得 l_1 为外法线,并记为 $l_1\Big|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$,

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0)=2\sum_{i=1}^{n}v_iv_{i1}-2\lambda v_1(\mu-v)$$

$$=2v_1v_{11}+2\sum_{i=2}^{n}v_iv_{i1}-2\lambda v_1(\mu-v)\geqslant 0.$$

考虑 $\Delta v=-\lambda v-2(\nabla v\cdot\nabla\log u_1)$,其中 Δv 和 v 都光滑到边界. 因而在 $\partial\Omega$ 上取有限值,所以

$$(\nabla v\cdot\nabla\log u_1)=\frac{1}{u_1}\Big[v_1(u_1)_1+\sum_{2\leqslant i\leqslant n}v_i(u_1)_i\Big]$$

取有限值. 而在 $\partial\Omega$ 上 $u_1\equiv 0$,所以 $(u_1)_i\equiv 0$ (在 $\partial\Omega$ 上)$(2\leqslant i\leqslant n)$. 因此 $\dfrac{1}{u_1}v_1(u_1)_1$ 有限. 由 Hopf 引理 $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\neq 0$, 而 $u_1|_{\partial\Omega}\equiv 0$,所以 $v_1|_{\partial\Omega}\equiv 0$. 因此

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0)=2\sum_{i=2}v_iv_{i_1}\geqslant 0.$$

由 R^n 中第二基本形的定义

$$v_{i1}=-\sum_{j=2}^{n}h_{ij}v_j,\ 2\leqslant i,j\leqslant n,$$

其中 (h_{ij}) 为 $\partial\Omega$ 的第二基本张量. 所以

$$0\leqslant\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0)=-2\sum_{ij=2}^{n}v_ih_{ij}v_j.$$

因为 Ω 是凸的,所以 $v_i|_{x_0}=0,\ 2\leqslant j\leqslant n$,即 $\nabla v(x_0)=0$. 因此

$$G(x)\leqslant G(x_0)=|\nabla v|^2|_{x_0}+\lambda(\mu-v)^2$$

$$\leqslant \sup_{x\in\bar{\Omega}} \lambda(\mu - v)^2. \qquad (**)$$

其次设 $x_0 \in \Omega$，则我们有

$$\nabla G|_{x_0} = 0,$$
$$\Delta G|_{x_0} \leqslant 0,$$

则

$$0 = G_i|_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} 2v_j v_{ji} - 2\lambda(\mu - v)v_i,$$

$$0 \geqslant \Delta G = \sum_{i=1}^{n} G_{ii} = 2\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + \sum_{ij=1}^{n} 2v_j v_{jii}$$

$$+ 2\lambda \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\lambda(\mu - v)\sum_{i=1}^{n} v_{ii}.$$

将 v 满足的方程代入

$$0 \geqslant \Delta G = \left\{2\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + 2\lambda^2 v(\mu - v)\right\}$$
$$+ \{4\lambda(\mu - v)(\nabla v \cdot \nabla \log u_1)\}$$
$$- \{4(\nabla v) \cdot [\nabla(\nabla v \cdot \nabla \log u_1)]\},$$

若 $\nabla v(x_0) = 0$，则(**)成立，若 $\nabla v(x_0) \neq 0$，我们可取局部正交标架，使得 $v_1(x_0) \neq 0$，$v_i(x_0) = 0$，$2 \leqslant i \leqslant n$，则

$$v_{11}(x_0) = \lambda(\mu - v),$$
$$v_{ii}(x_0) = 0, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

因此 $$0 \geqslant \Delta G = \left\{2\sum_{ij\geqslant 1}^{n} v_{ij}^2 + 2\lambda(\mu - v)v\right\}$$
$$- \{4v_1^2(\log u_1)_{11}\}.$$

根据 Brascamp 和 Liep 的结果，$\log u_1$ 是凹函数，因而 $(\log u_1)_{11}(x_0) \leqslant 0$，因此

$$\left\{\sum_{ij=1}^{n} v_{ij}^2 + \lambda^2(\mu - v)v\right\}\Big|_{x_0} \leqslant 0,$$

或

$$\{v_{11}^2 + \lambda^2 v(\mu - v)\}|_{x_0} \leqslant 0.$$

将 $v_{ii}^{2}(x_0)$ 的表达式代入，得

$$\mu(\mu - v(x_0)) \leqslant 0(\nabla v(x_0) \neq 0 \Longrightarrow v(x_0) < \sup_{\Omega} v).$$

这是不可能的，所以 $\nabla v(x_0) = 0$，即

$$G(x) \leqslant \sup_{x \in \bar{\Omega}} \lambda(\mu - v)^2,$$

即

$$|\nabla v|^2 \leqslant \lambda\{\sup_{\Omega}(\mu - v)^2 - (\mu - v)^2\},$$

特别

$$|\nabla v|^2 \leqslant \lambda\{(\sup v - \inf v)^2 - (\sup v - v)^2\},$$

因此

$$\sqrt{\lambda} \geqslant \frac{|\nabla v|^2}{\sqrt{(\sup v - \inf v)^2 - (\sup v - v)^2}}.$$

在 $\bar{\Omega}$ 中找两点 q_1 和 q_2，使 $v(q_1) = \inf_{\bar{\Omega}} v, v(q_2) = \sup_{\Omega} v$. 直线连接 q_1, q_2，则此线段落在 $\bar{\Omega}$ 中，沿此线积分得

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \sqrt{\lambda}\, d,$$

其中 d 为直径，则 $\lambda \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2}$. 证毕.

§ 8. 与曲面有关的特征值问题

本节将集中讨论与曲面有关的特征值问题. 特征值问题的总目标是通过尽可能明确的几何量，例如流形的体积 $\mathrm{Vol}(M)$，直径 $\mathrm{diam}(M)$，以及有关的曲率量来给出特征值的上界和下界的估计. 从 Polya 猜想可以看出，就 $\mathbf{R}^n$ 中情况，结论似乎应为

$$\lambda_1 \sim \frac{C}{(\mathrm{Vol}(M))^{2/n}}.$$

在曲面的情况下 $(n = 2)$，$\lambda_1 \sim \frac{C}{A(M)}$，其中 $A(M) = \mathrm{Area}(M)$.

历史上第一次给出这方面肯定结果的是 Szegö，他证明，如果 $D \subseteq \mathbf{R}^2$，是一单连通的有界域，则对满足 Neumann 边界条件的第一特征值 μ_1 有估计

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{A(D)},$$

其中 C 是与 Bessel 函数第一个零点有关的常数，并且等号成立当且仅当 $D=$ 圆盘。

Szegö 的上述结果，1965 年由 Weinberger（*Jou. Math. and Mech.*, 1965）推广到高维的情形：如果 $\Omega\subseteq \mathbf{R}^n$ 是一单连通的有界域，则 Ω 的 Neumann 边界条件的第一特征值具有上界

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{\mathrm{Vol}(M)^{2/n}},$$

其中等号当且仅当 Ω 为球时成立，C 由球的体积值决定。

将 Szegö 的方法推广到 2-维紧致曲面 S^2 的是 Hersch（*C. R. A. S.*, **270**(1974)）。

定理（Hersch）。对 S^2 的任何度量，其第一特征值有估计

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi}{A(S^2)},$$

其中 $A(S^2)$ 是对所给度量而言的面积。

如果将 S^2 在标准度量下的面积记作 $A_0(S^2)$，则 $A_0(S^2)=4\pi$，熟知此时 S^2 的第一特征值为 2，上式也可以写作

$$\lambda_1 A(S^2) \leqslant \lambda_1(\text{standard}) A_0(S^2).$$

Urakawa（*J. Math. Soc. Japan*, **31**(1979), 209—226）指出，Hersch 的结果直接推广到紧致高维流形是不成立的，即不能指望

$$\lambda_1 \mathrm{Vol}(M)^{2/n} \leqslant C,$$

而其中常数 C 仅依赖于 n。它必须依赖于流形 M 的其它几何量（参见前节中 Cheng 的定理）。

S^2 是亏格 $g=0$ 的 Riemann 曲面，对于亏格 $g>0$ 的紧致 Riemann 曲面 Σ_g，相应于 Hersch 定理的结果由 P. Yang-S. T. Yau 给出：

定理（P. Yang-S. T. Yau）[*Ann. Scuola. Norm, Sup. pisa*, **7**(1980)]。设 Σ_g 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面，则对 Σ_g 的任何度量而言，都有

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi(1+g)}{A(\Sigma_g)},$$

其中 $A(\Sigma_g)$ 是对给定度量而言.

为了研究这些问题, P. Li-S. T. Yau 提出了共形体积的概念,下文将表明,这一概念不仅与第一特征值的估计有关,还与关于超曲面的 Willmore 猜想及极小曲面等有关.

本节将顺序讨论 Szegö-Weinberger 定理, Hersch 定理, P. Yang-S. T. Yau 定理以及共形体积等有关问题.

一、Szegö 定理与 Weinberger 定理.

为了叙述并证明 Szegö 定理,我们首先回顾一下 $\mathbf{R}^2$ 中单位圆盘 $D=\{|z|<1\}$ 的特征值问题 (Neumann 条件). 对 $\mathbf{R}^2$ 而言,其 Laplace 算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. 如果用极坐标 (r,θ) 表达则为

$$\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}.$$

欲求 Δ 的第一特征值和特征函数,通常采用分离变量法, 令 $u=R(r)\cos\theta$ 或 $u=R(r)\sin\theta$ 为第一特征函数,特征值为 λ_1,则由 $\Delta u=-\lambda_1 u$ 而得

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda_1-\frac{1}{r^2}\right)R=0.$$

经过变量替换, $R(r/\sqrt{\lambda_1})$ 满足的方程是 Bessel 方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\right]R(r/\sqrt{\lambda_1})=0.$$

因此, $R(r/\sqrt{\lambda_1})=J_1(r)$, $R(r)=J_1(\sqrt{\lambda_1}\,r)$,其中 $J_1(r)$ 为通常的 Bessel 函数.

如果我们要求的是满足 Neumann 条件的第一特征函数, 则条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0$ 等价于 $\left.\frac{dR(r)}{dr}\right|_{r=1}=0$,即 $J_1'(\sqrt{\lambda_1})=0$,因此 $\sqrt{\lambda_1}$ 是 $J_1'(r)$ 的第一个零点. 根据 Bessel 函数的理论, 它的数值(以下记为 ξ) $\xi\doteq1.8412$. 总之, 对 D 的第一特征值问题而言

(Neumann 条件)，我们可以找到两个独立的特征函数：

$$J_1(\sqrt{\lambda_1}\, r)\cos\theta,\ J_1(\sqrt{\lambda_1}\, r)\sin\theta.$$

而第一特征值

$$\lambda_1 = \xi^2 \approx (1.8412)^2.$$

下述定理见 G. Szegö, *J. Rat. Math. Anal.*, **3** (1954), 343—356.

定理 (Szegö). 设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单连通有界区域，则它的第一特征值 μ_1(Neumann 条件)满足

$$\mu_1 \leqslant \frac{\xi^2\pi}{A(\Omega)},$$

其中 $\xi \doteq 1.8412$, $A(\Omega) = \text{Area}(\Omega)$.

注：当 $\Omega =$ 单位圆盘时，这一估计是最佳的.

证明：由极小极大原理

$$\mu_1 = \inf_{\int_\Omega f = 0} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2},$$

因此我们欲寻求尽可能接近第一特征函数的检测函数，以给出 μ_1 的上界. 令 $f(r) = J_1(\xi r)$, 则由前所述 $g_1 = f(r)\cos\theta$, $g_2 = f(r)\sin\theta$ 是单位圆盘 D 的第一特征函数 (Neumann 条件)，因此，满足

$$\int_D |\nabla g_i|^2 = \xi^2 \int_D g_i^2, \qquad i = 1, 2,$$

$\left.\dfrac{\partial g_i}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$ 蕴含 $\int_D g_i = 0$.

根据 Riemann 映照定理，存在一一的全纯映射 $F: \Omega \to D$, $\partial\Omega \to \partial D$, 令 $\varphi_1 = g_1\circ F$, $\varphi_2 = g_2\circ F$. 因映照是保角的，$\partial\Omega$ 的法线方向变成 ∂D 的法线方向. 因为 $\left.\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right|_{\partial\Omega} = 0$，所以 $\int_\Omega \varphi_1 = 0 = \int_\Omega \varphi_2$，但熟知的 Dirichlet 积分是共形不变的. 因而

$$\int_\Omega (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_2|^2) = \int_D |\nabla g_1|^2 + |\nabla g_2|^2$$

$$= \xi^2 \int_D g_1^2 + g_2^2 = \xi^2 \int_D f^2(r).$$

另一方面，

$$\int_\Omega \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \int_\Omega (g_1 \circ F)^2 + (g_2 \circ F)^2$$

$$= \int_D f^2(r) \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 r d\theta dr$$

$$= \int_0^1 f^2(r) r \int_0^{2\pi} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 d\theta dr,$$

其中 $w = w(z)$ 是全纯映射 $F^{-1}: D \to \Omega$，令

$$G(r) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 d\theta,$$

则因为$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) G(r) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} G(r)$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^2 w}{dz^2} \right|^2 d\theta \geqslant 0,$$

由此可得 $G(r)$ 是增函数．于是，当 $r \leqslant 1$ 时，

$$\int_0^r G(t) t dt = r^2 \int_0^1 G(xr) x dx \leqslant r^2 \int_0^1 t G(t) dt.$$

因此，

$$\int_0^1 f^2(r) r G(r) dr = \int_0^1 f^2(r) d \left(\int_0^r t G(t) dt \right)$$

$$\geqslant f^2(1) \int_0^1 t G(t) dt - \int_0^1 [f^2(r)]' r^2 \int_0^1 t G(t) dt$$

$$\geqslant \int_0^1 t G(t) dt \left[f^2(1) - \int_0^1 r^2 [f^2(r)]' dr \right]$$

$$= \int_0^1 t G(t) dt \cdot \int_0^1 2 f^2(r) r dr$$

$$= 2 \int_0^1 f^2(r) r dr \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 r dr d\theta$$

$$= 2 \int_0^1 f^2(r) r dr \cdot \mathrm{Area}(\Omega) = \frac{1}{\pi} \left(\int_D f^2 \right) A(\Omega),$$

所以

$$\mu_1 \leqslant \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 + |\nabla \varphi_2|^2}{\int_\Omega \varphi_1^2 + \varphi_2^2}$$

$$= \frac{\xi^2 \int_D f^2(r)}{\frac{1}{\pi}\left(\int_D f^2(r)\right) A(\Omega)} = \frac{\xi^2 \pi}{A(\Omega)}.$$

式中用到 $f'(r) > 0$（当 $0 < r < 1$ 时）这是因为 $r = 1$ 是 $f'(r)$ 的第一个正零点.

注 1: 利用同样的方法可以推广这个定理到具非正曲率的带边的紧致曲面上，即有：对单连通的紧致曲面（带有边界）M，如果其曲率非正，则其第一特征值（Neumann 条件）满足

$$\mu_1 \leqslant \frac{\xi^2 \pi}{\mathrm{Area}(M)},$$

其中 $\xi \approx 1.8412$ 为 $J_1(r)$ 的第一个零点.（见 P. Li-Yau 的文章.）

注 2: 对于 $\mathbf{R}^2$ 中有界单连通区域 Ω 高阶特征值，有 Polya 猜测:

对 Dirichlet 条件而言，

$$\lambda_i \geqslant \frac{4\pi i}{\mathrm{Area}(\Omega)};$$

对 Neumann 条件而言，有

$$\mu_i \leqslant \frac{4\pi i}{\mathrm{Area}(\Omega)},$$

其中特征值重数计算在内，见 S. T. Yau, Problem Section, Seminar on Differential Geometry.

在往下讨论以前，我们首先叙述 $\mathbf{R}^N$ 中单位球 $\left\{\sum_1^N x_i^2 < 1\right\}$ 的特征值问题（Neumann 条件），我们要找的特征函数具 $\varphi(r)\frac{x_i}{r}$ 形式，由

$$-\mu\varphi(r)\frac{x_i}{r}=\Delta\left(\varphi(r)\frac{x_i}{r}\right)$$

$$=\Delta\varphi\cdot\frac{x_i}{r}+2\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{x_i}{r}+\varphi\Delta\frac{x_i}{r},$$

经过直接验算

$$\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{x_i}{r}=0,$$

$$\Delta\frac{x_i}{r}=-(N-1)\frac{x_i}{r^3},$$

得 $$-\mu\varphi(r)\frac{x_i}{r}=\Delta\varphi\cdot\frac{x_i}{r}-(N-1)\frac{x_i}{r^3}\varphi,$$

所以 $$\Delta\varphi+\left(\mu-\frac{N-1}{r^2}\right)\varphi=0,$$

即 $$\begin{cases}\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{N-1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}+\left(\mu-\dfrac{N-1}{r^2}\right)\varphi=0,\\ \varphi'(1)=0 \qquad (\text{Neumann 条件}).\end{cases}$$

将它规格化，考虑 Bessel 型方程

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{N-1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\left(1-\frac{N-1}{r^2}\right)\varphi=0$$

的解 $J(r)$ 设 J' 的第一个正零点为 β，则 $J(\beta r)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dr^2}J+\dfrac{N-1}{r}\dfrac{dJ}{dr}+\left(\beta^2-\dfrac{N-1}{r^2}\right)J=0,\\ J'(\beta r)|_{r=1}=0.\end{cases}$$

于是 $\left\{J(\beta r)\frac{x_i}{r}\right\}$ 组成 $\{\sum x_i^2<1\}$ 的第一特征函数 (Neumann 条件)，其特征值为 β^2。

如果球的半径是 R_0。那么经过一个简单的变换，即有 $\left\{J\left(\frac{\beta}{R_0}r\right)\frac{x_i}{r}\right\}$ 组成 $\{\sum x_i^2<R_0^2\}$ 的第一特征函数，特征值为 β^2/R_0^2 $=$ 常数$/\mathrm{Vol}^{2/N}$。

下面证明 Weinberger 对 Szegö 定理的高维推广。

定理. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界域，则满足 Neumann 条件的特征值有如下估计

$$\mu_1 \leqslant \frac{C}{\operatorname{Vol}(\Omega)^{2/N}},$$

其中常数 C 当 $\Omega=$ 球时达到.

证明：由极小极大原理，

$$\mu_1=\inf_{\int_\Omega f=0} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}.$$

我们必须构造适当的检验函数，以给出 μ_1 的上界. 取以原点为球心的球 S，使 $\operatorname{Vol}(S)=\operatorname{Vol}(\Omega)$，设 S 的半径为 ρ_0，根据前面的说明，我们有 S 的满足 Neumann 条件的第一特征函数 $\left\{g(r)\frac{x_i}{r}\right\}$，其中 g 满足

$$\begin{cases}\dfrac{d^2g}{dr^2}+\dfrac{N-1}{r}\dfrac{dg}{dr}+\left(\mu_1(S)-\dfrac{N-1}{r^2}\right)g=0,\\ g'(\rho_0)=0.\end{cases}$$

因为 ρ_0 是 g' 的第一个正零点，g 在 $[0,\rho_0]$ 上是递增的.

作辅助函数

$$G(r)=\begin{cases}g(r), & r\leqslant \rho_0,\\ g(\rho_0), & r\geqslant \rho_0,\end{cases}$$

对任何 $x^0\in\bar{\Omega}$，考虑向量 $V(x^0)$

$$V(x^0)=-\sum_{i=1}^N\int_{x\in\Omega}\frac{(x_i-x_i^0)G(r(x,x^0))}{r(x,x^0)}dx\cdot\frac{\partial}{\partial x_i},$$

这样就定义了 $\bar{\Omega}$ 上的一个向量场，当 $x^0\in\partial\Omega$ 时，$V(x^0)$ 的方向指向 $\partial\Omega$ 的外侧，与 $\partial\Omega$ 横截 (transversal) 相交，在这种情况下，关于向量场奇点的 Hopf 定理成立，因而至少存在一个内点 $x^0\in\Omega$，使 $V(x^0)=0$，将坐标原点移到 x^0，即无妨认为 $x^0=0$，令 $f_i=G(r)\frac{x_i}{r}\ (i=1,2,\cdots,N)$，则我们有 $\int_\Omega f_i=0$，因而

$$\mu_1\int_\Omega f_i^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla f_i|^2$$

及

$$\mu_1\int_\Omega \sum_i f_i^2 \leqslant \int_\Omega \sum_i |\nabla f_i|^2.$$

$$\begin{aligned}\sum_i |\nabla f_i|^2 &= \sum_{i,j} |\nabla_j f_i|^2 \\ &= \left(\frac{G'}{r} - \frac{G}{r^2}\right)^2 \sum_{i,j} \frac{x_j^2 x_i^2}{r^2} + \frac{G^2}{r^2}\sum_{i,j}\delta_{ij} \\ &\quad + 2\frac{G}{r}\left(\frac{G'}{r} - \frac{G}{r^2}\right)\sum_{i,j}\frac{x_i^2\delta_{ij}}{r} \\ &= \frac{G'^2}{r^2}\sum_i x_i^2 + \frac{G^2}{r^2}\sum_i\left(1 - \frac{x_i^2}{r^2}\right) \\ &= G'^2 + \frac{G^2}{r^2}(N-1),\end{aligned}$$

$$\sum_i f_i^2 = G^2,$$

所以

$$\mu_1 \leqslant \frac{\int_\Omega G'^2 + (N-1)\frac{G^2}{r^2}}{\int_\Omega G^2}.$$

考虑分子中被积函数 $G'^2 + (N-1)\frac{G^2}{r^2}$，由定义，当 $r \leqslant \rho_0$ 时，$G(r) = g(r)$，此时

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(g'^2 + (N-1)\frac{g^2}{r^2}\right) &= 2\left[g'g'' + (N-1)\frac{g}{r}\left(\frac{g'}{r} - \frac{g}{r^2}\right)\right] \\ &= 2\left[g'\left(-\frac{N-1}{r}g' - \mu_1(S)g + \frac{N-1}{r^2}g\right)\right. \\ &\quad \left. + (N-1)\frac{g}{r}\left(\frac{g'}{r} - \frac{g}{r^2}\right)\right] \\ &= 2\left[-\mu_1(S)gg' - \frac{(N-1)}{r}\left(g'^2 - \frac{2gg'}{r} + \frac{g^2}{r^2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= -2\mu_1(S)gg' - \frac{N-1}{r^3}(rg' - g)^2 \leqslant 0.$$

这里用到 $g \geqslant 0$，$g' \geqslant 0$。当 $r \geqslant \rho_0$ 时，

$$\frac{d}{dr}\left(G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2\right) = (N-1)g^2(\rho_0)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) < 0.$$

记 $\Omega_1 = \Omega \cap S$，则当 $x \in \Omega \setminus \Omega_1$ 时，$r(x) \geqslant \rho_0$，因此，

$$\int_\Omega \left(G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2\right) = \int_{\Omega_1}\left(G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2\right)$$

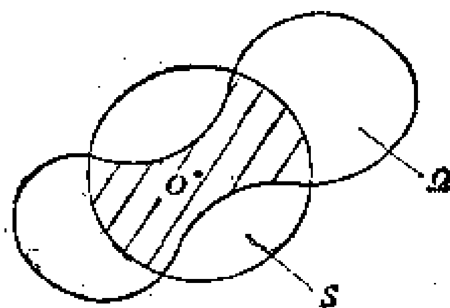
$$+ \int_{\Omega\setminus\Omega_1}\left(G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2\right)$$

$$\leqslant \int_{\Omega_1}\left(g'^2 + \frac{N-1}{r^2}g^2\right) + \left[G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2\right]\Big|_{r=\rho_0}$$

$$\cdot \mathrm{Vol}(\Omega\setminus\Omega_1)$$

$$\leqslant \int_{\Omega_1}\left(g'^2 + \frac{N-1}{r^2}g^2\right) + \int_{S\setminus\Omega_1}\left(g'^2 + \frac{N-1}{r^2}g^2\right)$$

$$= \int_S g'^2 + \frac{N-1}{r^2}g^2.$$



而 $\int_\Omega G^2 = \int_{\Omega_1} g^2 + g^2(\rho_0)\mathrm{Vol}(\Omega\setminus\Omega_1)$

$$= \int_{\Omega_1} g^2 + g^2(\rho_0)\mathrm{Vol}(S\setminus\Omega_1) \geqslant \int_S g^2,$$

因此

$$\mu_1 \leqslant \frac{\int_\Omega G'^2 + \frac{N-1}{r^2}G^2}{\int_\Omega G^2} \leqslant \frac{\int g'^2 + \frac{N-1}{r^2}g^2}{\int_S g^2}$$

$$= \mu_1(S) = \frac{C}{\mathrm{Vol}(S)^{2/N}} = \frac{C}{\mathrm{Vol}(Q)^{2/N}}.$$

以下讨论中，有关 S^n 的共形变换群的下述事实是经常用到的。

设 S^n 的共形变换群为 G，则 G 中包含一个和 B^{n+1} 同胚的子群 G_0：令 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$，定义

$$y = \frac{x - a - xx'a + x(2a'a - aa'I)}{1 - 2ax' + aa'xx'}, \quad aa' < 1, \qquad (1)$$

式中 x' 表示 x 的转置，由 Schwarz 不等式，当 $xx' \leqslant 1$ 时，

$$1 - 2ax' + aa'xx' = (1 - ax')^2 + aa'xx' - (ax')^2 > 0,$$

因此可以定义

$$g_a:\ \overline{B}^{n+1} \to \overline{B}^{n+1}.$$

不难验证

$$g_a:\ B^{n+1} \to B^{n+1},\quad S^n \to S^n,$$

$B^{n+1} = \{x \mid xx' < 1\}$，这是因为通过计算，

$$1 - yy' = \frac{(1 - aa')(1 - xx')}{1 - 2ax' + aa'xx'},$$

不仅如此，g_a 作为 $B^{n+1} \to B^{n+1}$，$S^n \to S^n$ 还是共形的，因为有

$$\frac{dydy'}{(1 - yy')^2} = \frac{dxdx'}{(1 - xx')^2}.$$

另外，由(1)还可以看出，当 $a \in S^n$（即 $aa' = 1$）时，则任何 $x \in S^n \backslash \{a\}$，都有

$$y = \frac{x - 2a + 2xa'a - x}{2 - 2ax'} = \frac{-2a(1 - ax')}{2(1 - ax')} = -a,$$

即：此时 g_a 将 $S^n \backslash \{a\} \to \{-a\}$.

以上共形变换群也可以通过球极投影来得到：对于任何 $a \in B^{n+1}$，通过球极投影（以 $\frac{a}{|a|}$ 为极点）将 $x \in S^n \to \xi(x) \in \mathbf{R}^n$，对任何实数 t，及 $\xi \in \mathbf{R}^n \to t\xi \in \mathbf{R}^n$ 定义了 S^n 上的一个单参数共形变换群 $g_a(t)$，这一单参数变换群定义了 S^n 上一个共形向量场 $V_a(x)$，

$$V_a(x) = \frac{a}{|a|} \text{ 在 } T_xS^n \text{ 上的投影.}$$

$g_a(t)$ 中存在唯一的映射将 $O \to a$，直观上也看得很清楚．当 $a \to S^n$ 时(即 $t \to \infty$)，$S^n \setminus \{-a\} \to \{a\}$.

现在我们来证明 Hersch 定理.

定理 (Hersch). 对于 S^2 的任何度量，其第一特征值有估计

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi}{A(S^2)}.$$

证明：对于 S^2 的任何度量 $d\tilde{s}^2$，考虑共形映射(这样的共形映射总是存在的) $\varphi:(S^2, d\tilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$ "ds_0^2" 指通常的球面度量．根据极小极大原理，

$$\lambda_1 = \inf_{\int_{S^2} f = 0} \frac{\int_{S^2} |\nabla f|^2 d\tilde{v}}{\int_{S^2} f^2 d\tilde{v}},$$

$d\tilde{v}$ 是对 $d\tilde{s}^2$ 而言的．现在取 (S^2, ds_0^2) 上的坐标函数 $x^i (i = 1, 2, 3 \cdots)$ (熟知它是 (S^2, ds_0^2) 上的第一特征函数!)，则 $x^i \circ \varphi$ 是 $(S^2, d\tilde{s}^2)$ 上的函数.

1°因为 φ 是共形映射，而在曲面情况下，函数的 Dirichlet 积分是共形不变的，即 $\forall i$

$$\int_{S^2} |\nabla(x^i \circ \varphi)|^2 d\tilde{v} = \int_{S^2} |\nabla x^i|^2 dv$$

$$= -\int_{S^2} x^i \Delta x^i = 2\int_{S^2} x^{i^2} = \frac{8\pi}{3}.$$

$$2° \quad \text{Area}(S^2) = \int_{S^2} 1 \cdot d\tilde{v} = \sum \int_{S^2} (x^i \circ \varphi)^2,$$

因此，至少有一 i，有

$$\int_{S^2} (x^i \circ \varphi)^2 \geqslant \frac{\text{Area}(S^2)}{3}.$$

因而，如果 φ 选择可使 $\int_{S^2} x^i \circ \varphi d\tilde{v} = 0$，那么

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_{S^2} |\nabla(x^i \circ \varphi)|^2 d\tilde{v}}{\int |x^i \circ \varphi|^2 d\tilde{v}} \leqslant \frac{8\pi}{\text{Area}(S^2)}.$$

因此问题归结为找 φ 使 $\int_{S^2} x^i \circ \varphi d\tilde{v} = 0$，任意固定共形映射 φ_0: $(S^2, d\tilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$，再考虑本节开始所述的 $(S^2, ds_0^2) \to (S^2, ds_0^2)$ 的共形变换群 G_0，取 $g_a \in G_0$，令 $\varphi = g_a \circ \varphi_0$，它自然是 $(S^2, d\tilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$ 的共形变换.

定义映射 $H: B^{n+1} \to B^{n+1}$

$$a \longmapsto \frac{1}{A(S^2)}\left(\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi d\tilde{v}\right), \ i = 1, 2, 3,$$

当 $a \in S^2$ 时，如前所述，S^2 上所有的点(除去 $-a$ 外)都映成 a，此时 $\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi = a^i$，$a = (a^1, a^2, a^3) \in S^2$，因而 H 可连续开拓到 S^n 上，并且在 S^n 上是恒同映射，根据初等拓扑知识，此时 H 必是满的，因而存在 $a \in B^{n+1}$ 使

$$H(a) = (0, 0, 0),$$

即

$$\int x^i \circ g_a \circ \varphi = 0, \quad \forall i,$$

定理证毕.

S^2 是亏格 $g = 0$ 的 Riemann 面，对亏格 $g > 0$ 的闭 Riemann 曲面 Σ_g 相应于 Hersch 定理的结果是 P. Yang 与 S. T. Yau 的下述定理.

定理 (P. Yang-S. T. Yau). 对 Σ_g 的任何度量其第一特征值满足

$$\lambda_1 \leqslant \frac{8\pi(1+g)}{\text{Area}(\Sigma_g)}.$$

这一定理可以考虑共形分支映射 φ: $\Sigma_g \to S^2$，再利用类似 Hersch 定理的证明方法而得到. 由 Riemann-Roch 定理，Σ_g 上存在非常数的亚纯函数，具有唯一的重数不超过 $g+1$ 的零点. 因此 Σ_g 一定是 S^2 的阶数不超过 $g+1$ 的分支覆盖，这样的 φ 是

一定存在的。但是利用下文将讨论的共形体积概念，这一定理还可以更简单地证明。

设 (M, ds^2) 是一紧致的二维流形，ϕ: $M \to S^n$ 是一共形映射，设 ds_0^2 是 S^n 的标准度量，则

$$\phi^* ds_0^2 = \alpha(x) ds^2,$$

其中 $\alpha(x)$ 是定义于M上的非退化 C^∞ 正函数。

令G为 S^n 的共形变换群，$\forall g \in G$，$g \circ \phi$: $M \to S^n$ 仍是共形的，记 dv_g 为M上对应于 $(g \circ \phi)^* ds_0^2$ 的体积元素。

定义. 相应于φ的M的共形体积 $V_C(n, \phi)$ 为

$$V_C(n, \phi) = \sup_{g \in G} \int_M dv_g,$$

而M的共形体积则定义为

$$V_C(n, M) = \inf_{\phi} V_C(n, \phi),$$

其中ϕ取遍所有$M \to S^n$ 的非退化共形映射。

下述定理表明共形体积与第一特征值有着密切的关系，同时该定理也表明 $V_C(n, \phi)$ 的定义是非平凡的。

定理 (P. Li-S. T. Yau). 设M是二维紧致流形，如果存在 $M \to S^n$ 的共形映射的话(此时 $V_C(n, M)$ 可定义)，则

$$\lambda_1 V(M) \leqslant 2V_C(n, M),$$

等号成立时M是 S^n 的极小曲面，并且浸入 $M \to S^n$ 由第一特征函数的子空间给出。

证明：如同 Hersch 定理证明一样，设 $x^i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标，则对任何从M到 S^n 的共形变换 ϕ，存在 $g \in G$ 使

$$\int_M x^i \circ g \circ \phi = 0, \quad \forall i,$$

于是

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_M |\nabla(x^i \circ g \circ \phi)|^2}{\int_M (x^i \circ g \circ \phi)^2},$$

$$\int_M |\nabla(x^i \circ g \circ \phi)|^2 = \int_{g\circ\phi(M)} |\nabla x^i|^2 = \int_M (g\circ\phi)^*(|\nabla x^i|^2 dv),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla(x^i \circ g \circ \phi)|^2 = \int_M (g\circ\phi)^*(\sum|\nabla x^i|^2 dv)$$

$$= 2\int_M (g\circ\phi)^* dv \leqslant 2V_C(n, \phi).$$

另一方面 $$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x^i \circ g \circ \phi)^2 = \int_M 1 = \mathrm{Vol}(M),$$

所以 $$\lambda_1 \mathrm{Vol}(M) \leqslant 2V_C(n, \phi).$$

因为 $V_C(n, M) = \inf\limits_{\phi} V_C(n, \phi)$，自然有

$$\lambda_1 V(M) \leqslant 2V_C(n, M).$$

现在证明定理的后一断言，设 $\lambda_1 V(M) = 2V_C(n, M)$，通过对度量作一伸缩变换，无妨设 $\lambda_1 = 2$，此时有 $V(M) = V_C(n, M)$。

取一串共形映射 ϕ_h: $M \to S^n$，使

$$\lim_{h\to\infty} V_C(n, \phi_h) = V_C(n, M)$$

同时满足 $$\int_M x^i \circ \phi_h = 0, \forall i, h.$$

适当改变坐标顺序，无妨设

$$\lim_{h\to\infty} \int_M (x_i \circ \phi_h)^2 = \begin{cases} >0, & i = 1, 2, \cdots, N, \\ 0, & i = N+1, \cdots, n+1. \end{cases}$$

由 $$2V_C(n, \phi_h) \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla x^i \circ \phi_h|^2$$

$$\geqslant 2 \sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \phi_h)^2 = 2V(M),$$

第二式是因为假定 $\lambda_1 = 2$，第三式是因为 $\sum x_i = 1$，令 $h \to \infty$，注意假设 $V_C(n, M) = V(M)$，得

$$2V_C(n, M) = \lim_{h\to\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla x_i \circ \phi_h|^2$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}2\int_M(x_i\circ\phi_k)^2=2V(M),$$

因而对任意固定的 i，$\{x_i\circ\phi_k\}$ 是 Sobolev 空间 $H_1^2(M)$ 中的有界集，因而无妨设它是弱收敛的，再根据 Sobolev 空间的理论，$H_1^2(M)\hookrightarrow L_2(M)$ 是紧算子，无妨设它在 $L_2(M)$ 中强收敛到 ϕ_i，显然 $\sum_{i=1}^{n+1}\phi_i^2=1$ a. e.，$\phi_i=0(i=N+1,\cdots,n+1)$。

由于 $\forall i$

$$\int_M|\nabla x_i\circ\phi_k|^2\geqslant 2\int_M(x^i\circ\phi_k)^2$$

$$\lim\sum_{i=1}^{n+1}\int_M|\nabla x_i\circ\phi_k|^2=\lim\sum_{i=1}^{n+1}\int_M(x^i\circ\phi_k)^2,$$

因此，$\forall i$ 都有

$$\lim\int_M|\nabla x_i\circ\phi_k|^2=2\int\phi_i^2\leqslant\int_M|\nabla\phi_i|^2,$$

同时因为 $x^i\circ\phi_k\to\phi_i$（弱），$\lim\int|\nabla x^i\circ\phi_k|^2\geqslant\int|\nabla\phi|^2$，

因而
$$\lim\int_M|\nabla x^i\circ\phi_k|^2=\int|\nabla\phi_i|^2,$$

即在 $H_1^2(M)$ 中实际上 $x_i\circ\phi_k$ 是强收敛到 ϕ_i，并且 $2\int\phi_i^2=\int|\nabla\phi_i|^2$，即 ϕ_i 是 M 的第一特征函数并且是 $C^\infty(M)$ 的，$x\to(\phi(x),\cdots,\phi_N(x))$ 定义了 $M\to S^{N-1}$ 的共形映射；由 $\sum\varphi_i^2=1$，得

$$\sum|\nabla\phi_i|^2=2\sum\phi_i^2=2=\lambda_1,$$

因此 $(\phi_1,\cdots,\phi_N)$ 实为等距（isometry），因而 M 是 S^{N-1} 的一个极小子流形。

定理. 设 M^2 是由浸入 ϕ: $M^2\to S^n$ 给出的 S^n 中的紧致极小曲面，则

$$V(M)=V_C(n,\phi).$$

证明：设 π: $S^n\to\mathbf{R}^n$ 为球极投影，则 π 是 $S^n\to\mathbf{R}^n$ 的共形映射，对每一个 $\pi\circ\phi(M)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的法向量 ν^α，令 $\{\mu_1^\alpha,\mu_2^\alpha\}$ 是相

应的主曲率，熟知

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}\sum_{\alpha}(\mu_1^{\alpha}-\mu_2^{\alpha})^2$$

是共形不变量. 因此，对于任何 $g\in\mathrm{conf}(S^n)$ 都有

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}\sum_{\alpha}(\mu_1^{\alpha}-\mu_2^{\alpha})^2=\int_{g\circ\phi(M)}\sum_{\alpha}(\bar{\mu}_1^{\alpha}-\bar{\mu}_2^{\alpha})^2.$$

但是由 Gauss-Codazzi 公式（如M是N的曲面，则 $R_M(X, Y)-R_N(X, Y)=\mu_1\mu_2$），得

$$4\int_{\pi\circ\phi(M)\mathrm{in}R^n}H^2-K=4\int_{g\circ\phi(M)\mathrm{in}S^n}\bar{H}^2-(\bar{K}-1)$$

$$=4\int\bar{H}^2-\bar{K}+4V(g\circ\phi(M)).$$

再由 Gauss-Bonnet 公式$\int K=\int\bar{K}=\chi(M)$，因此有

$$\int_{\pi\circ\phi(M)}H^2=\int_{g\circ\phi(M)}\bar{H}^2+V(g\circ\phi(M)).$$

由于 $\phi(M)$ 是 S^n 中极小曲面，因此

$$V(\phi(M))=\int_{\pi\circ\phi(M)}H^2=\int_{g\circ\phi(M)}\bar{H}^2+V(g\circ\phi(M)),$$

所以

$$V(\phi(M))\geqslant V(g\circ\phi(M)),\ \forall g.$$

由 $V_C(n, \phi)$ 的定义，有

$$V(\phi(M))\geqslant V_C(n, \phi),$$

另一方面，显然 $V_C(n, \phi)\geqslant V(\phi(M))$，定理证毕.

以上两定理结合起来，可以使我们计算若干曲面的共形体积.

系. 设M是紧致曲面，如存在一个极小浸入 $\phi: M\to S^n$，并且坐标函数由第一特征函数给出，则 $V_C(n, M)=V(M)$.

这是因为，熟知此时 $\lambda_1=2$，根据上面两个定理，有

$$2V(M)\leqslant 2V_C(n, M)\leqslant 2V_C(n, \phi)=2V(M).$$

根据此系，立得

1) $V_C(S^2)=4\pi$,

2) $V_C(RP^2)=6\pi$.

这是因为，对 RP^2 的标准度量而言，其第一特征空间给出了 $RP^2 \to S^4$ 的一个等度极小嵌入(文献中这一极小嵌入称为 Veronesce 曲面)，而 $V(\text{Veron}) = 6\pi$。

3) $V_C(T^2) = 2\pi^2$，其中 T^2 是所谓方环，在 $g = 1$ 的模空间中由向量(1, 0)和(0, 1)生成。

这是因为对具平坦度量的方环而言，可以通过第一特征值的特征函数实现 S^3 的极小嵌入：

$$S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to S^3, \text{而 } V\left(S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\pi^2.$$

4)设 M 是亏格为 1 的紧曲面，且共形等价于由 $\{(1,0),(x,y)\}$ $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 1 - x^2 \leqslant y \leqslant 1\right)$ 所生成的平环面，则 $2\pi^2 \leqslant V_C(M)$。

定理 (P. Yang-S. T. Yau). 设 Σ_g 是亏格为 g 的紧 Riemann 曲面，则对 Σ_g 的任何度量而言，都有

$$\lambda_1 A(\Sigma_g) \leqslant 8\pi(1 + g).$$

证明：根据定理 2，$\lambda_1 A(\Sigma_g) \leqslant 2V_C(2, \Sigma_g)$. 任取共形. 分支覆盖映射 $\phi: \Sigma_g \to S^2$, $\deg\varphi \leqslant 1 + g$ (根据 Riemann-Roch，Σ_g 上存在非常数的亚纯函数，具有重数 $\leqslant 1 + g$ 的零点，因此这样的 ϕ 总是存在的). 易见，如果 $N \to M$ 是 d 重覆盖，则 $V_C(2, N) \leqslant dV_C(2, M)$。因此

$$\lambda_1 A(\Sigma_g) \leqslant 2V_C(2, \Sigma_g) \leqslant 2V_C(2, S^2)(1 + g) = 8\pi(1 + g).$$

注：Yang-Yau 实际上证明了如下更强的一些结果：

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} \geqslant \frac{3V(M)}{8\pi(1 + g)}.$$

与第一特征值、共形体积等密切相关的问题有 Willmore 猜想. 利用共形面积的概念，可以很容易地解决 Willmore 猜想的一部分。

下面讨论 Willmore 猜想. 设M是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致曲面,其有诱导度量. 以H表其平均曲率, Willmore 猜想为,对于任何可浸入环面 $T^2 \subseteq \mathbf{R}^3$,有

$$\int_M |H|^2 \geqslant 2\pi^2.$$

引理. 设M是 $\mathbf{R}^n$ 中紧曲面(无边界),则

$$\int_M |H|^2 \geqslant V_C(n, M).$$

等号成立意味着在某一球极投影下,M是 S^n 中极小曲面的像.

证明: 利用球极投影的逆映射,我们得到从M到 S^n 的共形映射 ϕ,再与 Möbius 变换复合,我们可以假设 $\phi(M)$ 的面积就是 ϕ 的共形面积 $V_C(n, \phi)$.

利用前面命题的讨论,我们有

$$\int_M |H|^2 = \int_{\phi(M)} |\bar{H}|^2 + V(\phi(M)),$$

其中 $\bar{H}$ 是 $\phi(M)$ 在 S^n 中的平均曲率. 由 $V(\phi(M)) = V_C(n, \phi)$
得到

$$\int_M |H|^2 \geqslant V_C(n, \phi).$$

证毕.

由引理 1 及前面的定理容易得到下面的

引理 2. 设M为 $\mathbf{R}^n$ 中紧致曲面,则

$$\int_M |H|^2 \geqslant \frac{1}{2} \sup\lambda_1 \cdot V(M),$$

其中 sup 是对所有与 $\mathbf{R}^n$ 中诱导度量共形等价的度量取的.

由引理 1 及前面关于共形面积的计算,我们立即可以得到下面的两个定理:

定理. 设M是 $\mathbf{RP}^2$ 中紧致曲面,则对任何浸入 $M \to \mathbf{R}^n$,有

$$\int_M |H|^2 \geqslant 6\pi.$$

等号成立隐含M是在球极投影下 S^4 中某一极小曲面 (其特征值 $\lambda_1 = 2$)在 $\mathbf{R}^n$ 中的像.

定理. M是 $\mathbf{R}^n$ 中亏格为1的曲面,且共形等价于由$\{(1,0),(x,y)\}$, $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1$ 所生成的环面,则

$$\int_M |H|^2\geqslant 2\pi^2.$$

等号成立表示M共形等价于方环.

最后我们要提一下与这里讨论的问题有关的两个猜想.

猜想 1: 对亏格为g的紧致 Riemann 曲面 Σ_g, 是否存在一个绝对常数 C,使对 Σ_g 的任何度量都有

$$\frac{\lambda_k}{k}\leqslant\frac{C(1+g)}{A(\Sigma_g)}\ ?$$

Yang-Yau 定理表明,当 $k=1$ 时,其答案是肯定的.

猜想 2: 设M是 S^{n+1} 中的极小嵌入紧致超曲面, 是否第一特征值 $\lambda_1(M)=n$? 特别 $n=2$,是否 S^3 中极小嵌入闭曲面, 其第一特征值 $=2$?

关于猜测 2,最近 H. I. Choi-A. N. Wang 获得了下述结果 (*J. Diff. Geometry*, **18** (1983), 559—563).

定理. 设M是 S^3 中紧致,极小嵌入曲面,则

$$\lambda_1(M)\geqslant 1.$$

注: 原定理较此为广,它证明如果M是 S^{n+1} 中紧致极小超曲面,则 $\lambda_1(M)\geqslant\frac{n}{2}$. 证明方法是一样的, 下面只考虑 $n=2$ 的情形.

证明: M 将 S^3 分成两个连通区域 Ω_1 和 Ω_2, 使得 $\partial\Omega_1=\partial\Omega_2=M$, 设 f 是M上的第一特征函数(相对于M在 S^3 中的诱导度量而言). 在 Ω_1 中解 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{\partial\Omega_1}=u|_M=f,\end{cases}$$

则u是光滑到 $\partial\Omega_1$ 的函数, $\forall x\in S^3$. 取x附近的正交标架 $\{e_1,e_2,e_3\}$, 当 $x\in\partial\Omega_1$ 时, 令 $e_3=\partial\Omega_1$ 的外法线方向, 而 $e_1,e_2\in T_xM$, 则熟知,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} D^2u(e_i, e_i) = \sum u_{ii}.$$

D^2u 是 u 的 Hessian:

$$D^2u(X, Y) = X(Yu) - (\nabla_X Y)u,$$

当 $x \in \partial\Omega_1$ 时，对于 $i \neq 3$，因为

$$\nabla_{e_i} e_i = \bar{\nabla}_{e_i} e_i - h(e_i, e_i)e_3,$$

其中 $\bar{\nabla}$ 表示$M = \partial\Omega_1$ 的协变微分，而 h 表示第二基本形，因此当 $x \in M$时，

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^{3} D^2u(e_i, e_i) = u_{33} + \bar{\Delta} f + \sum_{i=1}^{2} h(e_i, e_i)u_3 \\ &= u_{33} + \bar{\Delta} f + 2Hu_3,\end{aligned}$$

其中 $\bar{\Delta}$ 表示M上的 Laplace 算子，而H则为M的平均曲率。因为M是极小曲面，$H = 0$，所以 $\forall x \in M$，

$$u_{33} = -\bar{\Delta} f = \lambda_1 f.$$

在 Ω_1 中考虑 $\Delta|\nabla u|^2$，易见(用到 $\Delta u = 0$)

$$\Delta|\nabla u|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{3} u_{ij}^2 + 2\sum_{i,j=1}^{3} R_{ij}u_i u_j,$$

所以

$$\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 \geqslant 4\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2.$$

这是因为对于 S^3, Ric $\equiv 2$. 另一方面，由 Stokes 公式

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \Delta|\nabla u|^2 &= \int_{\partial\Omega_1} |\nabla u|_3^2 = 2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i=1}^{3} u_i u_{i3} \\ &= \int_{\partial\Omega_1} 2\sum_{i=1}^{2} u_i u_{i3} + 2u_3 u_{33} \\ &= 2\int_{\partial\Omega_1} u_3 \lambda_1 f + 2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i=1}^{2} u_i u_{i3}.\end{aligned}$$

但当 $i \neq 3$ 时，

$$\begin{aligned}u_{i3} &= D^2u(e_i, e_3) = e_i(e_3 u) - (\nabla_{e_i} e_3)u \\ &= e_i(u_3) - \sum_{j=1}^{2} h_{ij}u_j,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Omega_1} \Delta |\nabla u|^2 = 2\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f + 2\int_{\partial\Omega_1} \nabla f \cdot \nabla u_3$$

$$- 2\int_{\partial\Omega_1} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} u_i u_j$$

$$= 2\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f - 2\int_{\partial\Omega_1} u_3 \Delta f - 2\int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u$$

$$= 4\lambda_1 \int_{\partial\Omega_1} u_3 f - 2\int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u).$$

但是

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 = -\int_{\Omega_1} u\Delta u + \int_{\partial\Omega_1} uu_\nu = \int_{\partial\Omega_1} u_3 f,$$

因此

$$\int_{\Omega_1} \Delta |\nabla u|^2 = 4\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 + 2\int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u),$$

所以

$$4\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 \geqslant 4\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u),$$

$$4(\lambda_1 - 1)\int |\nabla u|^2 \geqslant \int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u).$$

无妨设$\int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}(\nabla u, \nabla u) \geqslant 0$，因为否则我们可用$\Omega_2$代替$\Omega_1$，两者的法方向正相反，且$\nabla u|_{\partial\Omega} = \nabla f$，因此

$$\int_{\partial\Omega_2} \mathrm{II} = -\int_{\partial\Omega_1} \mathrm{II}.$$

这样，就证明了$\lambda_1 \geqslant 1$.

系. 如果M是S^3中亏格为g的紧的极小嵌入曲面，则

$$\mathrm{Area}(M) \leqslant 8\pi(1+g).$$

这由 Yang-Yau 定理及上述$\lambda_1 \geqslant 1$的结果直接可见.

最后我们要提一下有关负曲率的一般 Riemann 曲面的特征值的结果. A. Selberg 证明，如果

$$\Sigma_g = H/\Gamma,\quad H = \{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\},$$

而Γ是$SL(2, z)$，则$\lambda_1(\Sigma_g) \geqslant 3/16$，人们猜测最好的下界可能是

1/4，但至今尚未证明.（AMS. Symposium on Numha Theory, California Inst. of Tech., Pasadena (1965).）

又，关于 Riemann 曲面上特征值的下界估计，R. Schoen, S. Wolpert, S. T. Yau 证明：$\forall g \in Z^+$，存在一系列 Riemann 曲面 $\Sigma_{g,n}$，具有相同结构，使得相应的 $\lambda_{1,n}, \cdots, \lambda_{2g-3,n}$ 趋于 0. 但是，λ_{2g-2} 具有与 Σ_g 的保形结构无关的下界. 详见 *Proceedings of the Symposia in Pure Math.*, **36** (1980), pp. 279—285.

第四章　Riemann 流形上的热核 (heat kernel)

§1. 热方程的梯度估计

本节假定 M 是 n 维完备 Riemann 流形可能具有边界（允许 $\partial M = \emptyset$）。我们的主要任务是给出热方程

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0 \tag{4.1.1}$$

的正解的导数的估计（梯度估计）。这种估计一般而言是一种局部估计，但今后我们将看到在某些情况下它也能导致整体的估计。

如果 u 是 (4.1.1) 的解，$u > 0$，令 $f = \log u$，则 f 满足

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) f = -|\nabla f|^2. \tag{4.1.2}$$

此处 ∇f 表示对变量 $x \in M$ 的梯度。

我们从下面的引理出发，它是导出梯度估计的基础。

引理 1. 设 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -K$，$u(x, t)$ 是定义在 $M \times [0, \infty)$ 上的光滑函数，$u(x, t) > 0$，满足 (4.1.1)，令 $f = \log u$，对任何固定的常数 $\alpha \geqslant 1$，令

$$F(x, t) = t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t), \tag{4.1.3}$$

则有

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F \geqslant -2\nabla f \cdot \nabla F + \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2Kt|\nabla f|^2. \tag{4.1.4}$$

证明：取 $x \in M$ 的局部正规标架 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$，函数附以下标 i，j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 表示该函数对 e_i，e_j 方向的协变导数，对 $F = t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t)$ 作协变微分，得

$$F_i = t\left(2\sum_{j=1}^n f_j f_{ji} - \alpha f_{ti}\right),\quad \Delta F = \sum_i F_{ii}$$

$$= t\left(2\sum_{i,j} f_{ij}^2 + 2\sum_{i,j} f_j f_{jii} - \alpha(\Delta f)_t\right). \qquad (4.1.5)$$

根据熟知的不等式和 Ricci 公式

$$(\Delta f)^2 = (\sum f_{ii})^2 = \sum f_{ii}^2 + 2\sum_{i\neq j} f_{ii}f_{jj}$$

$$\leqslant \sum f_{ii}^2 + \sum_{i\neq j}(f_{ii}^2 + f_{jj}^2) \leqslant n\sum_{i,j} f_{ij}^2,$$

$$\sum_{i,j} f_j f_{jii} = \sum_{i,j} f_j f_{iij} + \sum R_{ij} f_i f_j = \nabla f \cdot \nabla(\Delta f)$$

$$+ \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) - K|\nabla f|^2,$$

于是 (4.1.5) 成为

$$\Delta F \geqslant t\left(\frac{2}{n}(\Delta f)^2 + 2\nabla f \cdot \nabla(\Delta f) - 2K|\nabla f|^2 - \alpha(\Delta f)_t\right),$$

以 $\Delta f = f_t - |\nabla f|^2$ 代入，得

$$\Delta F \geqslant t\left(\frac{2}{n}(f_t - |\nabla f|^2)^2 + 2\nabla f \cdot \nabla(f_t - |\nabla f|^2)\right.$$

$$\left. - 2K|\nabla f|^2 - \alpha(f_t - |\nabla f|^2)_t\right).$$

另一方面

$$F_t = (t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t))_t = |\nabla f|^2 - \alpha f_t + t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t)_t,$$

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)F \geqslant \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - 2t\nabla f \cdot \nabla(|\nabla f|^2 - f_t)$$

$$- 2Kt|\nabla f|^2 + \alpha t(|\nabla f|^2 - f_t)_t - t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t)_t$$

$$- (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) = \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t)$$

$$- 2Kt|\nabla f|^2 - 2t\nabla f \cdot \nabla(|\nabla f|^2 - f_t) + (\alpha - 1)t|\nabla f|_t^2$$

$$= \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2Kt|\nabla f|^2$$

$$- 2t\nabla f \cdot \nabla(|\nabla f|^2 - \alpha f_t) = -2\nabla f \cdot \nabla F + \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2$$

$$- f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2Kt|\nabla f|^2.$$

证毕.

定理 4.1 设 M 是可能具边界的紧致 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，$u(x, t)$ 是 M 上热方程的非负解

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0. \tag{4.1.6}$$

当 $\partial M\neq\varnothing$ 时,假定 ∂M 是凸的，即 ∂M 的第二基本形 $\mathrm{II}\geqslant 0$，此时 $u(x,t)$ 满足 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial v}=0,\quad 在\ \partial M\times(0,\infty),$$

其中 $\frac{\partial}{\partial v}$ 表 ∂M 的外法线方向,则在 $M\times(0,\infty)$ 上 u 满足下列梯度估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n}{2t}. \tag{4.1.7}$$

证明：用 $u+\varepsilon$ 代替 u，无妨设 $u>0$，令 $f=\log u$，ε 是任意小的小数．在引理 1 中取 $\alpha=1$，即 $F(x,t)=t(|\nabla f|^2-f_t)$，

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}=|\nabla f|^2-f_t=\frac{F_t}{t}.$$

因此，证明定理相当于证明 $F\leqslant\frac{n}{2}$，下面分两种情况:

1° $\partial M=\varnothing$，如果 $F(x,t)\leqslant\frac{n}{2}$，则定理已经证明．否则对某一 $T>0$，$\max\limits_{M\times[0,T]}F>\frac{n}{2}$．设极大值在 $(x_0,t_0)\in M\times(0,T]$ 达到，由 $F(x,0)=0$，应用极大值原理，在 (x_0,t_0) 有

$$\Delta F(x_0,t_0)\leqslant 0,\quad T\geqslant t_0>0,$$

$$\nabla F(x_0,t_0)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x_0,t_0)\geqslant 0,$$

最后式是因为可能 $t_0=T$．由引理1,在 (x_0,t_0) 点,

$$0\geqslant\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)F\geqslant\frac{2t_0}{n}\frac{F^2}{t_0^2}-\frac{F}{t_0}=\frac{2F}{nt_0}\left(F-\frac{n}{2}\right).$$

由此，$F(x_0,t_0)\leqslant\frac{n}{2}$，得到矛盾.

2° $\partial M\neq\varnothing$，根据假设，$\partial M$ 凸,而且 $u(x,t)$ 在 ∂M 上满足 Neumann 条件.

证明的过程同上面一样，如果 x_0 是 M 的内点，则得到矛盾，因此只能 $x_0\in\partial M$.

在 x_0 取局部正规标架，使 $e_1=\dfrac{\partial}{\partial\nu}$，$\nu$ 是外法线方向，因为 F 满足

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)F\geqslant-2\nabla f\cdot\nabla F+\frac{2}{nt}F\left(F-\frac{n}{2}\right),\quad(4.1.8)$$

强极大值原理成立，因此

$$\frac{\partial F}{\partial\nu}(x_0,\ t_0)>0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\nu}=F_1=t\left(2\sum_i f_jf_{j1}-f_{t1}\right)=t(2\sum f_jf_{j1}-f_{1t})$$

$$=2t\sum_{j>1}f_jf_{j1},\quad(4.1.9)$$

这是因为根据 Neumann 条件，在 ∂M 上，

$$f_1=\frac{\partial}{\partial\nu}(\log u)=\frac{u_\nu}{u}\equiv0.$$

因而在 ∂M 上

$$0=df_1=\sum_{j>1}f_{1j}\omega^j+\sum_{j>1}f_j\omega_1^j$$

$$=\sum_{j>1}f_{1j}\omega^j+\sum_{j,k>1}f_jh_{jk}\omega^k,$$

因此

$$f_{1j}=f_{j1}=-\sum_{k>1}f_kh_{kj},$$

代入 (4.1.9)，在 (x_0,t_0) 点，

$$0<\frac{\partial F}{\partial\nu}=2t_0\left(\sum_{j>1}f_jf_{j1}\right)$$

$$=-2t_0\sum_{j,k>1}h_{kj}f_kf_j=-2t_0\mathrm{II}(\nabla f,\ \nabla f),$$

和 $\mathrm{II}\geqslant0$ 相矛盾.

定理 4.2 设 M 是完备的 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant-k$，以 M 中任一固定点 O 为中心，$2R$ 为半径的测地球记为 B_{2R}. 设

$u(x,t)$ 是定义在 $B_{2R}\times[0,\infty]$ 上热方程的正解

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0.$$

取 $\alpha>1$，则在 B_R 中下列梯度估计成立：

$$\sup_{B_R}\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{u_t}{u}\right)\leqslant\frac{C\alpha^2}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}+\sqrt{k}R\right)$$

$$+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha^2}{2t},\tag{4.1.10}$$

其中 C 为仅依赖于 n 的常数.

证明：仿前，令 $f=\log u$，$F=t(|\nabla f|^2-\alpha f_t)$，

则
$$\sup_{B_R}\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{u_t}{u}\right)=\sup_{B_R}\frac{F}{t},$$

取 cut-off 函数 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 使 $\operatorname{supp}\psi\subseteq[-2,2]$，$1\geqslant\psi\geqslant0$，并且当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时 $\psi(t)\equiv1$，此外还满足

$$\psi'\leqslant0,\ \psi''\geqslant-C_1,\ \frac{|\psi'|^2}{\psi}\leqslant C_2,\tag{4.1.11}$$

其中 C_1，C_2 为两绝对常数.

M 中以 0 为基点的距离函数记作 $\rho(x)$，再令

$$\varphi(x)=\psi\left(\frac{\rho(x)}{R}\right),\tag{4.1.12}$$

则 $\operatorname{supp}\varphi\subseteq B_{2R}$，而 $\varphi|_{B_R}\equiv1$.

我们将对函数 φF 应用极大值原理，因为 $\varphi=\psi\left(\frac{\varphi(x)}{R}\right)$，它在 0 的割迹 (cut locus) 上将失去光滑性而只是 Lipschitz 连续. 但正如我们在第一章已经解释过的那样，利用 support 函数的方法，在应用极大值原理时我们不失一般性地可以假定 φ 在该点是可微的.

设 φF 在 (x_0,t_0) 达到它在 $B_{2R}\times[0,T]$ 的极大值. 显然可设 $\varphi F(x_0,t_0)>0$（否则 $F\leqslant0$，定理自然成立）. 因此 $x_0\in B_{2R}$，$t_0>0$，根据极大值原理，在 (x_0,t_0) 点有

$$0=\nabla(\varphi F)=F\nabla\varphi+\varphi\nabla F,\tag{4.1.13}$$

$$\Delta(\varphi F) \leqslant 0, \tag{4.1.14}$$

$$\frac{\partial(\varphi F)}{\partial t} = \varphi F_t \geqslant 0. \tag{4.1.15}$$

以下的计算均在 (x_0, t_0) 进行，不再一一注明. 由 (4.1.13), $\nabla F = -F\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$, 再由 (4.1.14),

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta(\varphi F) &= \Delta\varphi \cdot F + \varphi\Delta F + 2\nabla\varphi \cdot \nabla F \\ &= \Delta\varphi \cdot F + \varphi\Delta F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

由 (4.1.11),

$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} = \frac{|\phi'|^2|\nabla\rho|^2}{R^2\phi} = \frac{|\phi'|^2}{R^2\phi} \leqslant \frac{C_2}{R^2}, \tag{4.1.17}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\phi''|\nabla\rho|^2}{R^2} + \frac{\phi'\Delta\rho}{R} = \frac{\phi''}{R^2} + \frac{\phi'}{R}\Delta\rho \\ &\geqslant -\frac{C_1}{R^2} - \frac{\sqrt{C_2}}{R}\Delta\rho. \end{aligned}$$

当 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$ 时，由 Laplace 算子比较定理 (1.17),

$$\Delta\rho \leqslant (n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}\rho),$$

得

$$\Delta\varphi \geqslant -\frac{C_3}{R}(n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}R) - \frac{C_1}{R^2},$$

$$\xlongequal{\text{记作}} -A(n, k, R), \tag{4.1.18}$$

代入 (4.1.16), 并由引理 1,

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta(\varphi F) &\geqslant -A(n, k, R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \varphi\Delta F \\ &\geqslant -A(n, k, R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \varphi(F_t - 2\nabla f \cdot \nabla F \\ &\quad + \frac{2t}{n}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - (|\nabla f|^2 - \alpha f_t) - 2kt|\nabla f|^2). \end{aligned}$$

但 $\varphi F_t = (\varphi F)_t \geqslant 0$, $-2\varphi\nabla F \cdot \nabla f = 2F\nabla\varphi \cdot \nabla f$, 上式变成

$$0 \geqslant -A(n, k, R)F - 2F\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + 2F\nabla\varphi \cdot \nabla f$$

$$+\varphi\left[\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)-2kt|\nabla f|^2\right],$$

$$0\geqslant -A(n,k,R)\varphi F-2F|\nabla\varphi|^2+2\varphi F\nabla f\cdot\nabla\varphi$$

$$+\varphi^2\left[\frac{2t}{n}(|\nabla f|^2-f_t)^2-(|\nabla f|^2-\alpha f_t)-2kt|\nabla f|^2\right]$$

$$=(\varphi F)\left[-A(n,k,R)-2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right]+2\varphi F\nabla f\cdot\nabla\varphi$$

$$+\frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2-f_t)^2-nk|\nabla f|^2]-\frac{\varphi F\cdot\varphi}{t}$$

$$\geqslant(\varphi F)\left[-A(n,k,R)-\frac{2|\nabla\varphi|^2}{\varphi}-\frac{\varphi}{t}\right]$$

$$-2\varphi F|\nabla f||\nabla\varphi|+\frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2-f_t)^2-nk|\nabla f|^2].$$

利用 $1\geqslant\varphi\geqslant 0$，及 (4.1.17) $|\nabla\varphi|\leqslant\sqrt{C_2}R^{-1}\varphi^{\frac{1}{2}}$，得

$$0\geqslant(\varphi F)\left[-A(n,k,R)-\frac{2C_2}{R^2}-\frac{1}{t}\right]$$

$$-2\varphi F\frac{\sqrt{C_2}}{R}\varphi^{\frac{1}{2}}|\nabla f|+\frac{2t}{n}\varphi^2[(|\nabla f|^2-f_t)^2$$

$$-nk|\nabla f|^2];$$

两边乘以 t，令 $\tilde{A}(n,k,R)=A(n,k,R)+\frac{2C_2}{R^2}$，则

$$0\geqslant\varphi F(-1-t\tilde{A}(n,k,R))-2tF\varphi^{3/2}\frac{\sqrt{C_2}}{R}|\nabla f|$$

$$+\frac{2t^2}{n}[(\varphi|\nabla f|^2-\varphi f_t)^2-nk\varphi^2|\nabla f|^2].\quad(4.1.19)$$

令 $y=\varphi|\nabla f|^2$，$z=\varphi f_t$，则 $\varphi^2|\nabla f|^2=\varphi y\leqslant y$，同时

$$y^{\frac{1}{2}}(y-\alpha z)=\varphi^{\frac{1}{2}}|\nabla f|(\varphi|\nabla f|^2-\varphi\alpha f_t)=\varphi^{3/2}\frac{F}{t}|\nabla f|.$$

将上述代入 (4.1.19)，得

$$0\geqslant\varphi F(-1-t\tilde{A})-\frac{2\sqrt{C_2}}{R}t^2y^{1/2}(y-\alpha z)$$

$$+\frac{2t^2}{n}[(y-z)^2-nky]=\varphi F(-1-t\tilde{A}(n,k,R))$$

$$+\frac{2t^2}{n}\left[(y-z)^2 - nky - \frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{1/2}(y-\alpha z)\right],$$

再由

$$(y-z)^2 = \left[\frac{1}{\alpha}(y-\alpha z) + \frac{\alpha-1}{\alpha}y\right]^2 = \frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2$$

$$+\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 y^2 + \frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}y(y-\alpha z),$$

$$(y-z)^2 - nky - \frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{1/2}(y-\alpha z) = \frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2$$

$$+\left[\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2}y^2 - nky\right] + \left[\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}y - \frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{1/2}\right](y-\alpha z).$$

对 $\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 y^2 - nky$ 及 $\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}y - \frac{2n\sqrt{C_2}}{R}y^{1/2}$ 应用熟知的不等式

$$ax^2 - bx \geqslant -\frac{b^2}{4a} \quad (a, b > 0),$$

得

$$0 \geqslant \varphi F(-1 - t\tilde{A}(n, k, R)) + \frac{2t^2}{n}\left[\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2\right.$$

$$\left. - \frac{n^2k^2\alpha^2}{4(\alpha-1)^2} - \frac{n^2C_2\alpha^2}{2R^2(\alpha-1)}(y-\alpha z)\right],$$

再由 $t(y-\alpha z) = \varphi t(|\nabla f|^2 - \alpha f_t) = \varphi F$，上式即

$$0 \geqslant \varphi F(-1 - t\tilde{A}(n, k, R)) + \frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2$$

$$-\frac{C_2 n\alpha^2}{R^2(\alpha-1)}(\varphi F)t - \frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)^2}t^2. \qquad (4.1.20)$$

但

$$\tilde{A}(n, k, R) = A(n, k, R) + \frac{2C_2}{R^2} = \frac{C_1}{R^2}$$

$$+\frac{C_3}{R}(n-1)\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}R) + \frac{2C_2}{R^2}$$

$$\leqslant \frac{C_4}{R}\left(\frac{1}{R}+\sqrt{k}\right),$$

其中 C_4 仅依赖于 n，(4.1.20) 成为

$$0 \geqslant \frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2-(\varphi F)\left[1+\frac{C_4 t}{R}\left(\frac{1}{R}+\sqrt{k}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{C_2 n\alpha^2}{R^2(\alpha-1)}t\right]-\frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)}t^2 \geqslant \frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2$$

$$-(\varphi F)\left[1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t\right]$$

$$-\frac{nk^2\alpha^2}{2(\alpha-1)^2}t^2.$$

将上式看作 φF 的二次三项式，则 φF 不大于该二次三项式的大根，因此

$$\varphi F \leqslant \frac{1}{4}\left\{1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(1+\frac{C_5 t}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)\right)^2+\frac{4k^2}{(\alpha-1)^2}t^2}\right\}n\alpha^2$$

$$\leqslant 2\left[1+\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t+\frac{2k}{\alpha-1}t\right]\frac{n\alpha^2}{4}$$

$$=\frac{n\alpha^2}{2}+\frac{n\alpha^2}{2}\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}t.$$

以上的全部计算都是在极大值点 $(x_0, t_0)\in B_{2R}\times[0, T]$ 上进行的，因而

$$(\varphi F)(x, T)\leqslant(\varphi F)(x_0, t_0)\leqslant\frac{n\alpha^2}{2}+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}t_0$$

$$+\frac{n\alpha^2}{2}\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)t_0\leqslant\frac{n\alpha^2}{2}+\frac{n\alpha^2}{2}$$

$$\times\frac{C_5}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right)T+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}T,$$

限制在 B_R 上 $(\varphi\equiv 1)$，即得

$$\sup_{x\in B_R}(|\nabla f|^2-\alpha f_t)(x, T)\leqslant\frac{n\alpha^2}{2T}+\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}$$

$$+\frac{C_5 n\alpha^2}{2R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-1}+R\sqrt{k}\right),$$

而 T 是任选的，因此定理证毕。

系. 对非紧的、不具边界的完备的 Riemann 流形 M，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，如 $u(x,t)$ 是 M 上热方程的正解，则下列估计成立：$\forall\alpha>1$，

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n\alpha^2 k}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha^2}{2t},\tag{4.1.21}$$

特别，当 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 时，有

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\leqslant\frac{n}{2t}.\tag{4.1.22}$$

证明：在定理 4.2 中让 $R\to\infty$ 得 (4.1.21)，在 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 时，$k=0$，故可令 $\alpha\to 1$ 而得 (4.1.22)。

将定理 4.1 和定理 4.2 的证明结合起来，可得

定理4.3. 设 M 是紧致的 Riemann 流形，具有边界 ∂M（可能是 $\varnothing$），$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，当 $\partial M\neq\varnothing$ 时，假定 ∂M 是凸的，而作为热方程正解的 $u(x,t)$ 满足 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$（在 $\partial M\times[0,\infty)$ 上），则 $\forall\alpha>1$，下面的估计成立：

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\alpha u_t}{u}\leqslant\frac{nk\alpha^2}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha^2}{2t}.\tag{4.1.23}$$

§ 2. Harnack 不等式与热核的估计

作为前节梯度估计的应用，可以方便地建立热方程解的 Harnack 不等式，并由此而导出热方程基本解的上、下界的估计.

定理 4.4. 设 M 是完备的 n 维 Riemann 流形，非紧，不具边界. $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$；$k\geqslant 0$. 如果 $u(x,t)$ 是 $M\times[0,\infty)$ 上热方程的正解，则对任何 $\alpha>1$，$x_1,x_2\in M$，$0<t_1<t_2<+\infty$，下列不等式成立：

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}\exp\left(\frac{\alpha d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}\right.$$

$$+\frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\Big). \tag{4.2.1}$$

证明：在 M 中取连接 x_1 与 x_2 的极小测地线 $\gamma:[0,1]\to M$，使 $\gamma(0)=x_2$，$\gamma(1)=x_1$，在 $M X(0,\infty)$ 中定义曲线 $\eta:[0,1]\to M\times(0,\infty)$

$$\eta(s)=(\gamma(s),\ (1-s)t_2+st_1),$$

则 $\eta(0)=(x_2,t_2)$，$\eta(1)=(x_1,t_1)$。

令 $f=\log u(x,t)$，则

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)=\int_0^1\frac{df(\eta(s))}{ds}ds$$

$$=\int_0^1\Big\{\langle\dot\gamma,\nabla f\rangle-(t_2-t_1)f_t\Big\}ds$$

$$\leqslant\int_0^1(|\dot\gamma||\nabla f|-(t_2-t_1)f_t)ds.$$

如记 $\rho=d(x_1,x_2)$，则 $|\dot\gamma|=\rho$。对 f_t 引用梯度估计 (4.1.21)，

$$-f_t\leqslant\frac{1}{\alpha}\Big(A+\frac{B}{t}-|\nabla f|^2\Big),$$

$$A=\frac{n\alpha^2k}{2(\alpha-1)},\quad B=\frac{n\alpha^2}{2},$$

则

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)\leqslant\int_0^1\Big(\rho|\nabla f|-\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}$$

$$\times\Big(A+\frac{B}{t}-|\nabla f|^2\Big)\Big)ds,$$

其中 $t=(1-s)t_2+st_1$。将被积项看成 $|\nabla f|$ 的二次三项式，其极大值为

$$\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}A+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}B\cdot\frac{1}{t}.$$

所以

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)\leqslant\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}A$$

$$+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}B\int_0^1\frac{ds}{(1-s)t_2+st_1}=\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}$$

$$+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}\frac{n\alpha^2k}{2(\alpha-1)}+\frac{(t_2-t_1)}{\alpha}B\frac{1}{t_2-t_1}$$

$$\times\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)=\frac{\alpha d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\frac{(t_2-t_1)n\alpha k}{2(\alpha-1)}+\frac{n\alpha}{2}\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right),$$

再取 exp，即得定理．

系． 如果 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，在 (4.2.1) 中 $k=0$，令 $\alpha\to 1$，即有

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}\right).\tag{4.2.2}$$

系． 假设同定理 4.4，则有以下的次中值不等式：

$$u(x,t_1)\leqslant\left(\hat{\int}_{B_x(R)}u^p(y,t_2)dy\right)^{1/p}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}$$

$$\times\exp\left(\frac{\alpha R^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right),\tag{4.2.3}$$

其中 $p>0$，$\alpha>1$，$0<t_1<t_2<+\infty$，$\hat{\int}_{B_x(R)}$ 表示积分平均，即

$$\hat{\int}_{B_x(R)}g=(\mathrm{Vol}(B_x(R)))^{-1}\int_{B_x(R)}g.$$

其证明是明显的．

定理 4.4 中的 Harnack 不等式是对非紧、完备的 Riemann 流形而言的，同样的定理对具边界的紧致流形也成立，因为方法完全类似，我们只作叙述而不再重复证明．

定理 4.5． 设 M 是紧致可能带边界的 Riemann 流形，或者 $\partial M=\varnothing$；或者 $\partial M\neq\varnothing$，但 ∂M 是凸的，即 ∂M 的第二基本形 $\geqslant 0$．又 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，$k\geqslant 0$．设 $u(x,t)$ 是 $M\times[0,\infty)$ 上热方程的正解（在 $\partial M\neq\varnothing$ 时，还要求它满足 Neumann 边界条件），则对任何 $\alpha>1$，下述 Harnack 不等式成立：

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}\exp\left(\frac{\alpha d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}\right.$$

$$\left.+\frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right),\tag{4.2.4}$$

其中 $x_1,x_2\in M$，$0<t_1<t_2<+\infty$，$d(x_1,x_2)$ 表示 x_1，x_2 在 M

中的距离.

同样,当 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$ 时,(4.2.2) 成立.

在定理 4.5 条件下,(4.2.3) 也成立:

$$u(x,t_1)\leqslant\left(\int_{B_x(R)}^{\wedge}u^p(y,t_2)dy\right)^{1/p}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{p}}\times\exp\left(\frac{\alpha R^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}(t_2-t_1)\right),$$

但是要求 $B_x(2R)\cap\partial M=\varnothing$.

现在我们来给出热方程基本解的上、下界的估计. 在讨论中,除了上述 Harnack 不等式外,下面的引理起着重要的作用.

引理 2. 设 M 是完备的非紧 Riemann 流形, $u(x,t)$ 是热方程的 L^2 解,初值为 $u_0(x)$:

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases}\tag{4.2.5}$$

任意固定 $y\in M$, 记 $B_y(R)$ 为以 y 为中心, R 为半径的测地球. 又设 $g(x,t)\in C^1(M\times[0,\infty))$, 并满足

$$\frac{1}{2}|\nabla g|^2+g_t=0,\quad g\leqslant 0,\tag{4.2.6}$$

则对任何 $R>0$, $T>0$, 都有

$$\int_{B_y(R)}e^{\frac{1}{2}g(x,T)}u^2(x,T)dx\leqslant\int_M e^{\frac{1}{2}g(x,0)}u_0^2(x)dx.\tag{4.2.7}$$

证明: 取 $\varphi\in C_0^\infty(M)$, 满足

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in B_y(R),\\ 0, & x\notin B_y(R+k),\end{cases}$$

$$|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C}{k},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 1,$$

此处 C 为一绝对常数,取 $\varepsilon>2$, 令 $\tilde{g}=\frac{1}{\varepsilon}g$.

因为 $\mathrm{supp}\,\varphi\subseteq B_y(R+k)$, 由 Green 公式,

$$0=2\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\tilde g} u\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)dxdt$$

$$=2\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\tilde g} u\Delta u dxdt-2\int_M \varphi^2\int_0^T e^{\tilde g} u\frac{\partial u}{\partial t}dtdx$$

$$=-2\int_0^T\int_M \nabla(\varphi^2 e^{\tilde g} u)\cdot\nabla u-\int_M \varphi^2\int_0^T e^{\tilde g} du^2 dx$$

$$=-\int_0^T\int_M [4\varphi e^{\tilde g} u\nabla\varphi\cdot\nabla u+2\varphi^2 e^{\tilde g} u\nabla \tilde g\cdot\nabla u$$

$$+2\varphi^2 e^{\tilde g}|\nabla u|^2]-\int_M \varphi^2[e^{\tilde g} u^2(x,t)]_0^T dx$$

$$+\int_0^T\int_M \varphi^2 u^2 e^{\tilde g}\tilde g_t dxdt.$$

由 Schwarz 不等式，

$$0\leqslant\int_0^T\int_M e^{\tilde g}\left[\frac{2(\varepsilon-2)}{\varepsilon}\varphi^2|\nabla u|^2+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}u^2|\nabla\varphi|^2\right]dxdt$$

$$+\int_0^T\int_M e^{\tilde g}\varphi^2\left[\frac{\varepsilon}{4}u^2|\nabla\tilde g|^2+\frac{4}{\varepsilon}|\nabla u|^2\right]dxdt$$

$$-2\int_0^T\int_M e^{\tilde g}\varphi^2|\nabla u|^2 dxdt-\int_M \varphi^2[e^{\tilde g}u^2]_0^T dx$$

$$+\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\tilde g} u^2\tilde g_t dxdt$$

$$=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}\int_0^T\int_M e^{\tilde g}|\nabla\varphi|^2 u^2 dxdt+\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\tilde g}$$

$$\times\left[\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\tilde g|^2+\tilde g_t\right]u^2-\int_M \varphi^2[e^{\tilde g}u^2]_0^T dx$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2}\cdot\frac{C}{k^2}\int_0^T\int_M e^{\tilde g}u^2 dxdt+\int_0^T\int_M \varphi^2 e^{\tilde g}$$

$$\times\left[\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\tilde g|^2+\tilde g_t\right]u^2-\int_M \varphi^2[e^{\tilde g}u^2]_0^T dx,$$

而

$$\frac{\varepsilon}{4}|\nabla\tilde g|^2+\tilde g_t=\frac{1}{4\varepsilon}|\nabla g|^2+\frac{1}{\varepsilon}g_t$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{4}|\nabla g|^2+g_t\right)=0,$$

所以

$$\int_M \varphi^2 [e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2]_0^T \leqslant \frac{2\varepsilon}{\varepsilon-2} \frac{C}{k^2} \int_0^T \int_M e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2 dx dt.$$

因 $u \in L^2$, $g \leqslant 0$, 上式中令 $k \to \infty$, 即得

$$\int_M \varphi^2 [e^{\frac{g}{\varepsilon}} u^2]_0^T \leqslant 0.$$

再令 $\varepsilon \to 2$, 就有

$$\int_M \varphi^2 e^{\frac{1}{2}g(x,T)} u^2(x, T) dx \leqslant \int_M \varphi^2 e^{\frac{1}{2}g(x,0)} u(x, 0) dx,$$

因在 $B_y(R)$ 上 $\varphi \equiv 1$, 在 M 上 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, 最后得

$$\int_{B_y(R)} e^{\frac{1}{2}g(x,T)} u^2(x, T) dx \leqslant \int_M e^{\frac{1}{2}g(x,0)} u_0(x) dx.$$

系 1. 从上式中自然得出，如果 $u(x, 0) \equiv 0$, 则 $u(x, t) \equiv 0$, $\forall t$. 此事实表明，热方程 (4.1.28) 当初值 $u(x, 0) \in L^2(M)$ 时，其解是唯一的。

注：当初值 $\in L^p(M)$ $(1 < p < \infty)$ 时，热方程解的唯一性 (只假定 M 是完备的)是 Strichartz 证明的。

当初值为 $L^\infty(M)$ 函数(即有界函数)时，仅假定 M 完备已经不能保证解的唯一性. P. Li 证明，如果 $\mathrm{Ric}(M)$ 最多以 $-cr^2$ 下降的话，那么热方程的解仍然是唯一的. 证明的方法是在引理 2 的基础上再作进一步的分析.

系 2. 完备 Riemann 流形 M 的热方程的基本解记为 $H(x, y, t)$, 任取 $\rho > 0$, $T > 0$, 令

$$F(y, t) = \int_{M \setminus B_x(\rho)} H(x, \xi, T) H(\xi, y, t) d\xi, \tag{4.2.8}$$

则对任何 $\delta > 0$, $R > 0$, 都有

$$\int_{B_x(R)} F^2(y, (1+\delta)T) dy \leqslant \exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}\right) \exp\left(\frac{-\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right) \cdot \int_{M \setminus B_x(\rho)} H^2(x, \xi, T) d\xi. \tag{4.2.9}$$

证明：由 $F(y, t)$ 的定义，它显然是热方程的解，而其初值，由热核的 δ-函数性质，为

$$F(y,0)=\begin{cases}H(x,y,T), & y\in M\setminus B_x(\rho),\\ 0, & y\in B_x(\rho),\end{cases}$$

它在 $L^2(M)$ 之中.

取(固定 x 和 T),

$$g(y,t)=\frac{-r^2(x,y)}{(1+2\delta)T-t},$$

则它满足

$$\frac{1}{4}|\nabla g|^2+g_t=0.$$

由引理 2, $\forall t\leqslant(1+2\delta)T$,

$$\int_{B_x(R)}e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2(x,y)}{(1+2\delta)T-t}}F^2(y,t)dy\leqslant\int_M e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2(x,y)}{(1+2\delta)T}}F^2(y,0).$$

取 $t=(1+\delta)T$, 则

$$e^{-\frac{R^2}{2\delta T}}\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)dy\leqslant\int e^{-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}}H^2(x,y,T)dy$$

$$\Rightarrow\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)dy$$

$$\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}}\int_{M\setminus B_x(\rho)}H^2(x,y,T)dy,$$

因此 (4.2.9) 得证. 根据 $F(y,T)$ 的定义 (4.2.8), 上式也可以写做

$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}}F(x,T).\tag{4.2.10}$$

如果取 $\rho=0$, 即令

$$F(y,T)=\int_M H^2(x,y,T)dx,\tag{4.2.11}$$

则对任何 $\delta>0$, $T>0$, $R>0$ 有

$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}F(x,T).\tag{4.2.12}$$

下面是本节的主要结果之一:

定理 4.6. 设 M 是完备的无边界的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$, $k\geqslant 0$. 设 $H(x,y,t)$ 是热方程

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0$$

的基本解，任给 $\delta\in(0,1)$，则在 M 上下式成立：

$$H(x,y,t)\leqslant C(\delta,n)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\,V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\times\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4+\delta)t}+C_1\delta kt\right),\quad(4.2.13)$$

这里 $V_x(R)$ 表示 $B_x(R)$ 的体积，即 $V_x(R)=\mathrm{Vol}(B_x(R))$. $C(\delta,n)$ 是仅依赖于 δ, n 的常数(当 $\delta\to 0$ 时，$C(\delta,n)\to\infty$)，C_1 只依赖于 n.

证明：令

$$F(y,t)=\int_M H(x,\xi,T)H(\xi,y,t)d\xi,$$

则由 (4.1.35)，对任意 $R>0$, $\delta>0$，有

$$\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)dy\leqslant e^{\frac{R^2}{2\delta T}}F(x,T),\quad(4.2.14)$$

$F(y,t)$ 显然就是热方程的正解，因此它满足 Harnack 不等式 (4.2.3) (取 $t_1=T$, $t_2=(1+\delta)T$)，.

$$F^2(x,T)\leqslant V_x^{-1}(R)\left[\int_{B_x(R)}F^2(y,(1+\delta)T)\right]\times(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\frac{\alpha R^2}{2\delta T}+\frac{n\alpha k}{\alpha-1}\delta T\right),$$

其中 $\alpha>1$，再由 (4.2.14) 即得

$$F(x,T)\leqslant V_x^{-1}(R)(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\frac{(1+\alpha)R^2}{2\delta T}+\frac{n\alpha k}{\alpha-1}\delta T\right).$$

取 $R^2=2T$，得

$$\begin{aligned}F(x,T)=\int_M H^2(x,y,T)dy&\leqslant V_x^{-1}(\sqrt{2T})(1+\delta)^{n\alpha}\times\exp\left(\frac{1+\alpha}{\delta}\right)\exp\left(\frac{\alpha nk}{\alpha-1}\delta T\right)\\&=C(n,\delta,\alpha)V_x^{-1}(\sqrt{2T})\exp\left(\frac{\alpha nk}{\alpha-1}\delta T\right),\end{aligned}$$

(4.2.15)

其中 $C(n, \delta, \alpha)=(1+\delta)^{n\alpha}\exp\left(\frac{1+\alpha}{\delta}\right)$. 根据热方程解的唯一性导出热核的半群性质：$\forall 0<s<t$, $H(x, y, t)=\int_M H(x, z, s)\cdot H(z, y, t-s)dz$，再令 $s=\frac{t}{2}$ 得

$$
\begin{aligned}
H(x, y, t) &= \int_M H\left(x, z, \frac{t}{2}\right)H\left(z, y, \frac{t}{2}\right)dz \\
&\leqslant \left(\int_M H^2\left(x, z, \frac{t}{2}\right)dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M H^2\left(z, y, \frac{t}{2}\right)dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C(h, \delta, \alpha)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\exp(C_1 k\delta t),
\end{aligned}
\tag{4.2.16}
$$

其中 $C_1=\frac{\alpha n}{\alpha-1}$. 比较定理的结论，易见当

$$r^2(x, y)\leqslant 4t$$

时，(4.2.16) 已经蕴含结论：

$$\exp(C_1 k\delta t)\leqslant e\cdot\exp\left(C_1 k\delta t-\frac{r^2(x, y)}{4t}\right),$$

因此只要看 $4t<r^2(x, y)$ 时的情况。

设 $r^2(x, y)>4t$，令

$$F_\rho(y, t)=\int_{M\setminus B_x(\rho)} H(x, \xi, T)H(\xi, y, t)d\xi, \tag{4.2.17}$$

则由 (4.2.8)

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_x(R)} F_\rho^2(y, (1+\delta)T)dy \\
&\leqslant \exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right)\int_{M\setminus B_x(\rho)} H^2(x, y, T)dy \\
&= \exp\left(\frac{R^2}{2\delta T}-\frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right)F_\rho(x, T).
\end{aligned}
\tag{4.2.18}
$$

$F_\rho(y, t)$ 作为热方程的正解，满足 Harnack 不等式 (4.2.3)

$$F_\rho^2(x, T)\leqslant V_x^{-1}(R)\int_{B_x(R)} F^2(y, (1+\delta)T)dy\cdot(1+\delta)^{n\alpha}$$

$$\times \exp\left(\frac{\alpha R^2}{2\delta T} + \frac{\alpha n k}{\alpha - 1}\delta T\right).$$

与 (4.2.18) 结合起来，得

$$F_\rho(x, T) \leqslant (1+\delta)^{n\alpha} V_x^{-1}(R) \exp\left(\frac{(1+\alpha)R^2}{2\delta T} + \frac{\alpha n k}{\alpha - 1}\delta T - \frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right), \tag{4.2.19}$$

取 $R^2 = (1+\delta)^{-1}T$，得

$$F_\rho(x, T) \leqslant C(\delta, \alpha) V_x^{-1}(\sqrt{(1+\delta)^{-1}T}) \cdot \exp\left(\frac{\alpha n k}{\alpha - 1}\delta T - \frac{\rho^2}{2(1+2\delta)T}\right).$$

取以 y 为中心，$r(x, y) - \rho (0 < \rho < r(x, y))$ 为半径的球 $B_y(r - \rho)$，则 $B_y(r-\rho) \subseteq M \setminus B_x(\rho)$，由 Harnack 不等式，并且取 $T = (1+\delta)t$，

$$\begin{aligned}
H(x, y, t) &\leqslant \left(\int_{B_y(r-\rho)}^{\wedge} H^2(x, \xi, T) d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \cdot \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4(T-t)} + \frac{\alpha n k}{2(\alpha-1)}(T-t)\right) \\
&\leqslant V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho)(1+\delta)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} + \frac{\alpha n k}{2(\alpha-1)}\delta t\right)\left(\int_{M\setminus B_x(\rho)} H^2(x, \xi, T) d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho)(1+\delta)^{\frac{n\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} + \frac{n\alpha k}{2(\alpha-1)}\delta t\right) F_\rho(x, T)^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\delta, \alpha) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \\
&\quad \times V_y^{-\frac{1}{2}}(r-\rho) \exp\left(\frac{\alpha n k(2+\delta)\delta}{2(\alpha-1)} t + \frac{\alpha(r-\rho)^2}{4\delta t} - \frac{\rho^2}{4(1+2\delta)(1+\delta)t}\right).
\end{aligned}$$

最后一步由 (4.2.19) 得出．取 ρ，使 $r - \rho = \sqrt{t}$，则

$$H(x, y, t) \leqslant C(\delta, \alpha) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left(C_1 \delta k t - \frac{\rho^2}{4(1+2\delta)(1+\delta)t} \right)$$
$$\leqslant C(\delta, \alpha) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left(C_1 \delta k t - \frac{r^2(x, y)}{4(1+2\delta)(1+\delta)^2 t} \right).$$

最后一步用到 Schwarz 不等式

$$\rho^2 = (r - \sqrt{t})^2 \geqslant \frac{r^2(x, y)}{1+\delta} - \frac{t}{\delta}.$$

定理证毕.

对可能具边界的紧致 Riemann 流形，其热核有相同类型的定理. 其证明和定理 4.6 相似，我们仅限于写出其结果:

定理 4.7. 设 M 是可有边界的紧致 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant -k$, $k \geqslant 0$，如果 $\partial M \neq \phi$，则假定 ∂M 是凸的，M 的热核 $H(x, y, t)$ 指满足 Neumann 条件者，则对任何 $\varepsilon \in (0, 1)$，有

$$H(x, y, t) \leqslant C(\varepsilon, \eta) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left(-\frac{r^2(x, \eta)}{(4+\varepsilon)t} + C_1 \varepsilon k t \right), \tag{4.2.20}$$

其中 C_1 仅依赖于 n, $\varepsilon \to 0$ 时，$C(\varepsilon, n) \to \infty$. $V_x(R)$ 表示 $\mathrm{Vol} B_x(R)$.

关于 $H(x, y, t)$ 的下界，我们有以下结果:

定理 4.8. 设 M 是完备的无边界的 Ritmann 流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，则热方程的基本解 $H(x, y, t)$ 满足

$$H(x, y, t) \geqslant C(\varepsilon, n) V_x^{-1}(\sqrt{t}) \exp\left(\frac{-r^2(x, y)}{(4-\varepsilon)t} \right) \tag{4.2.21}$$

及

$$H(x, y, t) \geqslant C(\varepsilon, n) V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left(\frac{-r^2(x, y)}{(4-\varepsilon)t} \right). \tag{4.2.22}$$

证明：在 Harnack 不等式 (4.2.1) 中，取 $k=0$, $\alpha=1$，则

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{r^2(x,y)}{4(t_2-t_1)}\right).$$

由此得：

$$\int_{B_x(R)}H(z,y,(1-\varepsilon)t)dz$$
$$\leqslant V_x(R)H(x,y,t)(1-\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{R^2}{4\varepsilon t}\right).\quad(4.2.23)$$

取 $\varphi=\varphi(r(x,t))\in C_0^\infty(M)$，使

$$\varphi(r(x,z))=\begin{cases}1, & z\in B_x(\sqrt{1-\varepsilon}R),\\ 0, & z\notin B_x(R),\end{cases}$$

并 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0$，令

$$F(y,t)=\int_M\varphi(r(x,z))H(z,y,t)dz,$$

它显然是热方程的正解，其初值为 $F(y,0)=\varphi(r(x,y))$,

$$F(y,t)=\int_M\varphi(r(x,z))H(z,y,t)dz$$
$$=\int_{B_x(R)}\varphi(r(x,z))H(z,y,t)dz$$
$$\leqslant\int_{B_x(R)}H(z,y,t)dz.$$

由 (4.2.23) 可见，欲估计 $H(x,y,t)$ 的下界，只要估计 $F(y,(1-\varepsilon)t)$ 即可．估计 $F(y,t)$ 下界的方法采用 Cheeger 和 Yau 关于热核函数比较定理的证法(第三章，§2，定理 2)．将 Ric $\geqslant 0$ 的流形 M 和 $\mathbf{R}^n$ 相比较，记 $\mathbf{R}^n$ 中以 $\varphi(r)$ 为初值的热方程的解为 $\bar{F}(y,t)$ 即

$$\begin{cases}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar{F}(y,t)=0, & y\in\mathbf{R}^n,\\ \bar{F}(y,0)=\varphi(|y|),\end{cases}$$

则熟知

$$\bar{F}(y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(|z|)\exp\left(\frac{-|y-z|^2}{4t}\right)dz,$$

易见，$\bar{F}(y,t)$ 对 y 是球对称的：如 $y'=yA$，$A\in SO(n)$，则

$$\bar{F}(y',t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|y'-z|^2}{4t}\right)dz$$

$$=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|yA-z|^2}{4t}\right)dz$$

$$=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int\varphi(|zA'|)\exp\left(-\frac{|y-zA'|}{4t}\right)d(zA')$$

$$=F(y,t).$$

根据第二章 § 2 定理 2 的证明，只要可证

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}(r,t)\leqslant 0,$$

即有

$$\bar{F}(r(x,y),t)\leqslant F(y,t). \tag{4.2.24}$$

当 $t>0$ 时，记 $z=(z_1,z,\cdots,z_n)\in\mathbf{R}^n$，适当取坐标系使 $y=(r,0,\cdots,0)$，则

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}(r,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(|z|)\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\times\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)\cdot\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz$$

$$=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(|z|)(-1)\frac{r-z_1}{2t}\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)$$

$$\times\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(|z_1|)$$

$$\times\left(-\frac{r-z_1}{2t}\right)\exp\left(-\frac{|r-z_1|^2}{4t}\right)dz_1=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\phi(|y-r|)\left(-\frac{y}{2t}\right)e^{-\frac{y^2}{4t}}dy\leqslant 0,$$

其中

$$\phi(|z_1|)=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\varphi(\sqrt{z_1^2+\cdots+z_n^2})\cdot$$

$$\times\exp\left(\frac{z_2^2+\cdots+z_n^2}{-4t}\right)dz^2\cdots dz_n.$$

注意由 $\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0$ 可知 $\frac{\partial\psi}{\partial r}\leqslant 0$.

至于 $t=0$ 时,

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}(r,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0,$$

因此,(4.2.24) 得证. 由此,

$$\int_{B_x(R)}H(z,y,(1-\varepsilon)t)dz>F(y,(1-\varepsilon)t)$$

$$\geqslant\bar{F}(r(x,y),(1-\varepsilon)t)=(1-\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(|z|)\exp\left(-\frac{|y-z|^2}{4(1-\varepsilon)t}\right)dz.$$

在 (4.2.23) 中取 $R^2=t$, 则

$$H(x,y,t)\geqslant C(\varepsilon)(1-\varepsilon)^{n/2}V_x^{-1}(\sqrt{t})$$

$$\times\int_{B_x(\sqrt{t})}H(x,y,(1-\varepsilon)t)$$

$$\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})t^{-n/2}$$

$$\times\int_{|z|\leqslant\sqrt{1-\varepsilon t}}\exp\left(-\frac{|r(x,y)-z|^2}{4(1-\varepsilon)t}\right)dz$$

$$\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{4(1-\varepsilon)t}\right).$$

至此,(4.2.21) 得证. 至于 (4.2.22), 由

$$2H(x,y,t)\geqslant C^{-1}(\varepsilon)\exp\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}(V_x^{-1}(\sqrt{t})$$

$$+V_y^{-1}(\sqrt{t}))\geqslant 2C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$

$$\times\exp\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}$$

即得.

用类似的但更为细緻的讨论可以对具边界紧致 Riemann 流形证明同样的定理. 其证明的细节, 见 P. Li and S. T. Yau, Estimate of eigenvalues of a compact Riemannian manifold,

Proc. Symp. Pure Math., **36**(1980), pp. 205—240.

定理 4.9. 设M是可具边界的紧致 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$. 在 $\partial M\neq\varnothing$ 时，假定 ∂M 是凸的，则适合 Neumann 边界条件的基本解 $H(x,y,t)$ 具有估计：

$$H(x,y,t)\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right) \quad (4.2.25)$$

及

$$H(x,y,t)\geqslant C^{-1}(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\times\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right). \quad (4.2.26)$$

将 $H(x,y,t)$ 的上界估计与下界估计结合起来，可以得到单独用 $V_x^{-1}(\sqrt{t})=\mathrm{Vol}^{-1}B_x(\sqrt{t})$ 来估计 $H(x,y,t)$ 的上界的一个结果：

定理 4.10. 设 M 是完备的不具边界的 Riemann 流形，或者是可具边界的紧致 Riemann 流形，如 $\partial M\neq\varnothing$ 时，假定 ∂M 是凸的. 两种情况下都假定 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，则满足 Neumann 条件的热方程的基本解有估计

$$H(x,y,t)\leqslant C(\delta)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \quad (4.2.27)$$

其中 $\delta\in(0,1)$，$C(\delta)$ 为依赖于 δ 及 n 的常数.

证明. 由 (4.2.13) 和 (4.2.20)，无论是完备还是紧致的情况，都有

$$H(x,y,t)\leqslant C(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})\times\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)t}\right), \quad (4.2.28)$$

再由 (4.2.21) 和 (4.2.25)，两种情况下也有

$$H(x,y,t)\geqslant C_1^{-1}(\varepsilon)V_y^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{(4-\varepsilon)t}\right).$$

由此

$$V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) \leqslant C_2(\varepsilon)V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left[\frac{r^2(x,y)}{t}\left(\frac{1}{4-\varepsilon}-\frac{1}{4+\varepsilon}\right)\right].$$

代回 (4.2.28),

$$H(x,y,t) \leqslant C_3(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})$$
$$\times \exp\left[\frac{r^2(x,y)}{t}\left(\frac{1}{4-\varepsilon}-\frac{2}{4+\varepsilon}\right)\right]$$
$$\leqslant C_3(\varepsilon)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left[\frac{-r^2(x,y)}{t}\frac{1-\frac{3}{4}\varepsilon}{4-\varepsilon^2/4}\right]$$
$$\leqslant C(\delta)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(\frac{-r^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right).$$

只要取 ε 使 $4+\delta=(4-\varepsilon^2/4)/1-\frac{3}{4}\varepsilon$ 即可.

本节所讨论的结果大都可推广到有位能的热方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+qu=0, \tag{4.2.29}$$

特别是 Harnack 不等式,以及基本解的上、下界估计,读者可参考 Li, Petr and Yau, S. T.: On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. 在这里,我们只节录较重要的结果.

对任意常数 $\alpha>1$, $x, y\in M$, $0<t_1<t_2$, 函数 $\rho_\alpha(x,y,t_1,t_2)$ 定义如下:

$$\rho_\alpha(x,y,t_1,t_2)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\left\{\frac{\alpha}{4(t_2-t_1)}\int_0^1|\dot\gamma|^2ds+(t_2-t_1)\int_0^1 q(\gamma(s),(1-s)t_2+st_1)ds\right\}.$$

在这里 $\Gamma=\left\{\gamma\,|\,\gamma:[0,1]\to M, \gamma(0)=x, \gamma(1)=y\right\}$. $q(x,t)$ 假定对 x 是二次可微连续,对 t 是一次可微连续函数. 另外, q 要满足其它一些条件. 底下定理 (4.4)′中, A 表示和 Δq, $|\nabla q|$ 的上界以及 α 有关的常数. 确定的关系,读者可参考他们的文章.

定理 4.4′. 设 M 是完备的 n 维、非紧的流形，没有边界，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，$k\geqslant 0$．如果 $u(x,t)$ 是 (4.2.29) 的一个正解，则对任意 $\alpha>1$，x_1，$x_2\in M$，$0<t_1<t_2<+\infty$，下列等式成立：

$$u(x_1,t_1)\leqslant u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n\alpha}{2}}\exp(A(t_2-t_1)$$
$$+\rho_\alpha(x_1,x_2,t_2,t_1)).$$

对 (4.2.29) 基本解也有类似的上界估计，但表示较繁．读者可参考 Li 和 Yau 的文章．另外，对基本解的下界估计有底下的定理：

定理 4.8′. 设 M 是完备的无边界 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$．$q(x)$ 是 M 上的二次可微连续函数，且满足 $\Delta q\leqslant\theta$，θ 是一个常数．另外假设 $\exp(-q)\in L^2(M)$，则 (4.2.29) 的基本解 $H(x,y,t)$ 满足下列不等式：

$$H(x,y,t)\geqslant(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\left(\frac{n\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}t-\rho(x,y,t)\right].$$

定理 (4.4)′ 和定理 (4.8)′ 的证明可参考 Li 和 Yau 的文章（将发表在 *Acta Math.*）．

§ 3. 热核估计的应用

本节将给出 § 1 和 § 2 中关于热核的整体估计和局部增长估计（梯度估计）的若干应用．这些应用或者提供了流形热核的总体信息，或者导出流形的整个谱系的估计．而关于 Green 函数的估计，则用更简单的方法改进了 N. Varopoulos 的结果．

定理 4.11. 设 M 是可能具边界的紧致 Riemann 流形，$\mathrm{Ric}(M)\geqslant 0$，如果 $\partial M\neq\emptyset$，则假定 ∂M 是凸的，则满足 Neumann 条件的热方程基本解 $H(x,y,t)$ 具估计

$$H(x,x,t)\geqslant(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.\tag{4.3.1}$$

证明：应用定理 4.1 于 $u=H(x,y,t+\varepsilon)$（看成 $(y,t)\in M\times[0,\infty)$ 的函数），u 显然符合该定理的条件，因此有 $(H=H(x,y,t+\varepsilon))$

$$|\nabla H|^2 - H\frac{\partial H}{\partial t} \leqslant \frac{n}{2t}H^2, \tag{4.3.2}$$

两边在 M 上积分，应用 Stokes 公式，无论是 $\partial M = \varnothing$，还是 $\partial M \neq \varnothing$ 而 $\frac{\partial H}{\partial \nu} = 0$ (ν 是 ∂M 的外法线方向)，都有

$$\int_M |\nabla H|^2 = -\int_M H\Delta H,$$

因此

$$\frac{n}{2t}\int_M H^2 dy \geqslant -\int_M \left(H\Delta H + H\frac{\partial}{\partial t}H\right)dy$$

$$= -2\int_M H\frac{\partial}{\partial t}H dy = -\frac{\partial}{\partial t}\int_M H^2 dy,$$

但是由第三章定理 1 有

$$\int H^2(x, y, t+\varepsilon)dy = H(x, x, 2(t+\varepsilon)),$$

所以

$$\frac{n}{2t}H(x, x, 2(t+\varepsilon)) \geqslant -\frac{\partial}{\partial t}H(x, x, 2(t+\varepsilon)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\ln(t^{\frac{n}{2}}H(x, x, 2(t+\varepsilon)))] \geqslant 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$，并注意 $H(x, x, t) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} (t \to 0)$，即得

$$H(x, x, t) \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.$$

定理证毕.

根据紧致流形热核的谱(对函数而言)展开式，如果我们记 M 的 Laplace 算子对函数而言的谱集为 $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots$ (当 $\partial M \neq \varnothing$ 时，这里指的是满足 Neumann 边界条件的特征值)，则

$$H(x, x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_i^2(x),$$

$\varphi_i(x)$ 组成 $\left\{f \mid f \in L^2(M), \left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = 0\right\}$ 一组完备正交基，因此 (4.3.1) 给出

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \geqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M). \tag{4.3.3}$$

而著名的 Polya 猜想要求证明(对 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域)

$$\mu_k \leqslant C(n)\left(\frac{k}{\operatorname{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{4.3.4}$$

$$C(n) = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{-\frac{2}{n}}, \quad \omega_{n-1} = \operatorname{Area}(S^{n-1}).$$

(4.3.3) 提供了(至少对凸域而言) Polya 猜测为真的一个迹象.

在紧致流形情况下，正如我们在第三章 § 4 看到的，可以用流形的直径来估计第一特征值的下界. Gromov 对 $\partial M = \varnothing$ 的紧致流形的高阶特征值给出了下界的估计，见 M. Gromov, Paul Levy's isoperimetric inequality, I. H. E. S., Preprint, 1980. 下面的定理表明，利用热核的估计可以方便地把这一估计推广到具凸边界紧致流形的情形 (无论 Dirichlet 边界条件还是 Neumann 边界条件皆如此).

定理 4.12. 设 M 是可能具有边界的紧致 Riemann 流形，$\operatorname{Ric}(M) \geqslant 0$.

当 $\partial M = \varnothing$ 时，记其 Laplace 算子的特征值为 $\{0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots\}$.

当 $\partial M \neq \varnothing$ 时，假定 ∂M 是凸的，其 Dirichlet 特征值记作 $\{(0 <)\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots\}$; Neumann 条件特征值记作 $\{0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots\}$，则 $\forall k \geqslant 1$，有

$$\lambda_k \geqslant \frac{C_1(n)}{d^2} k^{\frac{2}{n}}; \quad \mu_k \geqslant \frac{C_2(n)}{d^2}(k+1)^{\frac{2}{n}},$$

其中 $C_1(n)$, $C_2(n)$ 仅依赖于 n，而 d 为 M 的直径.

证明：因为 Dirichlet 热核 $\leqslant$ Neumann 热核，在下面的证明中 $H(x, y, t)$ 理解为后者. 由定理 4.10，存在 $C(n)$，使

$$H(x, y, t) \leqslant C(n) V_x^{-1}(\sqrt{t}).$$

令 $y = x$，求其迹，得

$$\int_M H(x,x,t)dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \leqslant C(n)\int_M V_x^{-1}(\sqrt{t})dx.$$

但当 $\sqrt{t} \geqslant d$ 时，$V_x(\sqrt{t}) = V_x(d) = \mathrm{Vol}(M)$. 而当 $\sqrt{t} \leqslant d$ 时，由体积的比较定理(第一章，§1，(1.1.17))，

$$\frac{V_x(\sqrt{t})}{V_x(d)} \geqslant \frac{V(0,\sqrt{t})}{V(0,d)} = \left(\frac{\sqrt{t}}{d}\right)^n, \tag{4.3.5}$$

此处 $V(0,d)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 d 的球的体积. 因而，如 $\sqrt{t} \leqslant d$，则

$$V_x^{-1}(\sqrt{t}) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} \leqslant C(n)\begin{cases}\left(\dfrac{d}{\sqrt{t}}\right)^n, & t \leqslant d^2,\\ 1, & t \geqslant d^2.\end{cases}$$

任意固定 $k \geqslant 1$，上式左端只取前 $k+1$ 项，有

$$(k+1)e^{-\mu_k t} \leqslant C(n)\begin{cases}\left(\dfrac{d}{\sqrt{t}}\right)^n, & t \leqslant d^2,\\ 1, & t \geqslant d^2,\end{cases}$$

因此，

$$(k+1) \leqslant \inf_t C(n)\begin{cases}\left(\dfrac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t}, & t \leqslant d^2,\\ e^{\mu_k t}, & t \geqslant d^2\end{cases}$$

$$\leqslant C(n)\cdot\min\left\{e^{\mu_k d^2}, \inf_{0<t\leqslant d^2}\left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t}\right\}.$$

易见，

$$\inf\left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t} = \left(\frac{d}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\mu_k t}\Big|_{t=\frac{n}{2\mu_k}} = \left(\frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}}(d\sqrt{\mu_k})^n,$$

因为

$$e^{\mu_k d^2} \geqslant \frac{1}{C(n)}(k+1),$$

$$\mu_k \geqslant \frac{1}{d^2}\ln\frac{k+1}{C(n)},$$

因此若 $t_0 = \frac{n}{2\mu_k} > d^2$,即 $\frac{n}{2d^2} > \mu_k$, 这样的 μ_k 只能有有限个(依赖于 n). 对这有限个自然可找到常数 $C'(n)$, 使

$$\mu_k \geqslant \frac{1}{d^2} \ln \frac{k+1}{C(n)} \geqslant \frac{C'(n)}{d^2}(k+1)^{\frac{2}{n}}.$$

而对其余的 μ_k, 一定有 $t_0 = \frac{n}{2\mu_k} \leqslant d^2$, 此时即有

$$\left(\frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} (d\sqrt{\mu_k})^n \geqslant \frac{1}{C(n)}(k+1),$$

即有

$$\mu_k \geqslant C''(n) \frac{(k+1)^{\frac{2}{n}}}{d^2}.$$

对 Neumann 特征值 μ_k 的情况证完. 将 μ_k 换成 λ_k, 得类似的结果, 定理证毕.

注: 同样的推理, 如果 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -K$, $K \geqslant 0$, 则有

$$\lambda_k, \mu_k \geqslant C(n, k, K, d), k \geqslant 1. \tag{4.3.6}$$

$C(n, k, K, d)$ 表仅依赖于 n, k, K, d 的常数, d 为 M 的直径, $n = \dim M$.

最后, 我们利用热核估计导出对 Green 函数的估计以结束本章.

在完备 Riemann 流形上,可以定义 Green 函数为

$$G(x, y) = \int_0^\infty H(x, y, t)dt, \tag{4.3.7}$$

如果右端积分收敛的话, 因为此时可以验证, $G(x, y) > 0$ 及 $\Delta G(x, y) = -\delta_x(y)$.

定理 4.13. 设 M 是完备的 Riemann 流形, $\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$, 如果 $G(x, y)$ 存在,则下列估计成立:

$$C_1(n) \int_{r^2(x,y)}^\infty V_x^{-1}(\sqrt{t})dt \leqslant G(x, y)$$

$$\leqslant C_2(n) \int_{r^2(x,y)}^\infty V_x^{-1}(\sqrt{t})dt, \tag{4.3.8}$$

以及

$$C_1(n)\int_{r^2(x,y)}^{\infty} V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})dt \leqslant G(x,y)$$

$$\leqslant C_2(n)\int_{r^2(x,y)}^{\infty} V_x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})V_y^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})dt, \qquad (4.3.9)$$

其中 $V_x(\sqrt{t}) = \mathrm{Vol}(B_x(\sqrt{t}))$，$C_1$，$C_2$ 为仅依赖于 n 的常数.

证明：记 $r = r(x,y)$，则

$$G(x,y) = \int_0^{\infty} H(x,y,t)dt = \int_0^{r^2} H(x,y,t)dt + \int_{r^2}^{\infty} H(x,y,t)dt.$$

由定理 4.10，

$$\int_{r^2}^{\infty} H(x,y,t)dt \leqslant C(n)\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{t})dt.$$

因此只需证，存在 $C_1(n)$ 使

$$\int_0^{r^2} H(x,y,t)dt \leqslant C_1(n)\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{t})dt$$

即可。再用定理 4.10，

$$H(x,y,t) \leqslant C_1(n)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right),$$

因而

$$\int_0^{r^2} H(x,y,t)dt \leqslant C_1(n)\int_0^{r^2} V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right)dt,$$

置 $s = r^4/t$，则 $r^2 \leqslant s < +\infty$，

$$\int_0^{r^2} V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2}{5t}\right)dt$$

$$= \int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}\left(\frac{r^2}{\sqrt{s}}\right)\exp\left(-\frac{s}{5r^2}\right)\frac{r^4}{s^2}ds,$$

再用体积比较定理 $(\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0)$，注意 $t = \frac{r^4}{s} \leqslant s$，

$$\frac{V_x(\sqrt{t})}{V_x(\sqrt{s})} \geqslant \frac{V(0,\sqrt{t})}{V(0,\sqrt{s})} = \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)^n = \left(\frac{r^2}{s}\right)^n.$$

所以

$$\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}\left(\frac{r^2}{s}\right)\exp\left(-\frac{s}{5r^2}\right)\frac{r^4}{s^2}ds \leqslant \int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{s})\left(\frac{r^2}{s}\right)^{n+2}$$

$$\times \exp\left(\frac{-s}{5r^2}\right)ds \leqslant C_2(n)\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{s})ds,$$

其中 $C_2(n) = \sup_{a>0} a^{n+2}\exp\left(-\frac{a}{5}\right) < +\infty$.

至此 (4.3.8) 的右端证完，至于左端，利用定理 4.8 中 (4.2.21)，当 $t \geqslant r^2$ 时，

$$H(x, y, t) \geqslant C_3(\varepsilon, n)V_x^{-1}(\sqrt{t})\exp\left(-\frac{r^2(x, y)}{(4-\varepsilon)t}\right)$$

$$\geqslant C_3(\varepsilon, n)V_x^{-1}(\sqrt{t})e^{-\frac{1}{4-\varepsilon}},$$

因此，

$$G(x, y) \geqslant \int_{r^2}^{\infty} H(x, y, t)dt \geqslant C_3(n)\int_{r^2}^{\infty} V_x^{-1}(\sqrt{t})dt.$$

用同样的方法可证 (4.3.9)，至此定理全部证毕.

注：这个定理首先由 N. Varopoulos 证明，他的定理条件是：M 是完备流形，$\mathrm{Ric}(M) \geqslant 0$，且具有一极点 (pole) 使 $k(r) \geqslant 0$，此处 $k(r)$ 表示沿由极点出发的测地线的径向曲率。

第五章　纯量曲率的保角形变

设 (M,g) 是一 $n\geqslant 2$ 维的光滑 Riemann 流形．若 $\tilde g$ 为 M 上的另一 Riemann 度量，称 $\tilde g$ 保角于(又称共形或保形于) g，如果存在 M 到自身之上的微分同胚 f 以及正值函数 $\rho\in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde g=\rho f^*g$．在 f 是恒同映射，即 $\tilde g=\rho g$ 的情形，称 $\tilde g$ 逐点保角于 g，又称 $\tilde g$ 为 g 的一个保角形变．在 $\tilde g=g$ 的情形，即 $g=\rho f^*g$，称 f 为 (M,g) 上的一个保角变换．命

$$\mathscr{C}_g=\{\rho g\mid\rho\in C^\infty(M),\ \rho>0\}$$

为 M 上所有逐点保角于 g 的 Riemann 度量的集合．在本章中我们研究如下的问题：给定 (M,g) 以及函数 $K\in C^\infty(M)$，问是否存在 $\tilde g\in\mathscr{C}_g$，使得 $\tilde g$ 的纯量曲率 $\tilde R$ 恰等于 K？

为了回答上述问题，我们需要知道在度量的保角形变下，纯量曲率的相应变化．为此在局部坐标系下进行计算（使用对重复指标进行求和的约定)．熟知，Ricci 曲率可表示为

$$R_{ij}=\frac{\partial\Gamma_{ij}^t}{\partial x^t}-\frac{\partial\Gamma_{it}^t}{\partial x^j}+\Gamma_{ij}^t\Gamma_{st}^s-\Gamma_{is}^t\Gamma_{tj}^s,$$

其中

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

是关于 g 的 Christoffel 符号．用 $\tilde\Gamma_{ij}^k$ 表示关于 $\tilde g=\rho g$ 的 Christoffel 符号，则直接计算可得

$$\tilde\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k+\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^j}+\delta_{jk}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^i}\right.$$
$$\left.-g_{ij}g^{kl}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^l}\right).$$

由此求出 $\tilde g$ 的 Ricci 曲率为

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{n-2}{2}(\log\rho)_{,ij} + \frac{n-2}{4}(\log\rho)_{,i}(\log\rho)_{,j}$$
$$- \frac{1}{2}\left(\Delta(\log\rho) + \frac{n-2}{2}|\nabla\log\rho|^2\right)g_{ij}.$$

于是由 $\tilde{R} = \tilde{g}^{ij}\tilde{R}_{ij} = \rho^{-1}g^{ij}\tilde{R}_{ij}$ 即可得

$$\tilde{R} = \rho^{-1}R - (n-1)\rho^{-2}\Delta\rho - \frac{1}{4}(n-1)(n-6)\rho^{-3}|\nabla\rho|^2.$$

为了消除此式中的梯度项，我们区分以下两种情形：

情形 (i) $n = 2$. 令 $\rho = e^{2u}$，则 R 与 $\tilde{R}$ 之间的关系化为

$$\tilde{R} = e^{-2u}(R - 2\Delta u).$$

由于在二维情形纯量曲率是两倍的 Gauss 曲率(记作 K 和 $\tilde{K}$)，因此得出

$$\Delta u - K + \tilde{K}e^{2u} = 0. \tag{0.1}$$

反之，如 $\tilde{K} \in C^\infty(M)$ 是一给定的函数，寻找 $\tilde{g} = e^{2u}g$ 使 $\tilde{g}$ 的纯量曲率等于 $\tilde{K}$ 的问题就等价于求解半线性椭圆方程 (0.1).

情形 (ii) $n \geqslant 3$. 令 $\rho = u^{\frac{4}{n-2}}$，经简单计算得：

$$\tilde{R} = u^{-\frac{n+2}{n-2}}\left(Ru - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u\right).$$

这样我们的问题化为求解

$$\Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)}Ru + \frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{R}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \quad u > 0. \tag{0.2}$$

如果 $u \in C^\infty(M)$ 是 (0.2) 的一个解，则 $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ 就以 $\tilde{R}$ 为纯量曲率.

在本章中，我们总假定 (M, g) 是一个紧致、无边的光滑 Riemann 流形. 从微分几何的角度看，最有兴趣的情形是方程 (0.1) 和 (0.2) 中的 $\tilde{K}$ 及 $\tilde{R}$ 是常数的情形. 这意味着我们要在每个度量的保角等价类 $\mathscr{C}_g$ 中找一个"较好的"、使得纯量曲率是常数的度量. 由复变函数论中的单值化定理 (Uniformazation Theorem) 可知，在 $n = 2$ 的情形这件事是总能办到的. 而在 $n \geqslant 3$ 的情形，这个问题称为 Yamabe 猜测，它经过 Yamabe (1960 年)、Trüdinger

(1968 年)、Aubin (1976 年) 等人的研究，最终被 Schoen (1984 年) 所解决. 其答案也是肯定的.

Yamabe 提出他的问题原是为了解决三维情形的 Poincaré 猜测. 设 M 为一光滑流形，则 M 上的一个 Einstein 度量 g 是满足 $\mathrm{Ric}(g)=cg$ 的 Riemann 度量，这里 $\mathrm{Ric}(g)$ 是 g 的 Ricci 曲率，c 为常数. 在三维的情形，Einstein 度量必具有常截曲率. 因此，如果在任何单连通的三维紧流形上我们都能构造出 Einstein 度量，就可以推出这样的流形微分同胚于三维球面，从而证明 Poincaré 猜测. 如果令 $\mathscr{M}$ 表示 M 上 Riemann 度量的全体，可以证明 Einstein 度量对应于 $\mathscr{M}$ 上的泛函

$$Q(g)=\frac{\int_M R_g d\mu_g}{V_g^{1-\frac{2}{n}}}$$

的临界点，其中 R_g 是 g 的纯量曲率，$V_g=\int_M d\mu_g$ 是体积，$n=\dim M\geqslant 3$. 在下面第 2 节中我们将看到，如果把泛函 Q 限制在一个保角等价类 $\mathscr{C}_{g_0}$ 上，则这个限制泛函的临界点是纯量曲率为常数的保角于 g_0 的度量. Yamabe 的作法是在保角等价类 $\mathscr{C}_{g_0}$ 中极小化 Q，即令

$$\lambda(M,g_0)=\inf_{g\in\mathscr{C}_{g_0}} Q(g),$$

如果存在 $g\in\mathscr{C}_{g_0}$ 使 $Q(g)=\lambda(M,g_0)$，则 g 具有常纯量曲率. 为了获得 Einstein 度量可以进一步定义"极小-极大值"

$$\Lambda(M)=\sup_{g_0\in\mathscr{M}}\ \inf_{g\in\mathscr{C}_{g_0}} Q(g).$$

可以证明：如果存在 $g\in\mathscr{M}$，使 $Q(g)=\lambda(M,g)=\Lambda(M)$(这时称 g 达到 $\Lambda(M)$)，则 g 是 Einstein 度量. 对任何紧致 n 维流形 M 总有 $\lambda(M,g)\leqslant\lambda(S^n,g_1)$(见引理 2.2)，这里 g_1 表示 S^n 上的标准度量，$n\geqslant 3$，因此 S^n 的标准度量是达到 Λ 的一个例子. 另一个例子是环面 T^n 上的标准度量 g_0，由于 T^n 上不存在具正纯量曲率的 Riemann 度量，有 $\lambda(T^n,g)\leqslant\lambda(T^n,g_0)=0$，即 g_0 达到了 $\Lambda(T^n)=$

0. 另一种可能的例子是曲率是负常数的空间形式，(M^n, g_{-1})，尚不清楚 $A(M^n)$ 是否被 Poincarè 度量 g_{-1} 所达到．如果能用上述的"极小-极大"步骤在一般紧致流形上获得 Einstein 度量显然是十分有意义的，本章将要讨论的 Yamabe 问题只是这个方向上的第一步．

在以下的第 1 节中我们讨论二维情形的方程 (0.1)．在第 2—4 节中讨论 $n \geqslant 3$ 维情形的方程 (0.2)，我们将限于讨论 $\widetilde{R}=$ 常数的情形，即 Yamabe 问题．

应当指出，在非紧完备的 Riemann 流形的范畴内同样可以提 Yamabe 问题．鉴于这方面的研究还不多，本书暂不涉及这个问题．

§ 1. 二维情形

本节研究二维紧致无边 Riemann 流形 (M, g) 上的方程

$$\Delta u - K + \widetilde{K} e^{2u} = 0, \tag{0.1}$$

其中 K 是 Riemann 度量 g 的 Gauss 曲率，$\widetilde{K} \in C^\infty(M)$ 是给定的函数．由 Gauss-Bonnet 公式有

$$\int_M K d\mu = 2\pi \chi(M), \tag{1.1}$$

其中 $d\mu$ 是 (M, g) 的体积元，$\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数．因此，如 $u \in C^\infty(M)$ 是(0.1)的一个解，在 M 上积分方程 (0.1) 即得

$$\int_M \widetilde{K} e^{2u} d\mu = 2\pi \chi(M). \tag{1.2}$$

这正是关于 $(M, \tilde{g})$ 的 Gauss-Bonnet 公式，其中 $\tilde{g} = e^{2u} g$，这是因为 $\tilde{g}$ 的体积元 $d\tilde{\mu} = e^{2u} d\mu$，而其 Gauss 曲率为 $\widetilde{K}$．显然，在 $\chi(M)$ 有不同符号的情形，(1.2) 要求 $\widetilde{K}$ 满足不同类型的条件．因此我们的讨论将按照 $\chi(M) < 0$，$= 0$，> 0，分为三种情形．

情形 I. $\chi(M) < 0$.

虽然方程 (0.1) 的可解性在这种情形尚未彻底解决，但我们对问题有较好的理解．在这种情形，利用所谓"上、下解原理"来求

解 (0.1) 看来是合理的. 以下命题是这一原理的一种简单情形.

命题 1.1. 设 (M, g) 为一光滑、紧致、n 维 Riemann 流形. 考虑其上的半线性椭圆方程

$$\Delta u + f(x, u) = 0, \tag{1.3}$$

其中 $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. 如果存在 $\varphi, \phi \in C^2(M)$ 满足

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi + f(x, \varphi) \geqslant 0, \\ &\Delta\phi + f(x, \phi) \leqslant 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

(分别称 φ 和 ϕ 为 (1.3) 的下解和上解)并且 $\varphi \leqslant \phi$, 则 (1.3) 有解 $u \in C^\infty(M)$, 满足 $\varphi \leqslant u \leqslant \phi$.

证明: 令 A 为一常数使得 $-A \leqslant \varphi \leqslant \phi \leqslant A$. 由 M 的紧性,总可取足够大的正常数 c 使得函数 $F(x, t) = ct + f(x, t)$ 对于每个固定的 $x \in M$, 在 $[-A, A]$ 上是 t 的上升函数.定义 $Lu = -\Delta u + cu$. 熟知, L 作为 $C^{2,\alpha}(M)$ 到 $C^{0,\alpha}(M)$ $(\alpha \in (0, 1))$ 的椭圆算子,具有紧的逆算子 L^{-1}. 而且, 由极大值原理, L 是正算子, 即成立:

$$\text{如 } Lv_1 \geqslant Lv_2, \text{ 则 } v_1 \geqslant v_2. \tag{1.5}$$

现归纳地定义

$$\text{以及} \quad \begin{aligned} &\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_k = L^{-1}(F(x, \varphi_{k-1})), \ k \geqslant 1; \\ &\phi_0 = \phi, \quad \phi_k = L^{-1}(F(x, \phi_{k-1})), \ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

则有

$$L\varphi \leqslant L\varphi_1 = F(x, \varphi) \leqslant F(x, \phi) = L\phi_1 \leqslant L\phi,$$

其中两个等式由 (1.6) 得出,第一个和最后一个不等式由 (1.4) 给出,而中间的不等式则是由于 $F(x, t)$ 关于 t 单调上升. 因此, 利用 (1.5) 就有

$$\varphi \leqslant \varphi_1 \leqslant \phi_1 \leqslant \phi.$$

仿此, 用归纳法可证

$$\varphi \leqslant \varphi_{k-1} \leqslant \varphi_k \leqslant \phi_k \leqslant \phi_{k-1} \leqslant \phi, \quad \forall k \geqslant 1.$$

序列 $\{\varphi_k\}$ 和 $\{\phi_k\}$ 的单调有界性保证了有逐点的收敛: $\varphi_k \to u$, $\phi_k \to \bar{u}$, 并且 $\varphi \leqslant u \leqslant \bar{u} \leqslant \phi$. 现由 (1.6) 和 $\{\varphi_k\}$ 及 $\{\phi_k\}$ 的有界性,利用线性椭圆方程的 L^p 估计 $(p > n)$ 我们推出这两个序列

在 $L_2^p(M) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(M)$ 中有界. 因此，上面的逐点收敛实际上是 $C^{1,\alpha}$ 收敛. 从而我们可在 (1.6) 中令 $k \to \infty$ 而取极限，得出

$$Lv = F(x, v), \tag{1.7}$$

其中 $v = \underline{u}$ 或 $\bar{u}$. 继之，由椭圆方程的 Schauder 估计可知，$\underline{u}$ 和 $\bar{u} \in C^\infty(M)$. 最后注意由 L 和 F 的定义，(1.7) 与 (1.3) 是等价的，命题即得证.

现回到原来的方程 (0.1)，我们有

命题 1.2. 设 $\chi(M) < 0$，则 (0.1) 有解的一个充分条件是存在 (0.1) 的一个上解 $\phi \in C^2(M)$.

证明：由命题 1.1，我们只需找到 (0.1) 的一个下解 φ，使得 $\varphi \leqslant \phi$. 令 $\varphi = f - c$，其中 c 为正常数，f 是方程

$$\Delta f = K - K_0$$

的解，这里 $K_0 = \frac{1}{v}\int_M K d\mu$ 是 K 的平均值. 由 (1.1) 及 $\chi(M) < 0$ 知 K_0 为负数. 注意上述方程可解是由于其右端的平均值为零. 取 c 足够大显然可使 $\varphi \leqslant \phi$ 成立. 又有

$$\Delta\varphi - K + \tilde{K}e^{2\varphi} = -K_0 + \tilde{K}e^{2f-2c} > 0$$

只要 c 充分大. 因此我们可找到满足 $\varphi \leqslant \phi$ 的下解 φ. 证毕.

作为命题 1.2 的一个推论，有以下的结果(见 Kazdan-Warner, Annals of Math.,**99**(1974), 14—47).

定理 1.3. 如 $\chi(M)<0$，$\tilde{K} \leqslant 0$ 但 $\tilde{K}$ 不恒等于 0，则 (0.1) 有解 $u \in C^\infty(M)$.

证明：由命题 2.1，我们只需找 (0.1) 的一个上解. 令 $\phi = af + b$，其中 $f \in C^\infty(M)$ 满足方程

$$\Delta f = \tilde{K}_0 - \tilde{K}.$$

这里 $\tilde{K}_0$ 为 $\tilde{K}$ 的平均值，由定理的条件 $\tilde{K}_0 < 0$. 取正数 a 足够大，使 $a\tilde{K}_0 < K(x) \forall x \in M$. 又取 b 充分大使 $e^{af+b} - a > 0$，则有

$$\Delta\phi - K + \tilde{K}e^{\phi} = a\tilde{K}_0 - K + (e^{af+b} - a)\tilde{K} < 0.$$

这说明 ϕ 是 (0.1) 的上解. 证毕.

条件 (1.2) 说明在 $\chi(M) < 0$ 的情形，$\tilde{K}$ 必须在某些地方取

负值 (0.1) 才可能有解. 但在 $\widetilde{K}$ 变号时 (0.1) 可能没有解. 在这种情形可解性的充分必要条件还不清楚.

情形 II. $\chi(M)=0$.

在这种情形我们的问题获得了完全的解答. M. S. Berger 首先得到 (0.1) 可解的一个充分条件, 而 Kazdan-Warner 指出这个条件也是必要的.

定理 1.4. 设 $\chi(M)=0$, 则 (0.1) 有光滑解的充分必要条件是: 或者 (i) $\widetilde{K}\equiv 0$, 或者 (ii) $\widetilde{K}$ 变号且满足

$$\int_M \widetilde{K}e^{2f}d\mu<0, \tag{1.8}$$

其中 f 是 $\Delta f=K$ 的一个解.

证明: 必要性. 首先注意由 (1.1) 及 $\chi(M)=0$, 有 $\int_M Kd\mu=0$. 因此存在 $f\in C^\infty(M)$ 使 $\Delta f=K$. 设 u 是 (0.1) 的解, 令 $v=u-f$, 则

$$\Delta v+\widetilde{K}e^{2v+2f}=0. \tag{1.9}$$

因而,

$$\int_M \widetilde{K}e^{2f}d\mu=-\int_M e^{-2v}\Delta v d\mu=-2\int_M e^{-2v}|\nabla v|^2 d\mu\leqslant 0.$$

如果这积分 $=0$, 则必有 $|\nabla v|\equiv 0$, 从而 $v\equiv$ 常数, 由 (1.9) 即可推出 $\widetilde{K}\equiv 0$. 因此, 在 $\widetilde{K}\not\equiv 0$ 时必有 (1.8) 成立, 且由 (1.2) 可知 $\widetilde{K}$ 必须变号.

充分性. 在 $\widetilde{K}\equiv 0$ 时易见 f 即是 (0.1) 的解, 故设 $\widetilde{K}\not\equiv 0$. 我们用变分方法来求解 (0.1). 令

$$\mathscr{M}=\{u\in L_1^2(M)\,|\int_M ud\mu=\int_M \widetilde{K}e^{2u+2f}d\mu=0\}.$$

由于 $\widetilde{K}$ 变号, $\mathscr{M}$ 是 $L_1^2(M)$ 的非空子集. 我们考虑泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 d\mu$$

在 $\mathscr{M}$ 上的极小化问题. 设若存在 $u_0\in\mathscr{M}$ 使 $J(u_0)=\inf\limits_{u\in\mathscr{M}}J(u)$, 则由 Lagrange 乘子理论, 存在常数 α,β 使得在 $L_1^2(M)$-弱解的意义下

$$\Delta u_0 + \alpha + \beta \widetilde{K} e^{2u_0+2f} = 0.$$

积分此方程可得

$$\alpha \cdot V = -\beta \int_M \widetilde{K} e^{2u_0+2f} d\mu = 0,$$

这是由于 $u_0 \in \mathscr{M}$. 这里 $V = \int_M d\mu$ 是 M 之体积. 因此 $\alpha = 0$. 于是

$$\beta \int_M \widetilde{K} e^{2f} d\mu = -\int e^{-2u_0} \Delta u_0 d\mu < 0,$$

条件 (1.8) 则保证了 $\beta > 0$. 令 $v_0 = u_0 + \frac{1}{2}\log \beta$, 则 v_0 是 (1.9) 的一个 L_1^2-弱解. 下面将说明, 对于任何 $u \in L_1^2(M)$, $e^u \in L^p(M)$, $\forall p \geqslant 1$. 因此, 由标准的椭圆正则性理论可知 $v_0 \in C^\infty(M)$, 而 $u = v_0 + f$ 即是 (0.1) 的光滑解.

现设 $\{u_i\} \subset \mathscr{M}$ 是 $J(u)$ 在 $\mathscr{M}$ 上的一个极小化序列, 即 $J(u_i) \to c_0 = \inf\limits_{u \in \mathscr{M}} J(u)$. 由于 $\int_M u_i d\mu = 0$, 故 $\|u_i\|_{L_1^2}^2 \leqslant cJ(u_i)$ (Poincare 不等式). 所以 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中有界, 我们可设某个子序列, 仍记为 $\{u_i\}$, 在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于 u_0. 由 $J(u)$ 的弱下半连续性, $J(u_0) \leqslant c_0$. 另一方面, 由后面的引理 1.6 可以推出

$$0 = \lim_{i \to \infty} \int_M \widetilde{K} e^{2u_i+2f} d\mu = \int_M \widetilde{K} e^{2u_0+2f} d\mu.$$

由此可知 $u_0 \in \mathscr{M}$ $\left(\int_M u_0 d\mu = 0 \text{ 是明显的}\right)$. 从而由 c_0 的定义有 $J(u_0) \geqslant c_0$. 这证明了 $J(u_0) = c_0$, 而前面已经说明这样的 u_0 对应于 (0.1) 的一个光滑解. 证毕.

为了补出上述证明中一个分析事实的证明, 我们需要

引理 1.5 (Trüdinger 不等式). 设 (M, g) 为一紧致、无边、二维 Riemann 流形, 则存在 $\beta, C > 0$, 使得对所有满足 $\int_M u d\mu = 0$, $\int_M |\nabla u|^2 d\mu \leqslant 1$ 的 $u \in L_1^2(M)$, 成立

$$\int_M e^{\beta u^2} d\mu \leqslant C.$$

证明：令 U_i，φ_i，$1\leqslant i\leqslant k$，为 M 的一个单位分解，满足：每个 U_i 都微分同胚于 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆盘 D，$\varphi_i\in C_0^\infty(U_i)$，$0\leqslant\varphi_i\leqslant 1$，以及 $\sum_{i=1}^k\varphi_i\equiv 1$，令 $u_i=\varphi_i u$，则 $u=\sum_{i=1}^k u_i$. 我们先证存在常数 $c_0>0$，使

$$\|u_i\|_p\leqslant c_0\sqrt{p}\,\|\nabla u_i\|_2,\quad \forall p\geqslant 2,\tag{1.10}$$

这里 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(M)$ 的范数.

事实上，令 $v\in C_0^1(D)$，我们有熟知的等式

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_D\nabla v(y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|^2}dy,$$

因此

$$|v(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_D|\nabla v(y)|\cdot\frac{dy}{|x-y|}.$$

把被积项写为 $(|\nabla v|^2|x-y|^{-q})^{1/p}\cdot|x-y|^{-q/2}\cdot|\nabla v|^{1-2/p}$，由 Hölder 不等式可得

$$|v(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int_D|\nabla v(y)|^2|x-y|^{-q}dy\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_D|x-y|^{-q}dy\right)^{1/2}\left(\int_D|\nabla v|^2dy\right)^{1/2-1/p},$$

其中 $q=\frac{2p}{p+2}<2$. 注意有

$$\int_D|x-y|^{-q}dy=\int_{|x-y|<1}|y|^{-q}dy\leqslant\int_{|y|<2}|y|^{-q}dy$$

$$=2\pi\int_0^2 r^{1-q}dr=2^{1-q}\pi(p+2),$$

因此有

$$\int_D|\nabla v|^pdx\leqslant c_1(p+2)^{\frac{p}{2}+1}\left(\int_D|\nabla v|^2dx\right)^{p/2},$$

$$\left(\int_D|\nabla v|^pdx\right)^{1/p}\leqslant c_1\sqrt{p}\left(\int_D|\nabla v|^2dx\right)^{1/2}.\tag{1.11}$$

由于 $C_0^1(D)$ 在 $\mathring{L}_1^2(D)$ 中稠，故 (1.11) 对所有 $v\in\mathring{L}_1^2(D)$ 成立. 由于 u_i 在 U_i 中紧支，U_i 微分同胚于 D，故知 (1.10) 成立. 于是

$$\|u\|_p\leqslant\sum_{i=1}^k\|u_i\|_p\leqslant c_0\sqrt{p}\sum_{i=1}^k\|\nabla u_i\|_2$$

$$\leqslant c_3\sqrt{p}\,(\|\nabla u\|_2+\|u\|_2).$$

但 $\int_M u d\mu=0$，故由 Poincare 不等式得

$$\|u\|_p\leqslant c_4\sqrt{p}\,\|\nabla u\|_2,\quad \forall p\geqslant 2.$$

现设 $\|\nabla u\|_2\leqslant 1$，则

$$\int_M\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}(\beta|u|^2)^k d\mu\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}(2\beta c_4^2k)^k.$$

若 β 足够小，则右端级数当 $N\to\infty$ 时收敛。由单调收敛定理可知 $\int_M e^{\beta u^2}d\mu\leqslant C$。证毕。

引理 1.6. 存在常数 C，$\eta>0$，使得对于 $u\in L_1^2(M)$ 有

$$\int_M e^u d\mu\leqslant C\exp\left(\eta\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{V}\int_M u d\mu\right).\tag{1.12}$$

证明：不妨设 $\|\nabla u\|_2\neq 0$，否则 $u=$ 常数，(1.12) 显然成立。我们有

$$u_0\leqslant\beta\left(\frac{u_0}{\|\nabla u\|_2}\right)^2+\|\nabla u\|_2^2/4\beta,$$

其中 $u_0=u-\frac{1}{V}\int_M u d\mu$，$\beta$ 为 Trüdinger 不等式中的常数。对上式取指数并在 M 上积分，即可得 (1.12)，其中 $\eta=1/4\beta$。证毕。

在 (1.12) 中以 pu 代替 u，即可看出 $e^u\in L^p(M)$，$\forall p\geqslant 1$。另一方面容易证明形如 $\int_M\widetilde{K}e^u d\mu$ 的泛函关于 L_1^2-弱拓扑是连续的。事实上，设 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于 u，则 u_i 在 $L^p(M)$ 中强收敛于 $u(\forall p\geqslant 1)$，并且

$$\int_M\widetilde{K}(e^{u_i}-e^u)d\mu=\int_M\widetilde{K}\int_0^1\frac{d}{dt}(e^{u+t(u_i-u)})dtd\mu$$

$$=\int_0^1\int_M\widetilde{K}e^{u+t(u_i-u)}(u_i-u)d\mu dt.$$

利用 Hölder 不等式，(1.12) 及 $u_i\to u$ 在 $L^p(M)$ 中，可知上式趋于 0。

情形 III. $\chi(M)>0$。

在这种情形，M 或者是球面 $S^2(\chi(M)=2)$，或者是实投影平面 $RP^2(\chi(M)=1)$. 我们先讨论 (M, g) 是具有标准度量的球面 (S^2, g_0) 的情形，这时 Gauss 曲率 $K\equiv 1$，面积为 4π. 方程 (0.1) 成为

$$\Delta u-1+\widetilde{K}e^{2u}=0. \tag{1.13}$$

条件 (1.2) 则为

$$\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u}d\mu=4\pi. \tag{1.14}$$

这条件要求 $\widetilde{K}$ 必须在一些地方取正值. 但即使 $\widetilde{K}>0$, (1.13) 也可以没有解. Kazdan 和 Warner 首先注意到以下事实:

命题 1.7. 令 $\varphi\in C^\infty(S^2)$ 为标准球面上的一个第一特征函数

$$\Delta\varphi+2\varphi=0. \tag{1.15}$$

设 $u\in C^\infty(S^2)$ 是 (1.13) 的一个解，则

$$\int_{S^2}\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi e^{2u}d\mu=0. \tag{1.16}$$

证明: 第一特征函数 φ 的二阶协变导数满足

$$\varphi_{,ij}=-\varphi g_{ij}. \tag{1.17}$$

用 $\nabla u\cdot\nabla\varphi$ 乘以方程 (1.13) 再积分可得

$$\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\Delta u d\mu-\int_{S^2}\nabla u\cdot\nabla\varphi d\mu$$

$$+\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\widetilde{K}e^{2u}d\mu=0, \tag{1.18}$$

利用分部积分及 (1.17) 有

$$\int_{S^2}(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\Delta u d\mu=-\int_{S^2}\nabla(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\cdot\nabla u d\mu$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{S^2}\nabla(|\nabla u|^2)\cdot\nabla\varphi d\mu+\int_{S^2}|\nabla u|^2\varphi d\mu$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S^2}|\nabla u|^2(\Delta\varphi+2\varphi)d\mu=0.$$

又有

$$\int_{S^2}\nabla u\cdot\nabla\varphi d\mu=-\int_{S^2}\varphi\Delta u d\mu=\int_{S^2}\varphi(\widetilde{K}e^{2u}-1)d\mu$$

$$=\int_{S^2}\varphi\widetilde{K}e^{2u}d\mu.$$

另一方面，(1.18) 的第三项积分等于

$$\frac{1}{2}\int_{S^2}\widetilde{K}\nabla e^{2u}\cdot\Delta\varphi d\mu=\frac{1}{2}\int_{S^2}(\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi)e^{2u}d\mu$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u}\Delta\varphi d\mu=\frac{1}{2}\int_{S^2}(\nabla\widetilde{K}\cdot\nabla\varphi)e^{2u}d\mu$$

$$+\int_{S^2}\varphi\widetilde{K}e^{2u}d\mu.$$

综合上列计算即得 (1.16)。证毕。

如果取 $\widetilde{K}=1+\varepsilon\varphi$，其中 ε 为充分小的常数，则 $\widetilde{K}>0$，而 (1.16) 变为

$$\int_{S^2}|\nabla\varphi|^2e^{2u}d\mu=0.$$

这显然是不可能的，因此对于这样的 $\widetilde{K}$ (1.13) 不可解。

注：在标准球面 $S^n(n\geqslant 3)$ 上也有与命题 1.7 相似的结果。设 φ 是 S^n 上的第一特征函数，即 $\Delta\varphi+n\varphi=0$. 如果 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 的纯量曲率为 R，这里 g_0 是 S^n 上的标准度量，则 Kazdan 和 Warner 证明

$$\int_{S^n}\nabla\varphi\cdot\nabla Ru^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_0=0. \qquad (*)$$

S^n 的第一特征函数的梯度向量场 $X=\nabla\varphi$ 是保角向量场，即 X 产生的单参数变换群中的每个变换都是 S^n 上的保角变换. 利用保角向量场可以导出一类微分方程的解必须满足的恒等式，最初是由 Pohozaev (Soviet Math. Doklady, 6(1965), 1408—1411) 发现的，他在 $\mathbf{R}^n$ 上利用 $X=r\dfrac{\partial}{\partial r}$. 最近，作者之一证明了以下的一般性结果 (R.Schoen, Existence of weak solutions with prescribing singular behaviour for a conformally invariant scalar equations).

命题. 设 (M,g) 为一具光滑边界 ∂M 的 $n(\geqslant 3)$ 维紧致 Riemann 流形，R 为其纯量曲率。设 X 是 (M,g) 的一个保角向量场，则成立

$$\int_M\mathscr{L}_XRd\mu=\frac{2n}{n-2}\int_{\partial M}\left(\mathrm{Ric}-\frac{1}{n}Rg\right)(X,\nu)d\sigma,$$

其中 Ric 为 Ricci 张量，$\mathscr{L}_X$ 表示 Lie 导数，

在 S^n 上取 $X=\nabla\varphi$，则 $\mathscr{L}_X R=\nabla\varphi\cdot\nabla R$. 又注意 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 的体积元 $d\mu=u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_0$ 及 $\partial S^n=\phi$，容易看出(*)式是以上一般性恒等式的特例。

Moser 在 1973 年给出了(1.13)可解的一个充分条件，其陈述如下。

定理 1.8. 令 (S^2, g_0) 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面. 设 $\widetilde{K}\in C^\infty(S^2)$ 满足 $\widetilde{K}(-x)=\widetilde{K}(x)\quad\forall x\in S^2\subset\mathbb{R}^3$，且 $\max\limits_{S^2} K>0$，则方程 (1.13) 有解 $u\in C^\infty(S^2)$ 满足 $u(-x)=u(x)$，$\forall x\in S^2$.

这个定理的证明依赖于不等式(1.12)以及对这个不等式中的常数 η 的精确估计。Moser 证明了

引理 1.9. 在标准球面上，不等式(1.12)中的常数 $\eta=1/16\pi$. 如果不等式中的函数 u 还满足对称性条件 $u(-x)=u(x)$，则 η 可取为 $1/32\pi$.

证明请见 Indiana Univ. Math. J., **20**(1971), 1077—1092.

现考虑 $L_1^2(S^2)$ 中的子空间

$$\mathscr{M}=\left\{u\in L_1^2(S^2)\,\middle|\,\int_{S^2}ud\mu=0,\ u(-x)=u(x)\ \text{a.e.}\,x\in S^2\right\}.$$

由引理 1.9 可知，对于 $u\in\mathscr{M}$ 成立

$$\int_{S^2}e^{2u}d\mu\leqslant C\exp\left(\frac{1}{8\pi}\|\nabla u\|_2^2\right). \tag{1.19}$$

令 $\mathscr{M}_*=\left\{u\in\mathscr{M}\,\middle|\,\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u}d\mu>0\right\}$，由于 $\max\limits_{S^2}\widetilde{K}>0$，$\mathscr{M}_*$ 不是空集。定义

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-2\pi\log\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u}d\mu,\ u\in\mathscr{M}_*,$$

$$c_*=\inf\{J(u)\,|\,u\in\mathscr{M}_*\},$$

注意(1.19)保证了

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-2\pi\left(\frac{1}{8\pi}\|\nabla u\|^2+\log C+\log(\max\widetilde{K})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\|\nabla u\|_2^2 - c_1. \tag{1.20}$$

因此 $c_* > -\infty$. 现令$\{u_i\}\subset\mathscr{M}_*$为泛函 J 在 $\mathscr{M}_*$ 中的一个极小化序列,即 $J(u_i)\to c_*$ 当 $i\to\infty$. (1.20) 说明 $\|\nabla u_i\|_2$ 有界，由于 $\int_{S^2} u_i d\mu = 0$, $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(S^2)$ 中有界。故可设某子序列，仍记为 $\{u_i\}$, 在 $L_1^2(S^2)$ 中弱收敛于 u_0. 由情形 II 中的讨论可知，泛函 J 是弱下半连续的，因此 $J(u_0)\leqslant c_*$. 又容易验证，$u_0\in\mathscr{M}_*$,按 c_* 之定义有 $J(u_0)\geqslant c_*$. 故 $J(u_0)=c_*$. 由 Lagrange 乘子理论，u_0 满足 Euler-Lagrange 方程(这里要利用 $\widetilde{K}(-x)\equiv\widetilde{K}(x)$)

$$\Delta u_0 + \frac{4\pi\widetilde{K}e^{2u_0}}{\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u_0}d\mu} = \lambda,$$

其中 λ 是 Lagrange 乘子. 在 S^2 上积分此方程即得 $4\pi = 4\pi\lambda$, 即 $\lambda = 1$. 再令 $u = u_0 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\widetilde{K}e^{2u_0}d\mu\right)$, 则 u 是 (1.13) 的一个 L_1^2-弱解。由正则性定理（参见情形 II 中的讨论）可知 u 是 (1.13) 的光滑解。这完成了定理 1.8 的证明。

如果把 S^2 上的点 x 与其对径点 $-x$ 相等同，就得到实投影平面 $\mathbf{R}P^2$. 任何 $\widetilde{K}\in C^\infty(\mathbf{R}P^2)$ 提升到 S^2 上时，均满足 $\widetilde{K}(-x)\equiv\widetilde{K}(x)$. 因此，定理 1.8 说明：在标准度量的 $\mathbf{R}P^2$ 上，一个光滑函数是某个逐点保角于标准度量的度量的 Gauss 曲率，必须而且只需此函数在某处取正值. 注意必要性是由 (1.14) 决定的。事实上，这个结果对于非标准度量也成立(参见 T. Aubin, J.Funct. Anal., **32** (1979), 148—174).

最后我们指出：在定理 1.8 的证明中，如果不假定对称性 $(u(-x)\equiv u(x))$, $J(u)$ 仍然有有限的下界. 但是可以证明：除非 $\widetilde{K}=$ 常数, $J(u)$ 的下确界是达不到的. 因此在 $\widetilde{K}$ 不具有对称性的情形，问题更加困难，需要使用比较复杂的变分方法在一定条件下获得 $J(u)$ 的非极小的临界点。

§2. Yamabe 问题与保角不变量 $\lambda(M)$

在本章开始我们已经解释过，Yamabe 问题就是：给定一个维数为 $n\geqslant 3$ 的紧致、无边 Riemann 流形 (M,g)，问是否存在保角度量 $\tilde{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$，使 $\tilde{g}$ 的纯量曲率为常数。这个问题等价于求解

$$\Delta u-\frac{n-2}{4(n-1)}Ru+\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}=0,$$
$$u>0,\ u\in C^{\infty}(M),\tag{2.1}$$

其中 R 是 (M,g) 的纯量曲率，λ 是常数。记

$$p=\frac{2n}{n-2},\quad a=\frac{n-2}{4(n-1)},\quad L=-\Delta+aR.\tag{2.2}$$

称 L 为 (M,g) 的保角 Laplace 算子。方程 (2.1) 可写为

$$Lu=\lambda u^{p-1}.$$

Yamabe 注意到，(2.1) 是泛函

$$Q_0(\tilde{g})=\frac{\int_M R_{\tilde{g}}d\mu_{\tilde{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\tilde{g}}\right)^{2/p}}$$

限制在保角等价类 $\mathscr{C}_g$ 上的 Euler-Lagrange 方程。事实上，Q_0 可以写作 $Q_0(\tilde{g})=Q_0(u^{p-2}g)\triangleq a^{-1}Q(u)$，其中 $\tilde{g}=u^{p-2}g\in\mathscr{C}_g$。但由(0.2)，$\tilde{g}$ 的纯量曲率 $R_{\tilde{g}}=a^{-1}u^{1-p}Lu$，其体积元 $d\mu_{\tilde{g}}=u^p d\mu$，故

$$Q(u)\triangleq aQ_0(\tilde{g})=\frac{E(u)}{\|u\|_p^2},$$

其中

$$E(u)=\int_M uLud\mu=\int_M(|\nabla u|^2+aRu^2)d\mu,$$

$$\|u\|_p^2=\left(\int_M|u|^p d\mu\right)^{2/p}.$$

我们称 $Q(u)$ 为 (M,g) 的 Yamabe 商。若 $u>0$，$u\in C^{\infty}(M)$ 是 Q 的临界点，即 $\frac{d}{dt}Q(u+t\phi)|_{t=0}=0$，$\forall\phi\in C^{\infty}(M)$，则容易导出 u 满足方程 (2.1)，其中常数 $\lambda=E(u)/\|u\|_p^p$。

现注意，由 Hölder 不等式有 $\left|\int_M Ru^2 d\mu\right| \leqslant c\|u\|_p^2$，因此 $Q(u)$ 下方有界。定义

$$\lambda(M) = \inf\{a^{-1}Q_0(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in \mathscr{C}_g\}$$
$$= \inf\{Q(u) \mid u \in C^\infty(M),\ u > 0\}.$$

由上面的分析看出，$\lambda(M)$ 是由保角等价类 $\mathscr{C}_g$ 确定的，而与基准度量 g 的选取无关，因此称之为 (M, g) 的保角不变量。事实上，如果另取一基准度量 $\tilde{g} = \varphi^{p-2}g$，其中 $\varphi > 0$，$\varphi \in C^\infty(M)$，令 $\tilde{Q}$ 为关于 $\tilde{g}$ 的 Yamabe 商，通过直接计算即可得出 $\tilde{Q}(u) = Q(\varphi u)$，因此 $\tilde{Q}$ 与 Q 有相同的下确界。这一事实在我们以后对 $\lambda(M)$ 进行估计时将多次用到。另一个将要用到的事实是，$\lambda(M)$ 可以等价地定义为

$$\lambda(M) = \inf\{Q(u) \mid u \in L_1^2(M)\backslash\{0\}\}.$$

只要注意到 $\|\nabla|u|\|_2 \leqslant \|\nabla u\|_2$（因此第一个定义中 $u > 0$ 的限制并不使 $\lambda(M)$ 的值变大）及 $C^\infty(M)$ 在 $L_1^2(M)$ 中稠，就不难看出两种定义是相等的。

保角不变量 $\lambda(M)$ 的重要性在于有以下结果：

定理 2.1. 设 (M, g) 为 n 维紧致无边 Riemann 流形。如果 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$，则 Yamabe 问题在 (M, g) 上可解。这里 S^n 表示具标准度量的 n 维球面。

在证明这个定理之前，先考察 $\lambda(S^n)$ 与 $\mathbf{R}^n$ 上的 Sobolev 不等式中的最佳常数 Λ 的关系。我们有如下的 Sobolev 不等式

$$\Lambda\left(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^p dx\right)^{2/p} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

注意 $\mathbf{R}^n$ 的纯量曲率为零，因此它的保角 Laplace 算子就是 $-\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$。如记 $Q_{\mathbf{R}^n}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的 Yamabe 商，则最佳常数 Λ 可定义为

$$\Lambda = \inf\{Q_{\mathbf{R}^n}(u) \mid u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\backslash\{0\}\}.$$

在本章的附录中将证明 Λ 可以被 $\mathbf{R}^n$ 上的一族函数

$$\varphi_{a,b}(x) = (a + b|x|^2)^{(2-n)/2}, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{2.3}$$

所达到，其值为

$$\Lambda = Q_{\mathbf{R}^n}(\varphi_{a,b}) = n(n-1)\omega_n^{2/n},$$

其中 ω_n 是 S^n 的体积。

现令 $P=(0,\cdots,0,1)$ 为 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 的北极。定义球极投影 $\pi: S^n\backslash\{P\} \to \mathbf{R}^n$ 为 $\pi(\xi^1,\cdots,\xi^n,\zeta)=\left(\frac{\xi^1}{1-\zeta},\cdots,\frac{\xi^n}{1-\zeta}\right)$. 容易验证 π 是保角变换，事实上，如记 g_0 为 S^n 上的标准度量，ds^2 为 $\mathbf{R}^n$ 上的欧氏度量，则有

$$(\pi^{-1})^* g_0 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2} ds^2 \equiv \rho(x)^{p-2} ds^2.$$

设 $u \in C^\infty(S^n)$，令 $\bar{u} = \rho \cdot u \circ \pi^{-1} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，则由 Q 的保角不变性有：$Q_{S^n}(u) = Q_{\mathbf{R}^n}(\bar{u})$. 另一方面，利用 $\mathbf{R}^n$ 上的截断函数容易证明（参见附录）$\bar{u}$ 可以用 $\bar{u}_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 逼近，使得 $Q_{\mathbf{R}^n}(\bar{u}_i) \to Q_{\mathbf{R}^n}(\bar{u})$. 由此可知：$\lambda(S^n) \geqslant \Lambda$. 但另一方面又有：

引理 2.2. 对任何紧致无边 Riemann 流形 (M, g) 均有 $\lambda(M) \leqslant \Lambda$，因此必有 $\lambda(S^n) = \Lambda$.

引理 2.2 只是对 $\lambda(M)$ 的一个粗略估计，由于我们在 §4 将对 $\lambda(M)$ 作细致的估计，因此这里暂不给出引理 2.2 的证明。

下面我们开始证明定理 2.1. 首先指出，$Q(u)$ 中的分母为一 L^p 积分，$p=\frac{2n}{n-2}$ 是 Sobolev 嵌入 $L_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M)$ $(1 \leqslant q \leqslant p)$ 的临界幂次. 当 $1 \leqslant q < p$ 时这个嵌入是紧嵌入，而当 $q=p$ 时这个嵌入只是连续的，而不是紧的. 这使得我们无法直接对 $Q(u)$ 进行极小化而获得其极小临界点. Yamabe 的办法是，先把幂次 p 减小为 $s<p$，这时可以用极小化过程获得逼近解 u_s，然后考察 u_s 在 $s \to p$ 时的收敛性（Yamabe 在这后一步中犯了一个错误，Trüdinger 指出了这个错误）. 确切地说，对于 $s \in (2, p]$ 定义泛函

$$Q_s(u) = \frac{E(u)}{\|u\|_s^2},$$

以及

$$\lambda_s = \inf\{Q_s(u) \mid u \in L_1^2(M)\setminus\{0\}\}.$$

利用 Hölder 不等式容易得到 λ_s 的一致下界。又注意，λ_s 的符号是与保角 Laplace 算子 L 的第一特征值 μ_1 的符号一致的。事实上，当 $\mu_1 \geqslant 0$ 时，$E(u) \geqslant \mu_1\|u\|_2^2 \geqslant 0$，$\forall u \in L_1^2(M)$，因此 $\lambda_s \geqslant 0$。而当 $\mu_1 < 0$ 时，取 L 的第一特征函数 φ_1，则 $E(\varphi_1) = \mu_1\|\varphi_1\|_2^2 < 0$，因此 $\lambda_s < 0$。

引理 2.3. $\overline{\lim\limits_{s\to p}}\lambda_s \leqslant \lambda(M)$。若 $\lambda_s \geqslant 0$，则 $\lambda_s \to \lambda(M)$ 当 $s \to p$。

证明：注意 $Q_p = Q$，所以 $\lambda_p = \lambda(M)$。现取 $u_i \in L_1^2(M)\setminus\{0\}$ 使 $Q_p(u_i) \to \lambda(M)$。固定 u_i，则有 $\lambda_s \leqslant Q_s(u_i) \to Q_p(u_i)$ 当 $s \to p$。由此可知 $\overline{\lim\limits_{s\to p}}\lambda_s \leqslant \lambda(M)$。在 $\lambda_s \geqslant 0$ 时，如上所述 $Q_s(u) \geqslant 0$，$\forall u$，故由 Hölder 不等式

$$Q_p(u) = Q_s(u)\cdot\frac{\|u\|_s^2}{\|u\|_p^2} \leqslant Q_s(u)\cdot V^{2\left(1-\frac{s}{p}\right)}.$$

因此 $\lambda_p = \lambda(M) \leqslant \lambda_s V^{2\left(1-\frac{s}{p}\right)}$，说明 $\underline{\lim\limits_{s\to p}}\lambda_s \geqslant \lambda(M)$。引理因而得证。

引理 2.4. 设 $2 < s < p$，则存在 $u_s \in C^\infty(M)$，$u_s > 0$，$\|u_s\|_s = 1$，使得 $Q_s(u_s) = \lambda_s$，且满足方程

$$Lu_s = \lambda_s u_s^{s-1}. \tag{2.4}$$

证明：取一极小化序列 $\{u_i\} \subset L_1^2(M)\setminus\{0\}$，使 $Q_s(u_i) \to \lambda_s$。由 $Q_s(|u|) \leqslant Q_s(u)$ 我们可设 $u_i \geqslant 0$。又由 $Q_s(tu) = Q_s(u)$，$\forall$ 正数 t，我们可取 $\|u_i\|_s = 1$。于是 $Q_s(u_i) = E(u_i) = \|\nabla u_i\|_2^2 + a\cdot\int_M Ru_i^2\,d\mu \to \lambda_s$。因此 $\|\nabla u_i\|_2^2 \leqslant c_1 + c_2\|u_i\|_2^2$。但又有 $\|u_i\|_2^2 \leqslant c\cdot\|u_i\|_s^2$ (Hölder 不等式)，可知 $\{u_i\}$ 在 $L_1^2(M)$ 中有界。因此我们可以假定 $\{u_i\}$ (或其子列) 在 $L_1^2(M)$ 中弱收敛于某个 u_s。作为弱极限，$\|\nabla u_s\|_2 \leqslant \underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\|\nabla u_i\|_2$。由于嵌入 $L_1^2 \hookrightarrow L^r$ 当 $1 \leqslant r < p$ 时是紧的，因此 $\int Ru_i^2\,d\mu \to \int Ru_s^2\,d\mu$，$\|u_i\|_s \to \|u_s\|_s = 1$。所以，$Q_s(u_s) \leqslant$

$\lim Q_s(u_i)=\lambda_s$. 由 λ_s 的定义必有 $Q_s(u_s)=\lambda_s$. 于是，作为 Q_s 的临界点，u_s 是 Euler-Lagrange 方程(2.4)的 L_1^2-弱解. u_s 的正则性可以用所谓靴带法（Boot-strape）得到. 由于 $Lu_s=\lambda_s u_s^{s-1}\in L^{q_1}$, $q_1=\dfrac{p}{s-1}$, 由椭圆算子的 L^p 理论可知 $u_s\in L_2^{q_1}$. 而由 Sobolev 嵌入定理推出 $u_s\in L^{p_1}$, $p_1=\dfrac{np}{ns-n-2p}>p$. 因此又有 $Lu_s\in L^{q_2}$, $q_2>q_1$. 重复以上步骤可证 $u_s\in L_2^q$, $\forall q>1$. 这样，在 $q>n$ 时就有 $u_s\in C^{1,\alpha}$. 利用 Schauder 理论又可把正则性提高到 $u_s\in C^{2,\alpha}$(注意方程右端 $\lambda_s u_s^{s-1}$ 是 Hölder 连续的). 最后注意，由于 $u_i\geqslant 0$, $u_s\geqslant 0$, 从方程(2.4)可知存在 $c\geqslant 0$ 使 $\Delta u_s-cu_s\leqslant 0$, 因而由极大值原理推出：若存在 $x_0\in M$ 使 $u_s(x_0)=0$, 则 $u_s\equiv 0$. 这不可能，所以 $u_s>0$. 由于当 $t>0$ 时函数 t^{s-1} 光滑，因此可以继续把 u_s 的正则性提到 $u_s\in C^\infty(M)$. 证毕.

现回到定理 2.1 的证明. 不难看出，如果 $u_s(s<p)$ 有一致的上界：$u_s\leqslant c$, 则用引理 2.4 证明中的推理可以得到 u_s 在 $C^{k,\alpha}(M)$ 中的一致界，k 为任意正整数，$0<\alpha<1$. 因而存在子列 $\{u_{s_i}\}$, $s_i\to p$, 在 $C^k(M)$ 中收敛于 $u\in C^\infty(M)$, 而 u 满足

$$Lu=\lambda u^{p-1},\quad Q(u)=\lambda,\quad u>0,$$

其中 $\lambda=\lim\lambda_{s_i}$. 在 $\lambda(M)\geqslant 0$ 的情形引理 2.3 说明 $\lambda=\lambda(M)$. 而在 $\lambda(M)<0$ 的情形，$\lambda\leqslant\lambda(M)$, 从而 $Q(u)\leqslant\lambda(M)$. 但由 $\lambda(M)$ 之定义，必有 $Q(u)=\lambda(M)$, u 即为所求的 Q 的极小解.

因此，为证定理 2.1 只需证 u_s 有界. 假定不存在这样的界，则存在 $s_k\to p$, $u_k=u_{s_k}$, $z_k\in M$, 使得 $u_k(z_k)=\max u_k\triangleq m_k\to+\infty$. 由于 M 紧致，可设 $z_k\to z_0\in M$. 取 z_0 处的一个正规坐标系，在此坐标系中

$$g_{ij}(x)=\delta_{ij}+O(|x|^2),\quad \det g_{ij}(x)=1+O(|x|^2).$$

设 z_k 的坐标为 x_k, 则 $x_k\to 0$ 当 $k\to\infty$. u_k 满足的方程可写为

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}}\partial_j(\sqrt{\det g(x)}g^{ij}(x)\partial_i u_k)-aR(x)u_k+\lambda_k u_k^{s_k-1}=0,$$

其中 $\lambda_k=\lambda_{s_k}$. 设此方程在 $|x|<1$ 上定义. 现定义

$$v_k(x)=m_k^{-1}u_k(\delta_k x+x_k),$$

其中 $\delta_k=m_k^{1-s_k/2}\to 0$, 则 v_k 在半径为 $\rho_k=(1-|x_k|)/\delta_k\to\infty$ 的球内定义, 并满足方程

$$\frac{1}{b_k}\partial_i(b_k a_k^{ij}\partial_j v_k)-c_k v_k+\lambda_k v_k^{s_k-1}=0, \qquad (2.5)_k$$

其中

$$\begin{aligned} a_k^{ij}(x)&=g^{ij}(\delta_k x+x_k)\to\delta_{ij},\\ b_k(x)&=\sqrt{\det g(\delta_k x+x_k)}\to 1, \qquad (2.6)\\ c_k(x)&=am_k^{2-s_k}R(\delta_k x+x_k)\to 0. \end{aligned}$$

这些收敛在 $\mathbf{R}^n$ 的任何有界闭域上是 C^1 一致收敛. 现注意, $0\leqslant v_k\leqslant v_k(0)=1$. 因此,对 $(2.5)_k$ 的解 v_k 进行 L^p 和 Schauder 内估计可得以下结论: 对任何 $R>0$, 存在 $C(R)>0$ 和 $k(R)>0$, 使得

$$\|v_k\|_{C^{2,\alpha}(B_R)}\leqslant C(R),\ \forall k\geqslant k(R).$$

取一列 $R_m\to\infty$, 用抽对角线子序列的办法可以得到子列 $\{v_m\}$, 使 $v_m\to v\in C^2(\mathbf{R}^n)$, 这收敛在每个 $\bar{B}_{R_m}$ 上是 C^2-收敛. 于是由 (2.5) 和 (2.6) 可知 v 是方程

$$\Delta v+\lambda v^{p-1}=0 \qquad (2.7)$$

的非负解, $v(0)=1$. 由极大值原理, $v>0$. 由引理 2.3, 当 $\lambda(M)\geqslant 0$ 时, (2.7) 中的 $\lambda=\lambda(M)$, 否则 $\lambda\leqslant 0$.

现注意, 通过积分变换有

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\frac{1}{2}\delta_k^{-1}} v_k^{s_k}b_k\,dx&=\int_{B_{\frac{1}{2}}(x_k)} u_k^{s_k}\sqrt{\det g}\,dx\cdot\delta_k^{\alpha_k}\\ &\leqslant\|u_k\|_{s_k}^{s_k}\cdot\delta_k^{\alpha_k}=\delta_k^{\alpha_k},\end{aligned}$$

其中 $\alpha_k=\dfrac{2s_k}{s_k-2}-n>0$, 因而 $\delta_k^{\alpha_k}<1$. 由于在任何有界集上 $v_m^{s_m}b_m$ 一致收敛于 v^p, 故由 Fatou 引理推出

$$\int_{\mathbf{R}^n} v^p dx\leqslant 1. \qquad (2.8)$$

类似可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v|^2 dx < \infty.$$

令 $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 为一截断函数，$0 \leqslant \eta \leqslant 1$，在 $B_1(0)$ 中 $\eta = 1$，在 $\mathbf{R}^n \setminus B_2(0)$ 上 $\eta = 0$. 定义 $v_R(x) = \eta\left(\frac{x}{R}\right) v(x)$. 容易验证

$$\int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla(v - v_R)|^2 + |v - v_R|^p) dx \to 0, \text{ 当 } R \to \infty. \tag{2.9}$$

用 v_R 乘以 (2.7) 并积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} \nabla v \cdot \nabla v_R dx = \lambda \int_{\mathbf{R}^n} v^{p-1} v_R dx.$$

由于 (2.9) 我们可在上式中令 $R \to \infty$ 而得

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v|^2 dx = \lambda \int_{\mathbf{R}^n} v^p dx. \tag{2.10}$$

如 $\lambda \leqslant 0$，(2.10) 说明 $v =$ 常数，而 (2.8) 说明这个常数为 0，这显然与 $v > 0$ 矛盾. 因此 $\lambda > 0$，此时 $\lambda = \lambda(M)$. 利用 (2.8)，(2.10) 以及 Sobolev 不等式我们得出

$$\Lambda \left(\int_{\mathbf{R}^n} v^p dx\right)^{2/p} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v|^2 dx = \lambda(M) \int_{\mathbf{R}^n} v^p dx,$$

从而

$$\Lambda \leqslant \lambda(M) \left(\int_{\mathbf{R}^n} v^p dx\right)^{2/n} \leqslant \lambda(M).$$

这与 $\lambda(M) < \lambda(S^n) = \Lambda$ 的假定相矛盾. 因此，在这一假定下 u_s 必有一致上界. 这完成了定理 2.1 的证明.

定理 2.1 把 Yamabe 问题的求解化为对 $\lambda(M)$ 的估计. 事实上，只要找到某个函数 φ，使得 $Q(\varphi) < \lambda(S^n)$，就有 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$，因而 Yamabe 问题可解. 利用这一点，Aubin (1976) 证明了：如果 $n \geqslant 6$，而 (M, g) 不是局部保角平坦的(即 Weyl 张量 $W \neq 0$)，则 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. Schoen (1984) 则解决了所有其余的情形，他证明：如果 (M, g) 不保角等价于标准的 S^n，则 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. 由于在 (M, g) 保角等价于 S^n 时问题显然有解(因为这时有保角微分同胚 $f: M \to S^n$，使 $f^* g_0 = \rho g$，g_0 为 S^n 的标准度量，$\rho \in C^\infty(M)$，显然 ρg 是常曲率度量)，Yamabe 问题获得

了完全解决。

Aubin 的证明是局部性的。假定 $n \geqslant 0$，且存在 $P \in M$ 使 $|W(P)| \neq 0$，这里 W 是保角不变的 Weyl 张量，则可以构造一个在 P 的任意小邻域内紧支的试验函数 φ，使 $Q(\varphi) < \lambda(S^n)$. Schoen 的证明则利用了流形的整体几何性质. 他注意到，保角 Laplace 算子 L 的 Green 函数与 $\mathbf{R}^n$ 上达到 Sobolev 最佳常数的函数 (2.3) 可以用来构造所需的试验函数 φ，而在 $n = 3$ 或 (M, g) 在 P 点附近保角平坦的情形，Green 函数的渐近公式中的常数 A 若大于 0 即可保证 $Q(\varphi) < \lambda(S^n)$. 利用广义正质量定理可以证明，当 (M, g) 不保角等价于 S^n 时，常数 $A > 0$. 在 $n = 4, 5$ 时，Schoen 利用对度量作精细的扰动的办法，也找到了适当的试验函数。

我们下面将要给出的证明，是基于 J. Lee 和 T. Parker 最近对上述证明的改进. 他们的主要改进是找到了所谓保角正规坐标系，并给出了 Green 函数在这种坐标系下的渐近公式. 这样，Aubin 和 Schoen 的证明可以统一起来，而对 $n = 4, 5$ 也不需要作特别的处理.

§3. 保角正规坐标与 Green 函数的渐近展开

我们首先证明 Lee-Parker 关于保角正规坐标系的一个结果，然后给出在这种坐标系下保角 Laplace 算子的 Green 函数的渐近展开公式. 以下我们称 M 为一 Riemann 流形，总是假定在 M 上给定了某个基准度量 g_1，称 g 为 M 上的一个保角度量则意味着 $g \in \mathscr{C}_{g_1}$.

定理 3.1. 设 M 为一 Riemann 流形，$P \in M$. 对于任何 $N \geqslant 2$，存在 M 上的一个保角度量 g，使得在 P 点处的 g 的正规坐标系中有

$$\det(g_{ij}) = 1 + O(r^N),$$

其中 $r = |x|$，在 $N \geqslant 5$ 时还有

$$R = O(r^2) \text{ 和 } \Delta R(P) = -\frac{1}{6}|W(P)|^2,$$

这里R和W分别为g的纯量曲率和 Weyl 张量。

在证明这个定理之前需先证明一些引理。

引理 3.2. 设$P\in M$，T是切空间T_PM上的一个$(k+2)$阶对称张量，$k\geqslant 0$. 存在唯一的一个$(k+2)$次齐次多项式f，使得在g的正规坐标系中度量$\tilde{g}=e^{2f}g$满足

$$\mathrm{Sym}(\tilde{\nabla}^k\tilde{R}_{ij})(P)=T, \tag{3.1}$$

其中 Sym(·) 表示张量的对称化，$\tilde{\nabla}$和$\tilde{R}_{ij}$分别是$\tilde{g}$的协变微分算子和 Ricci 曲率。

证明：令$\{x^i\}$为g在P点处的正规坐标系，$r=|x|$. 用$\mathscr{P}_m$表示x的m次齐次多项式的空间。令 $F(x)=R_{ij}(x)x^ix^j$，则由 Taylor 公式有

$$F(x)=\sum_{m=2}^{k+2}F^{(m)}(x)+O(r^{k+3}),$$

其中

$$F^{(m)}(x)=\frac{1}{(m-2)!}\sum_{i,j,|K|=m-2}\partial_KR_{ij}(P)x^ix^jx^K\in\mathscr{P}_m.$$

这里$K=(k_1,\cdots,k_{m-2})$，$x^K=x^{k_1}\cdots x^{k_{m-2}}$，$|K|=\Sigma k_l$. 注意，Ricci 曲率的协变导数 $R_{ij,K}(P)=\partial_KR_{ij}(P)+S_{ijK}$，其中$S_{ijK}$是由$R_{ij}$的阶数小于$|K|$的导数所构成的多项式. 因此，如$f\in\mathscr{P}_{k+2}$，$\tilde{g}=e^{2f}g$，则对$|K|=k$有$\tilde{S}_{ijK}=S_{ijK}$. 又注意，(3.1) 等价于

$$\begin{aligned}0=\sum_{|K|=k}(\tilde{R}_{ij,K}(P)-T_{ijK})x^ix^jx^K=k!\tilde{F}^{(k+2)}(x)\\+\sum_{|K|=k}(S_{ijK}-T_{ijK})x^ix^jx^K.\end{aligned} \tag{3.2}$$

由关于齐次多项式的 Euler 公式有：$x^ix^j\partial_i\partial_jf=(x^i\partial_i)^2f-x^i\partial_if=(k+2)(k+1)f$. 又有 $\Delta f=\Delta_0f+O(r^{k+1})$，其中$\Delta_0$为欧氏 Laplace 算子. 于是由$\tilde{R}_{ij}$与$R_{ij}$的关系(参见本章开始部分)可以导出

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{(k+2)}(x)&=F^{(k+2)}(x)+x^ix^j[(2-n)\partial_i\partial_jf-(\Delta_0f)\delta_{ij}]\\&=F^{(k+2)}(x)-(n-2)(k+2)(k+1)f-r^2\Delta_0f.\end{aligned}$$

下面的引理说明，算子$r^2\Delta_0+(n-2)(k+2)(k+1)$在$\mathscr{P}_{k+2}$上可逆，因此存在唯一的$f\in\mathscr{P}_{k+2}$使(3.2)成立。证毕。

引理 3.3. $r^2\Delta_0$在$\mathscr{P}_m$上的特征值为

$$\{\lambda_j=2j(n-2+2m-2j);j=0,\cdots,[m/2]\}.$$

对应于λ_j的特征函数是形如$r^{2j}\phi$的函数，其中$\phi\in\mathscr{P}_{m-2j}$是调和多项式。

证明：对于$m=0$或1引理显然成立。现设$m\geqslant 2$，$f\in\mathscr{P}_m$满足$r^2\Delta_0 f=\lambda f$. 由 Euler 公式，$\Delta_0 f\in\mathscr{P}_{m-2}$满足

$$\begin{aligned}\lambda\Delta_0 f&=\Delta_0(r^2\Delta_0 f)=\Delta_0(r^2)\Delta_0 f+4x^i\partial_i\Delta_0 f+r^2\Delta_0^2 f\\&=2n\Delta_0 f+4(m-2)\Delta_0 f+r^2\Delta_0^2 f.\end{aligned}$$

因此，$r^2\Delta_0(\Delta_0 f)=(\lambda-2n-4m+8)\Delta_0 f$. 这说明，或者$\Delta_0 f=0$，因而$\lambda=0$及$f$为调和，或者$(\lambda-2n-4m+8)$是$r^2\Delta_0$在$\mathscr{P}_{m-2}$上的特征值，对应的特征函数为$\Delta_0 f$. 在后一种情形$f$可表示为$f=\lambda^{-1}r^2\Delta_0 f$. 由此不难用归纳法完成证明.

引理 3.4. 在g的正规坐标系中，$\det(g_{ij})$有如下的展开式：

$$\begin{aligned}\det(g_{ij})=1&-\frac{1}{3}R_{ij}x^ix^j-\frac{1}{6}R_{ij,k}x^ix^jx^k\\&-\left(\frac{1}{20}R_{ij,kl}+\frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm}\right.\\&\left.-\frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\right)x^ix^jx^kx^l+O(r^5),\end{aligned}$$

其中系数中的曲率均取值于P点。

证明：令$\{x^i\}$为g在P的一个邻域U上的正规坐标，通过这些坐标把U和$\mathbf{R}^n$的一个开集相等同，P与坐标原点相等同. 先回忆 Jacobi 场的定义。固定$\tau,\xi\in\mathbf{R}^n$，考虑映射$\gamma:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$，定义为$\gamma_s(t)=t(\tau+s\xi)$，这决定了一个单参数族的从原点出发的测地线. 令$T=\gamma_s'(t)$. 变分向量场$X(\gamma_s(t))=\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)=t\xi$称为 Jacobi 场. 由于对每个$s$，$\gamma_s$满足测地线方程$\nabla_T T=0$，又由于$0=\gamma_*\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}\right]=[T,X]=\nabla_T X-\nabla_X T$，我们有

$$0=\nabla_X\nabla_T T=\nabla_T\nabla_X T+\nabla_{[X,T]}T-R(T,X)T$$
$$=\nabla_T\nabla_T X-R(T,X)T.$$

因此 X 满足 Jacobi 方程 $\nabla_T^2 X=R_T(X)$，这里 R_T 表示曲率导出的线性映射 $R(T,\cdot)T$.

$f(t)=|X(\gamma_0(t))|^2$ 的 Taylor 级数，可以通过用 ∇_T 反复对之微分而求出. 利用 Jacobi 方程，$X(0)=0$ 及 $\nabla_T X(0)=\xi$，算出最初几项为：

$$\nabla_T f(0)=0,\ \nabla_T^2 f(0)=2\langle\xi,\xi\rangle(0),\ \nabla_T^3 f(0)=0,$$
$$\nabla_T^4 f(0)=8\langle R_\tau\xi,\xi\rangle(0),\ \nabla_T^5 f(0)=20\langle(\nabla_\tau R_\tau)\xi,\xi\rangle(0),$$
$$\nabla_T^6 f(0)=36\langle(\nabla_\tau^2 R_\tau)\xi,\xi\rangle(0)+32\langle R_\tau\xi,R_\tau\xi\rangle(0).$$

因此，

$$\langle\xi,\xi\rangle(t\tau)=t^{-2}|X(\gamma_0(t))|^2=\langle\xi,\xi\rangle+\frac{t^2}{3}\langle R_\tau\xi,\xi\rangle$$
$$+\frac{t^3}{6}\langle(\nabla_\tau R_\tau)\xi,\xi\rangle+\frac{t^4}{20}\langle(\nabla_\tau^2 R_\tau)\xi,\xi\rangle$$
$$+\frac{2t^4}{45}\langle R_\tau\xi,R_\tau\xi\rangle+O(t^5),\qquad (3.3)$$

其中右端的内积均在原点取值. 令 $t\tau=x$，$\xi=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\pm\dfrac{\partial}{\partial x^j}$，则由 (3.3) 可得

$$g_{pq}(x)=\delta_{pq}+\frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j+\frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k$$
$$+\left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl}+\frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)$$
$$\times x^ix^jx^kx^l+O(r^5),\qquad (3.4)$$

其中曲率项均取值于原点. 令 $(g_{pq})=\exp(A_{pq})$，则

$$A_{pq}(x)=\frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j+\frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k$$
$$+\left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl}+\frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)$$
$$\times x^ix^jx^kx^l+O(r^5).$$

由此可知，$\det(g_{pq})=\exp(\mathrm{tr}A_{pq})$ 具有引理给出的展开式. 证毕.

定理 3.1 的证明：归纳地假定 g 满足 $\det(g_{ij}) = 1 + O(r^N)$，$N \geqslant 2$．容易看出，在展开式 (3.3) 中每一项均取如下形式：

$$c_k t^k [\langle (\nabla_\tau^{k-2} R_\tau)\xi, \xi \rangle + B_k(\xi, \xi)],$$

其中 c_k 为常数，B 是由 R_τ 的阶数小于 $k-2$ 的导数所构成的双线性型．

因此 $\det(g_{ij})$ 的展开式可写为：

$$\det(g_{ij}) = 1 + \sum_{|K|=N-2} c_N (R_{ij,K} - T_{ijK}) x^i x^j x^K + O(r^{N+1}), \tag{3.5}$$

其中 T_{ijK} 为由曲率的小于 $N-2$ 阶的导数构成的 T_pM 上的一个对称张量 T 的分量．

由引理 3.2，可取 $f \in \mathscr{P}_N$，$\tilde{g} = e^{2f} g$，使得 $\operatorname{sym}(\tilde{\nabla}^{N-2}\tilde{R}_{ij}) = T$．注意 $\det(\tilde{g}_{ij})$ 也满足 (3.5)，其中 R_{ij} 与 T 换为 $\tilde{R}_{ij}$ 与 $\tilde{T}$．但在 $f \in \mathscr{P}_N$ 的情形 $\tilde{T} = T$，故由 $\operatorname{sym}(\tilde{\nabla}^{N-2}\tilde{R}_{ij}) = \tilde{T}$ 推出 $\det(\tilde{g}_{ij}) = 1 + O(r^{N+1})$．这完成了 $\det(g_{ij})$ 的渐近展开的归纳证明．

现设 $N \geqslant 5$，则由 $\det(g_{ij}) = 1 + O(r^5)$ 知引理 3.4 所给出的展开式中的系数为零，即在 P 点处有

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad R_{ij} = 0,\\
&\text{(b)}\quad R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0, \qquad\qquad (3.6)\\
&\text{(c)}\quad \operatorname{sym}\left(R_{ij,kl} + \frac{2}{9} R_{pijm} R_{pklm} \right) = 0.
\end{aligned}$$

由 (3.6a) 知 $R_{ijkl} = W_{ijkl}$ 以及

$$R_{ij,kl} - R_{ij,lk} = R^m_{ikl} R_{mj} + R^m_{jkl} R_{im} = 0,$$

因此由 (3.6c) 推出

$$\begin{aligned}
&(R_{ij,kl} + R_{kl,ij} + 2R_{ik,jl} + 2R_{jl,ik}) x^i x^j \\
&\quad + \frac{2}{9} (W_{pijm} W_{pklm} + W_{pikm} W_{pjlm} \\
&\quad + W_{pkim} W_{pjlm} + W_{pjkm} W_{plim} + W_{pkjm} W_{plim} \\
&\quad + W_{plkm} W_{pjim}) x^i x^j = 0.
\end{aligned}$$

现缩并指标 k, l，注意由 Weyl 张量的对称性有 W_{pikm} $W_{pkjm} =$

$\frac{1}{2}W_{pikm}(W_{pkim}-W_{pmik})=\frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm}$，并利用 Bianchi 恒等式 $R_{,j}=2R^i_{j,i}$，即得出

$$\left(3R_{,ij}+R_{ij,kk}+\frac{2}{3}W_{ipkm}W_{jpkm}\right)x^ix^j=0. \qquad (3.7)$$

再缩并 i,j，得到 $\Delta R=R_{,ii}=-\frac{1}{6}|W|^2$.

最后，由 (3.6a)，$R(P)=R_{ii}(P)=0$. 由 (3.6b) 有 $R_{,i}(P)=-2R_{ij,j}$，与 Bianchi 恒等式相加即得 $2R_{,j}(P)=0$. 定理 3.1 证毕.

我们称定理 3.1 给出的保角度量及其正规坐标系为保角坐标系，并且将总假定 $\det(g_{ij})=1+O(r^N)$ 中的N充分大. 下面讨论在 $\lambda(M)>0$ 的情形下，$L=-\Delta+R$ 的 Green 函数在保角正规坐标系下的渐近展开. 由熟知的结果，在 $R>0$ 的情形，存在唯一的 Green 函数 $G_P\in C^\infty(M\backslash\{P\})$ 使得

$$LG_P=\delta_P,\ G_P>0,$$

其中 δ_P 表示P点处的 Dirac 测度，并且在P点处的正规坐标系中有：$G_P(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}r^{2-n}(1+o(1))$. 事实上，在 $\lambda(M)>0$ 的条件下，$R>0$ 的限制可以去掉. 这是因为，由 §2 的结果，对于 $2<s<p$，存在 $u_s>0$ 满足 $Lu_s=\lambda_su_s^{s-1}$，其中 $\lambda_s>0$. 因此度量 $g'=u_s^{p-2}g$ 的纯量曲率 $R'=a^{-1}u_s^{1-p}Lu_s=a^{-1}\lambda_su_s^{s-p}>0$，所以$g'$的保角 Laplace 算子 L' 有 Green 函数 G'_P. 但直接计算可得

$$L(u_sv)=u_s^{p-1}L'v,\ \forall v\in C^2(M).$$

由此容易验证 $G_P\triangleq u_s(P)u_sG'_P$ 是L的 Green 函数.

以下为了计算方便，令 $G(x)=(n-2)\omega_{n-1}G_P(x)$，$x\in M\backslash\{P\}$，因此 $LG=(n-2)\omega_{n-1}\delta_P$，以及 $G(x)=r^{2-n}(1+o(1))$.

定理 3.5. 在保角正规坐标系下，G 有如下的渐近展开式：

(a) 在 $n=3,4,5$ 或 M 在P的一个邻域内保角平坦的情形，

$$G=r^{2-n}+A+\alpha(x),$$

其中A为常数，$\alpha = O(r)$，除$n=4$之外均有$\alpha \in C^{1,\mu}$，而在$n=4$时，$\alpha = P_2(x)\log r + \alpha_0$，其中$P_2(x)$为2次齐次多项式，$\alpha_0 \in C^{2,\mu}$；

(b) 在$n=6$的情形，

$$G = r^{2-n} - \frac{a}{288}|W(P)|^2 \log r + \alpha(x),$$

其中$\alpha = P(x)\log r + \alpha_0$，$P(x)$为多项式，$P(0)=0$，$\alpha_0 \in C^{2,\mu}$；

(c) 在$n \geqslant 7$的情形，

$$G = r^{2-n}\left[1 + \frac{a}{12(n-4)}\left(\frac{r^4}{12(n-6)}|W(P)|^2 - R_{,ij}(P)x^i x^j r^2\right)\right] + \alpha(x),$$

其中$\alpha(x) = (P(x)\log r + \alpha_0)r^{7-n}$，$P(x)$为多项式，$\alpha_0 \in C^{2,\mu}$。

证明：我们可写$G = r^{2-n}(1+\phi)$，其中$\phi = O(1)$。注意，若函数f只依赖于r，则在正规坐标系下有

$$\Delta f = \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{\det g}}\partial_r(r^{n-1}\sqrt{\det g}\,\partial_r f).$$

事实上，在极坐标(r,ξ)下，其中$\xi \in S^{n-1}$，$g = dr^2 + h_{ij}(r,\xi)\cdot d\xi^i d\xi^j$，且$\det(h_{ij}) = r^{n-1}\sqrt{\det g}$。由于$g^{rr}=1$，$f$不依赖于$\xi$，故有以上表达式。利用$\det g = 1 + O(r^N)$，容易算出$\Delta r^{2-n} = \Delta_0 r^{2-n} + \theta$，其中$\Delta_0$为欧氏度量下的 Laplace 算子，$\theta \in \mathscr{C}_{N'}$。这里及以下我们用$\mathscr{C}_k$表示直到$k$阶导数均在原点为零的$C^\infty$函数的集合。注意$N'$可以充分大，只要$N$充分大。由于$\Delta_0 r^{2-n} = -(n-2)\omega_{n-1}\delta_P$，所以$\Delta r^{2-n} = -(n-2)\omega_{n-1}\delta_P + \theta$。于是方程$LG = (n-2)\cdot\omega_{n-1}\delta_P$就化为

$$L(r^{2-n}\phi) + aRr^{2-n} = \theta. \tag{3.8}$$

令$L_0 = -r^2\Delta_0 + 2(n-2)r\partial_r$，$K = r^2(\Delta - \Delta_0) + 2(n-2)\cdot(r\partial_r - g^{ij}x_i\partial_j)$，则(3.8)等价于

$$L_0\phi = K\phi + aRr^2(1+\phi) + \theta. \tag{3.9}$$

为了求出G的渐近式，我们采取以下办法：先找一个$\phi \in C^\infty(B\backslash$

$\{0\}$)，满足 $\tilde{\phi}=o(1)$ 以及

$$L_0\phi-K\tilde{\phi}-aRr^2(1+\tilde{\phi})\in\mathscr{C}_{n-1}\oplus\mathscr{C}_{n+1}\cdot\log r,\quad(3.10)$$

这里 $\mathscr{C}_{n+1}\cdot\log r=\{f(x)\log r\,|\,f\in\mathscr{C}_{n+1}\}$. 容易验证 (3.10) 等价于

$$L(r^{2-n}\tilde{\phi})+aRr^{2-n}\in\mathscr{C}_1\oplus\mathscr{C}_1\cdot\log r.$$

因此，如令 $\phi-\tilde{\phi}=\varphi$，则由上式及 (3.8) 推出

$$L(r^{2-n}\varphi)\in C^{\mu}(B).$$

由此可以断定 $r^{2-n}\varphi\in C^{2,\mu}$. 事实上，令 v 为 Dirichlet 问题

$$Lv=L(r^{2-n}\varphi)\in C^{\mu},\quad v|\partial B=r^{2-n}\varphi,$$

的解，由椭圆正则性定理 $v\in C^{2,\mu}$. 而 $W=r^{2-n}\varphi-v$ 满足 $LW=0$, $W|\partial B=0$. 注意由于 $\varphi=o(1)$, $W=o(r^{2-n})$, 因此对任何 $\varepsilon>0$ 有 $\varepsilon G>W$ 在 $r=1$ 和 r 充分小的地方，又注意在 $B\backslash\{0\}$ 上 $LG=0$, 故由极大值原理 $\varepsilon G>W$ 在 $B\backslash\{0\}$ 上成立. 令 $\varepsilon\to 0$，得 $W\leqslant 0$. 同理可证 $W\geqslant 0$，从而 $W=0$，即 $r^{2-n}\varphi=v\in C^{2,\mu}$. 这样就有 $G=r^{2-n}(1+\tilde{\phi})+v$，其中 $v\in C^{2,\mu}$.

问题现归结为求适当的 $\tilde{\phi}$，使 (3.10) 成立. 先讨论 n 是奇数的情形. 设 $\tilde{\phi}=\phi_1+\cdots+\phi_n$，其中 $\phi_k\in\mathscr{C}_k$. 取 $\phi_1=\phi_2=\phi_3=0$. 归纳地假定已经取到 $\tilde{\phi}=\phi_1+\cdots+\phi_{k-1}$，使

$$L_0\tilde{\phi}-K\phi-aRr^2(1+\phi)\in\mathscr{C}_k.\qquad(3.11)_k$$

由于 $R=O(r^2)$, $aRr^2\in\mathscr{C}_4$, 因此在 $k\leqslant 4$ 时取 $\tilde{\phi}=0$ 可使 $(3.11)_k$ 成立. 现将 $(3.11)_k$ 的右端改写为 $b_k+\mathscr{C}_{k+1}$，其中 $b_k\in\mathscr{P}_k$. 由于在 $\mathscr{P}_k$ 上 $L=-r^2\Delta_0+2k(n-2)$，引理 3.3 说明在 n 是奇数时 L_0 在 $\mathscr{P}_k$ 上可逆. 取 $\phi_k=-L_0^{-1}b_k$，则 $\tilde{\phi}=\phi_1+\cdots+\phi_k$ 满足 $(3.11)_{k+1}$. 由归纳法，存在 $\tilde{\phi}=\phi_1+\cdots+\phi_n$ 使 (3.10) 成立.

现设 n 是偶数. 以上构造对 $k<n-2$ 仍成立，但对 $k\geqslant n-2$, L_0 在 $\mathscr{P}_k$ 上不再可逆. 注意 L_0 在 $\mathscr{P}_k$ 上关于内积 $\langle\Sigma a_Ix^I,\Sigma b_Ix^I\rangle=\Sigma a_Ib_I$ 是自伴算子，因此 $\mathscr{P}_k=\mathrm{im}L_0\oplus\ker L_0$. 在 $\ker L_0\neq\{0\}$ 时，我们取 $\phi_k=p_k+q_k\log r$，其中 p_k, $q_k\in\mathscr{P}_k$. 计算可得：

$$L_1(p_k + q_k \log r) = L_0 p_k + (n-2-2k) q_k + (L_0 q_k) \log r. \tag{3.12}$$

由于任何 $b_k \in \mathscr{P}_k$ 可写为 $b_k = L_0 p_k + q_k$，其中 $L_0 q_k = 0$，(3.12) 说明 $L_1 \phi_k = -b_k$ 有解：

$$\phi_k = p_k + (n-2-2k)^{-1} q_k \log r.$$

在 $k = n-2$ 时，引理 3.3 说明 $\ker L_1$ 由 r^{n-2} 张成。因此，

$$\phi_{n-2} = p_{n-2} + c r^{n-2} \log r.$$

对于 $f = f(r)$，由 K 的定义以及关于度量的渐近展开 (3.4) 可得

$$Kf = r^2 \partial_i \left[\left(\frac{1}{3} R_{iklj} x^k x^l + \theta_i \right) r^{-1} x^j f'(r) \right],$$

其中 $\theta \in \mathscr{C}_3$。但由曲率的对称性，$R_{iklj} x^k x^l x^j = 0$。所以，对 $f(r) = c r^{n-2} \log r$，$Kf \in \mathscr{C}_{n+1} \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r$。因而 $K\phi_{n-2} \in \mathscr{C}_n \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r$。取 $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_{n-2}$，就有

$$L_0 \phi - K\phi - aRr^2(1+\phi) \in \mathscr{C}_{n-1} \oplus \mathscr{C}_{n+1} \cdot \log r.$$

继而，对 $k = n-1$ 和 n，可按同样方法解出 $\phi_k \in \mathscr{P}_k \oplus \mathscr{P}_k \cdot \log r$。最后，令 $\bar{\phi} = \phi_1 + \cdots + \phi_n$，$\bar{\phi}$ 即满足 (3.10)。

现设 $n = 3$，则 $\bar{\phi} = 0$；$n = 5$，则 $\bar{\phi} = p_4 + p_5$；$n = 4$，则 $\bar{\phi} = \phi_4 = p_2(x) \log r$。在这些情形易见展开式 (a) 成立。

在 M 在 P 点附近保角平坦的情形，则可取保角度量 g 使之在 P 的邻域内与欧氏度量相同。这时方程 (3.8) 成为 $\Delta_0(r^{2-n}\phi) = 0$，即 $r^{2-n}\phi$ 调和。由于 $\phi = o(1)$，故知 $r^{2-n}\phi \in C^\infty$，因此 (a) 成立。

在 $n \geqslant 6$ 的情形，$\bar{\phi} = \phi_4 + \cdots + \phi_n$，我们只需求出首项 ϕ_4。由前面的分析可知，ϕ_4 满足

$$L_0 \phi_4 = -\frac{a}{2} r^2 \partial_k \partial_l R(P) x^k x^l.$$

在 $n > 6$ 时，利用 $\Delta R(P) = R_{,kk}(P) = -\frac{1}{6} |W(P)|^2$，取 $\phi_4 = r^2 b_{kl} x^k x^l$ 的形式代入方程可算出

$$\phi_4 = \frac{a}{12(n-4)} \left[\frac{r^4}{12(n-6)} |W(P)|^2 - R_{,kl}(P) x^k x^l r^2 \right].$$

由此得展开式(c)．在 $n=6$ 的情形，取 $\phi_4=r^l(b_{kl}+c_{kl}\log r)x^kx^l$ 代入方程，则求出

$$\phi_4=-\frac{a}{24}\left[R_{,kl}(P)x^kx^lr^2+\frac{r^4}{12}|W(P)|^2\log r\right],$$

由此可得展开式(b)．定理 3.5 证毕．

在下一节中我们将看到，定理 3.5 情形(a)中 G 的展开式里的常数 A，对于构造满足 $Q(\varphi)<\lambda(S^n)$ 的试验函数 φ 是非常重要的．如果 $A>0$，就能找到这样的函数．利用广义正质量定理可以证明：

定理 3.6. 设 $n=3,4,5$ 或 M 在 P 点附近保角平坦，则定理 3.5 (a) 中 G 的展开式里的 $A\geqslant 0$．$A=0$ 当且仅当 M 保角等价于标准的 S^n．

为了叙述正质量定理，先引进"渐近平坦"流形的概念．设 (M,g) 是一光滑 Riemann 流形，称 (M,g) 是 τ 阶渐近平坦的，如果 $M=M_0\cup M_\infty$，其中 M_0 紧致，M_∞ 微分同胚于 $\mathbf{R}^n\backslash B_R(R>0)$，且在 M_∞ 上有坐标系 $\{y^i\}$ 使得 $g_{ij}=\delta_{ij}+O(|y|^{-\tau})$，$\partial_kg_{ij}=O(|y|^{-\tau-1})$，$\partial_k\partial_lg_{ij}=O(|y|^{-\tau-2})$．称这个坐标系为渐近坐标系．以下是广义正质量定理的一种形式：

定理 3.7. 设 (M,g) 是 $(n-2)$ 阶的 n 维渐近平坦流形，且在渐近坐标系中有

$$g_{ij}=(1+\bar{A}\rho^{2-n})\delta_{ij}+h_{ij},\tag{3.13}$$

其中 $\bar{A}$ 为常数，$\rho=|y|$，$h_{ij}=O(\rho^{1-n})$，$\partial_kh_{ij}=O(\rho^{-n})$，$\partial_k\partial_lh_{ij}=O(\rho^{-n-1})$．又设纯量曲率 $R\geqslant 0$，$R\in L^1(M,g)$，则有 $\bar{A}\geqslant 0$，$\bar{A}=0$ 当且仅当 (M,g) 等距于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$．

我们计划在以后用专门的一章来讨论正质量定理，这里暂不证明定理 3.7．

定理 3.6 的证明：令 $\hat{g}=G^{\frac{4}{n-2}}g$，则 $(M\backslash\{P\},\hat{g})$ 的纯量曲率 $\hat{R}=0$，因为在 $M\backslash\{P\}$ 上 $LG=0$．而且，不难看出 $(M\backslash\{P\},\hat{g})$ 是渐近平坦的．事实上，由 G 在保角正规坐标系下的展开及 $g_{ij}=\delta_{ij}+f_{ij}$，其中 $f_{ij}\in C^\infty$，$\partial_kf_{ij}(P)=0$，可知

$$\hat{g}_{ij}(x) = r^{-4}\left(1 + \frac{4}{n-2} A r^{n-2}\right)\delta_{ij} + \beta_{ij}(x),$$

其中 $\beta = O(r^{n-5}), \partial\beta = O(r^{n-6}), \partial\partial\beta = O(r^{n-7})$. 现取渐近坐标系 $\{y^i\}$ 使 $y^i = \frac{x^i}{|x|^2}$,则在新坐标系下 $\hat{g}_{ij}(y) = r^4\hat{g}_{ij}(x)$,即有

$$\hat{g}_{ij}(y) = \left(1 + \frac{4}{n-2} A \rho^{2-n}\right)\delta_{ij} + \bar{\beta}_{ij}(x),$$

其中 $\bar{\beta}_{ij}(x) = \rho^{-4}\beta_{ij}\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$ 满足定理 3.7 的条件. 故由定理 3.7 知 $A \geqslant 0$, 而在 $A = 0$ 的情形 $(M\backslash\{P\}, \hat{g})$ 等距于 $\mathbf{R}^n$. 由 $\mathbf{R}^n$ 保角等价于 $S^n\backslash\{$一点$\}$容易看出: (M, g) 必保角等价于 S^n. 证毕.

§4. Yamabe 问题的解决

本节我们通过构造试验函数的办法来证明:

定理 4.1. 设 (M, g) 为一 $n \geqslant 3$ 维紧致无边 Riemann 流形. 如果 (M, g) 不保角等价于标准的 S^n, 则 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

利用定理 2.1 我们立即推出: Yamabe 问题在任何情形都是可解的. 这是本章的主要结论. 确切地说, 有以下定理.

定理 4.2. 设 (M, g) 为一 $n \geqslant 3$ 维紧致无边 Riemann 流形,则存在保角度量 $\tilde{g} = \rho g$, $\rho \in C^\infty(M)$ 为一正值函数,使得 $\tilde{g}$ 的纯量曲率为常数.

以下我们证明定理 4.1. 为了构造试验函数, 需利用 $\mathbf{R}^n$ 上达到最佳 Sobolev 常数的函数 (2.3) 中的一个单参数族

$$u_\varepsilon(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

容易验证 u_ε 满足 $\mathbf{R}^n$ 上的椭圆方程

$$\Delta u_\varepsilon + n(n-2)u_\varepsilon^{p-1} = 0, \tag{4.1}$$

其中 $p = \frac{2n}{n-2}$. 用 u_ε 乘以 (4.1) 再在 $\mathbf{R}^n$ 上积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = n(n-2)\int_{\mathbf{R}^n} u_\varepsilon^p dx.$$

因此有

$$\lambda(S^n) = A = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon^p dx\right)^{2/p}} = n(n-2)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon^p dx\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{4.2}$$

我们分几种情形证明定理 4.1.

情形 (1). $n \geqslant 6$, (M, g) 不是局部保角平坦流形.

在这一情形，存在 $P \in M$，使 Weyl 张量在 P 点不为零，即 $|W(P)| \neq 0$. 取 P 点处的保角正规坐标系 $\{x^i\}$，利用这坐标系定义截断函数 $\eta \in C^\infty(M)$，使 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$，$\eta = \eta(r)$，$\eta$ 在 $B_\rho = B_\rho(0)$ 上等于 1，在 $M \backslash B_{2\rho}$ 上等于 0. 这里 ρ 是一个充分小的正数. 此外，我们可设 $|\nabla \eta| \leqslant c\rho^{-1}$，$c$ 为常数. 定义 $\varphi = \eta u_\varepsilon$，将证当 ε 充分小时有 $Q(\varphi) < \lambda(S^n)$. 由于 φ 只依赖于 r，我们有(参见定理 3.5 的证明)

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla \varphi|^2 d\mu &= \int_{B_{2\rho}} |\partial_r \varphi|^2 \sqrt{\det g}\, dx \leqslant \int_{B_{2\rho}} |\partial_r \varphi|^2 (1 + cr^N) dx \\ &= \int_{B_\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + c\int_{B_\rho} r^N |u_\varepsilon|^2 dx \\ &\quad + \int_{B_{2\rho} \backslash B_\rho} |\nabla(\eta u_\varepsilon)|^2 (1 + cr^N) dx,\end{aligned}$$

其中 N 充分大. 利用 u_ε 的表达式及 η 的性质，可估计上式右端第二项积分 $= O(\varepsilon^N)$，第三项积分 $= O(\varepsilon^{n-2})$. 注意，我们总假定 $\varepsilon \ll \rho$. 对第一项积分，利用方程 (4.1) 可得

$$\int_{B_\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = n(n-2)\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx + \int_{\partial B_\rho} u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} ds.$$

注意 $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} < 0$ 以及 (4.2) 就有

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &< n(n-2)\left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx\right)^{2/n} \cdot \left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx\right)^{2/p} \\ &< \lambda(S^n)\left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx\right)^{2/p}.\end{aligned}$$

所以，

$$\int_M |\nabla \varphi|^2 d\mu < \lambda(S^n)\left(\int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx\right)^{2/p} + c\varepsilon^{n-2}. \tag{4.3}$$

另一方面，

$$\int_M \varphi^p d\mu = \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p \sqrt{\det g}\, dx + \int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho} (\eta u_\varepsilon)^p \sqrt{\det g}\, dx$$

$$\geqslant \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx - c\int_{B_\rho} r^N u_\varepsilon^p dx - \int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho} u_\varepsilon^p (1 + cr^N) dx$$

$$\geqslant \int_{B_\rho} u_\varepsilon^p dx - c\varepsilon^n. \tag{4.4}$$

又注意在保角正规坐标系下，$R = O(r^2)$，$\Delta R(P) = -\frac{1}{6}|W(P)|^2$，因此

$$\int_M R\varphi^2 d\mu = \int_{B_{2\rho}} \left[\frac{1}{2}\partial_i\partial_j R(P)x^i x^j + O(r^3)\right]\eta^2 u_\varepsilon^2 dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{B_{2\rho}} \partial_i\partial_j R(P)x^i x^j \eta^2 u_\varepsilon^2 dx + c \times \int_{B_\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 dr \times \int_{|x|=r} \partial_i\partial_j R(P)x^i x^j ds + c\int_{B_{2\rho}} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^3 dx$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{2n}\Delta R(P)\int_0^{2\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+1} dr + c\omega_{n-1} \times \int_0^{2\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+2} dr \leqslant -c_1|W(P)|^2 \times \int_0^{2\rho} \eta^2 u_\varepsilon^2 r^{n+1} dr < -c_1|W(P)|^2 \int_0^{\rho} u_\varepsilon^2 r^{n+1} dr,$$

其中 c_1 为适当的正常数．现有

$$\int_0^\rho u_\varepsilon^2 r^{n+1} dr = \int_0^\rho \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2}\right)^{n-2} r^{n+1} dr \quad (令\ r = \varepsilon t)$$

$$= \varepsilon^4 \int_0^{\rho/\varepsilon} \frac{t^{n+1} dt}{(1+t^2)^{n-2}}.$$

由此可知，

$$\int_M R\varphi^2 d\mu \leqslant \begin{cases} -c|W(P)|^2\varepsilon^4|\log\varepsilon|, & 如\ n = 6, \\ -c|W(P)|^2\varepsilon^4, & 如\ n > 6. \end{cases}$$

结合 (4.3)，(4.4) 即得出

$$E(\varphi)=\int_M|\nabla\varphi|^2d\mu+a\int_M R\varphi^2d\mu$$

$$\leqslant\begin{cases}\lambda(S^n)\|\varphi\|_p^2-c|W(P)|^2\varepsilon^4|\log\varepsilon|+O(\varepsilon^4), & \text{如 } n=6,\\ \lambda(S^n)\|\varphi\|_p^2-c|W(P)|^2\varepsilon^4+O(\varepsilon^{n-2}), & \text{如 } n>6.\end{cases}$$

由于 $|W(P)|>0$，显然有 $Q(\varphi)=E(\varphi)/\|\varphi\|_p^2<\lambda(S^n)$，只要 ε 充分小。

情形 (2). $n\geqslant 6$，(M,g) 局部保角平坦。

设 $P\in M$。由于 M 局部保角平坦，可取 P 点处的保角正规坐标系 $\{x^i\}$，使在此坐标系下 $g_{ij}=\delta_{ij}$。由定理 3.5，我们有 $G=r^{2-n}+A+\alpha(x)$，其中 $\alpha\in C^\infty$，$\alpha(x)=O(r)$。取 ρ 充分小，η 为情形 (1) 中定义的截断函数。定义如下试验函数：

$$\varphi(x)=\begin{cases}u_\varepsilon(x), & \text{当 } r\leqslant\rho,\\ \varepsilon_0(G(x)-\eta(x)\alpha(x)), & \text{当 } \rho\leqslant r\leqslant 2\rho,\\ \varepsilon_0G(x), & \text{当 } x\in M\backslash B_{2\rho}.\end{cases}$$

这里 $\varepsilon_0>0$，$\varepsilon_0\ll\rho$，并且以下关系成立

$$\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A)=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{4.5}$$

由于 (4.5)，$\varphi(x)$ 在 $|x|=\rho$ 处连续，因此 φ 是 M 上的 Lipschitz 函数，可作为试验函数。注意在 $B_{2\rho}$ 上 $R=0$，我们有

$$\int_{M\backslash B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu=\int_{M\backslash B_\rho}\varepsilon_0^2(|\nabla G|^2+aRG^2)d\mu$$
$$+\int_{B_{2\rho}\backslash B_\rho}\varepsilon_0^2(|\nabla(\eta\alpha)|^2-2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha))dx.$$

由于 $\alpha=O(r)$，$\nabla\alpha=O(1)$，有 $|\nabla(\eta\alpha)|\leqslant C$。故由 $|\nabla G|\leqslant cr^{1-n}$ 易见上式最后一项积分的绝对值 $\leqslant c\rho\varepsilon_0^2$。利用 G 在 $M\backslash\{P\}$ 上满足 $LG=-\Delta G+aRG=0$，由分部积分可得

$$\int_{M\backslash B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu$$
$$\leqslant-\varepsilon_0^2\int_{\partial B_\rho}G\frac{\partial G}{\partial r}ds+c\rho\varepsilon_0^2. \tag{4.6}$$

另一方面，与情形 (1) 类似，有

$$\int_{B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu=\int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2dx$$
$$=n(n-2)\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p dx+\int_{\partial B_\rho}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\,ds$$
$$\leqslant\lambda(S^n)\Big(\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p dx\Big)^{2/p}+\int_{\partial B_\rho}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}ds. \tag{4.7}$$

又有

$$\int_M\varphi^p d\mu\geqslant\int_{B_\rho}\varphi^p d\mu=\int_{B_\rho}u_\varepsilon^p dx.$$

因此，由 (4.6)，(4.7) 得

$$E(\varphi)\leqslant\lambda(S^n)\|\varphi\|_p^2+c\rho\varepsilon^2$$
$$+\int_{\partial B_\rho}\Big(u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}-\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}\Big)ds. \tag{4.8}$$

但在 $r=\rho$ 处有

$$\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}=-(n-2)\varepsilon_0^2(\rho^{3-2n}+A\rho^{1-n}+O(\rho^{2-n})).$$

利用 (4.5) 可得

$$u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}=-(n-2)\varepsilon_0^2(\rho^{3-2n}+2A\rho^{1-n}+O(\rho^{-1})).$$

因此 (4.8) 中最后一项积分 $\leqslant-(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2+c\rho\varepsilon_0^2$，即有

$$E(\varphi)\leqslant\lambda(S^n)\|\varphi\|_p^2-(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2+c\rho\varepsilon_0^2. \tag{4.9}$$

由于 (M,g) 不保角等价于 S^n，$A>0$（定理 3.6），又因为 ρ 充分小，(4.9) 说明 $Q(\varphi)<\lambda(S^n)$.

情形 (3). $n=3,4$ 或 5.

任取 $P\in M$ 及 P 处的保角正规坐标系 $\{x^i\}$. 由定理 3.5，$G=r^{2-n}+A+\alpha(x)$，其中 $\alpha=O(r)$，$\nabla\alpha=O(1)$. 我们仍取情形 (2) 中定义的 φ 作为试验函数. 但注意现在没有 M 局部保角平坦的假定，因此 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 不再成立. 在保角正规坐标系中有

$$g_{ij}=\delta_{ij}+O(r^2),\ \det g=1+O(r^N)\ \text{及}\ R=O(r^2). \tag{4.10}$$

我们需要在 (4.10) 的条件下对情形 (2) 中的估计加以修正. 首先

有

$$\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu=\int_{M\setminus B_\rho}\varepsilon_0^2(|\nabla G|^2$$

$$+aRG^2)d\mu+\varepsilon_0^2\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho}[|\nabla(\eta\alpha)|^2$$

$$-2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha)+aR(\eta^2\alpha^2-2\eta\alpha G)]d\mu$$

$$\leqslant\varepsilon_0^2\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla G|^2+aRG^2)d\mu+c\rho\varepsilon_0^2. \tag{4.11}$$

利用 $\Delta G+aRG=0$ 作分部积分可得

$$\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla G|^2+aRG^2)d\mu=-\int_{\partial B_\rho}G\sqrt{\det g}g^{ij}\partial_iGn_jds$$

$$=-\int_{\partial B_\rho}G\frac{\partial G_1}{\partial r}\sqrt{\det g}d\mu-\int_{\partial B_\rho}G\sqrt{\det g}g^{ij}\partial_i\alpha n_jds,$$

其中 $G_1=r^{2-n}+A$ 只依赖于 r，n_j 是 ∂B_ρ 的单位外法向量。于是，利用 (4.10) 即可由 (4.11) 推出

$$\int_{M\setminus B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu\leqslant-\varepsilon_0^2\int_{\partial B_\rho}G\frac{\partial G}{\partial r}ds+c\rho\varepsilon_0^2.$$

这个估计与 (4.6) 相同．其次，由于 u_ε 只依赖于 r，有

$$\int_{B_\rho}(|\nabla\varphi|^2+aR\varphi^2)d\mu=\int_{B_\rho}(|\nabla u_\varepsilon|^2+aRu_\varepsilon^2)\sqrt{\det g}dx$$

$$\leqslant\int_{B_\rho}|\nabla u_\varepsilon|^2dx+c\rho^{6-n}\varepsilon_0^2,$$

这里我们利用了 (4.10)。于是，由类似于情形 (2) 中的推理可得

$$E(\varphi)\leqslant\lambda(S^n)\|\varphi\|_p^2+c\rho\varepsilon_0^2+$$

$$\int_{\partial B_\rho}\left(u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}-\varepsilon_0^2G\frac{\partial G}{\partial r}\right)ds.$$

由此，与情形 (2) 的证明完全相同，我们得出 (4.9)．因而在 ε_0 充分小的时候有 $Q(\varphi)<\lambda(S^n)$.

综上所述，在任何情形我们都可找到 φ 使 $Q(\varphi)<\lambda(S^n)$。这说明 $\lambda(M)<\lambda(S^n)$。定理 4.1 证毕。

附录 Sobolev 不等式中的最佳常数

Sobolev 定理指出：对于 $n \geqslant 3$, $p = \frac{2n}{n-2}$, 存在只依赖于 n 的常数 Λ, 使得

$$\Lambda \left(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^p dx \right)^{2/p} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \qquad (A.1)$$

事实上，不等式 $(A.1)$ 对于更广的一类函数也成立，这类函数的空间是

$$X = \{u \in L^2_{1,loc}(\mathbf{R}^n);\ \|u\| \triangleq \|u\|_p + \|\nabla u\|_2 < \infty\}.$$

这里 $\|\cdot\|_q$ 表示 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 的范数. 不难验证，以 $\|\cdot\|$ 为范数的 X 是 Banach 空间，并且 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 X 中稠. 因此 $(A.1)$ 对于 $u \in X$ 成立。最佳常数 Λ 于是可定义为

$$\Lambda = \inf\{Q_0(u) \mid u \in X\backslash\{0\}\},$$

其中

$$Q_0(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_p^2}.$$

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的有界开集，我们将把 $\mathring{L}_1^2(\Omega)$ 当作 X 的子空间. 事实上，$\mathring{L}_1^2(\Omega)$ 中的任何函数 u 可以自然地扩张为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，只要在 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 上定义 $u = 0$。这样扩张后的 u 满足

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \text{因而 } u \in X.$$

定义

$$\Lambda(\Omega) = \inf\{Q_0(u) \mid u \in \mathring{L}_1^2(\Omega)\backslash\{0\}\}.$$

引理 A.1. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界开集，则 $\Lambda(\Omega) = \Lambda$.

证明：不难看出 $\Lambda(\Omega)$ 具有以下性质：如 Ω' 与 Ω 在 $\mathbf{R}^n$ 中只差一个平移，则 $\Lambda(\Omega') = \Lambda(\Omega)$; 如 $\Omega' \subset \Omega$, 因而 $\mathring{L}_1^2(\Omega') \subset \mathring{L}_1^2(\Omega)$, 则 $\Lambda(\Omega') \geqslant \Lambda(\Omega)$. 通过平移我们总可假定 $B_{r_1} \subset \Omega \subset B_{r_2}$, 其中 $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < r\}$, $0 < r_1 < r_2$. 因此，$\Lambda(B_{r_1}) \geqslant \Lambda(\Omega) \geqslant \Lambda(B_{r_2})$. 另一方面，可证 $\Lambda(B_r)$ 是不依赖于 $r > 0$ 的常数，记为 Λ_0, 因此 $\Lambda(\Omega) = \Lambda_0$. 事实上，设 $u \in \mathring{L}_1^2(B_r)$, 定义 $\tilde{u}(x) = u(rx)$,

则 $\tilde{u} \in \mathring{L}_1^2(B_1)$，并且容易验证 $Q_0(\tilde{u}) = Q_0(u)$. 由此可知 $\Lambda(B_r) = \Lambda(B_1) = \Lambda_0$. 我们只需证 $\Lambda_0 = \Lambda$. 为此注意 $\bigcup_{r>0} \mathring{L}_1^2(B_r)$ 在 X 中稠，因此存在 $u_i \in \mathring{L}_1^2(B_{r_i})$ 使 $Q_0(u_i) \to \Lambda$. 由 $Q_0(u_i) \geqslant \Lambda_0$ 可知 $\Lambda \geqslant \Lambda_0$. 但 $\Lambda_0 \geqslant \Lambda$ 是明显的，因此 $\Lambda = \Lambda_0$. 证毕.

引理 A.1 说明我们可以在 $\mathbf{R}^n$ 的任何有界开集 Ω 上计算 Λ. 我们取 $\Omega = B$，这里 $B = B_1$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的单位球. 类似于定理 2.1 的证明，对于 $s \in (2, p]$ 定义 $\mathring{L}_1^2(B)\backslash\{0\}$ 上的泛函

$$Q_s(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_s^2}.$$

又令

$$\Lambda_s = \inf\{Q_s(u) \mid u \in \mathring{L}_1^2(B)\backslash\{0\}\}.$$

如同引理 2.3，我们可以证明当 $s \to p$ 时 $\Lambda_s \to \Lambda$. 又和引理 2.4 完全相似，可以证明：当 $s < p$ 时存在 $u_s \in C^2(\bar{B})$，$u_s > 0$，$\|u_s\|_s = 1$，使得 $Q_s(u_s) = \Lambda_s$，且 u_s 满足

$$\begin{cases} \Delta u_s + \Lambda_s u_s^{s-1} = 0, & \text{在 } B \text{ 中}, \\ u_s \mid \partial B_s = 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

引理 A.2. 当 $s \to p$ 时，$\max\limits_B u_s \to +\infty$.

证明：设不然，则存在 $s_i \to p$ 及常数 $\bar{C}$ 使得 $0 \leqslant u_i \leqslant \bar{C}$. 由于 u_{s_i} 是 (A.2) 的解，利用椭圆方程的 L^p-估计和 Schauder-估计可得 $\|u_{s_i}\|C^{2,\alpha}(\bar{B}) \leqslant C$，其中常数 C 只依赖于 $\bar{C}$. 因此存在子列，仍记作 $\{u_{s_i}\}$，在 $C^2(\bar{B})$ 中收敛于 u. 易见 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0, & \text{在 } B \text{ 中}, \\ u \mid \partial B = 0, \end{cases}$$

且 $Q_0(u) = \Lambda$. 现扩充定义 u 在 B 外等于 0，则 u 可以作为 $\mathring{L}_1^2(B_2)$ 中的元素，并且由引理 A.1 知 u 达到 Q_0 在 $\mathring{L}_1^2(B_2)\backslash\{0\}$ 中的下确界. 因此 u 在 B_2 中满足方程 $\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0$，且因为 u 有界由椭圆正则性理论 $u \in C^2(\bar{B}_2)$. 但 u 在 $\bar{B}_2\backslash B_1$ 中等于 0，由极大值原理 u 必在 $\bar{B}_2$ 中恒等于 0. 这显然与 u 在 B_1 中不等于 0 矛盾. 证毕.

引理 A.3. u_s 是球面对称函数，即 $u_s = u_s(|x|)$. 并且 $u_s(r)$

在 $[0,1]$ 上单调下降。

引理 A.3 可以分别作为两个已知结果的推论。第一个结果属于 Gidas, Ni 和 Nirenberg (见 *Comm. Math. Phys.*, **68**(1979), 209—243), 他们证明:

定理. 设 $f\in C(\mathbf{R})$, $u\in C^2(\bar{B})$ 满足

$$\begin{cases}\Delta u+f(u)=0,\ u>0, & \text{在 } B \text{ 内},\\ u|\partial B=0,\end{cases}$$

则 $u=u(|x|)$, 且 $u(r)$ 在 $[0,1]$ 上递减。

这个定理是用极大值原理和移动平行平面的方法证明的。显然,引理 A.3 是此定理的直接推论。

第二个结果是关于函数的球面对称重排的,它有更为广泛的应用。设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的开子集, 令 Ω^* 表示 $\mathbf{R}^n$ 中以原点为中心的开球, Ω^* 与 Ω 有相同体积(在 Ω 的体积为无穷时 $\Omega^*=\mathbf{R}^n$). 对于 Ω 上的任何 C^1 函数 u, 定义 u 的球面对称重排为 Ω^* 上的一个函数 u^*, 满足 $\mathrm{Vol}\{x\in\Omega^*|u^*(x)>t\}=\mathrm{Vol}\{x\in\Omega|u(x)>t\}$, $\forall t\in\mathbf{R}$. 容易看出 u^* 被 u 所唯一决定, u^* 是球面对称函数,且 $u^*(r)$ 是 r 的递减函数。利用等周不等式及关于积分的余面积公式可以证明:

定理. (i) 对于 $p\geq 1$, $\int_{\Omega^*}|u^*|^p dx=\int_\Omega |u|^p dx$;

(ii) 对于 $q\geq 1$, $\int_{\Omega^*}|\nabla u^*|^q dx=\int_\Omega|\nabla u|^q dx$, 其中等号

仅当 $\Omega=\Omega^*$, $u=u^*$ (可以相差一个平移)时成立。

其证明请见 Talenti, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **110**(1976), 353—372, 又可看本书第三章 §1, Faber-Krahn 定理的证明。由这个结果可知 $u_s=u_s^*$, 因而引理 A.3 成立。事实上, 如 $u_s\neq u_s^*$, 则以上定理说明 $Q_s(u_s)>Q_s(u_s^*)$, 这与 u_s 达到 Q_s 的下确界矛盾。(注意,由 $u_s\geq 0$ 及 $u_s|\partial B=0$ 可知 $u_s^*\in\mathring{L}_1^2(B)$。)

由引理 A.2 和 A.3, $u_s(0)=\max\limits_B u_s\to+\infty$, 当 $s\to p$. 我们可以利用定理 2.1 证明中的技巧来获得方程

$$\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0,\ u > 0,\ \text{在 } \mathbf{R}^n \text{ 上}, \tag{A.3}$$

的解。具体作法为：令 $v_s(x) = m_s^{-1} u_s(m_s^{1-\frac{s}{2}} x)$，其中 $m_s = a_0^{-1} u_s(0)$，$a_0 > 0$ 为常数，则 u_s 满足

$$\begin{cases} \Delta v_s + \Lambda_s v_s^{s-1} = 0, & \text{在 } B_{r_s} \text{ 中}, \\ 0 < v_s \leqslant v_s(0) = a_0, \end{cases}$$

其中 $r_s = m_s^{\frac{s}{2}-1} \to \infty$ 当 $s \to p$。如定理 2.1 的证明一样，我们可以证明：存在 $\{v_s\}$ 的一个子序列 $\{v_{s_i}\}$，当 $i \to \infty$ 时 $s_i \to p$，而 v_{s_i} 在 $\mathbf{R}^n$ 的每个闭球 $\bar{B}_r$ 上 C^2 收敛于某个 $\bar{v} \in C^2(\mathbf{R}^n)$，满足 (A.3)，$\bar{v} \in X$ 以及

$$\int_{\mathbf{R}^n} \bar{v}^p dx \leqslant 1. \tag{A.4}$$

另一方面，由 (A.3) 可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla \bar{v}|^2 dx = \Lambda \int_{\mathbf{R}^n} \bar{v}^p dx. \tag{A.5}$$

因此由不等式 (A.1)，

$$\Lambda \|\bar{v}\|_p^2 \leqslant \|\nabla \bar{v}\|_2^2 = \Lambda \|\bar{v}\|_p^p,$$

即 $\|\bar{v}\|_p \geqslant 1$。结合 (A.4) 即有 $\|\bar{v}\|_p = 1$。由 (A.5) 可知，$Q_0(\bar{v}) = \Lambda$，即最佳常数 Λ 被 $\bar{v}$ 所达到。

现注意每个 v_s 是球面对称的，因此 $\bar{v}$ 也是。记 $\bar{v}(x) = \alpha\varphi(|x|)$，其中 $\alpha = \Lambda^{\frac{1}{p-2}}$，则 $\varphi(r)$ 是以下常微分方程的初值问题的解：

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{n-1}{r}\varphi' + \varphi^{p-1} = 0, & r \geqslant 0, \\ \varphi(0) = a_1,\ \varphi'(0) = 0, \end{cases} \tag{A.6}$$

其中 $a_1 = \alpha^{-1} a_0$。这个初值问题的解是唯一的，这是因为 (A.6) 等价于积分方程

$$\varphi(r) = a_1 + \int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \varphi^{p-1}(s) ds dt,$$

利用压缩映象原理可证这积分方程在 $[0, \varepsilon]$ 上解的唯一性。又注意当 $r > 0$ 时 (A.6) 是正则的常微分方程，所以其解在 $[0, \infty)$ 上唯一。取 $\varphi = (a + br^2)^k$ 的形式代入 (A.6)，经计算得出

$$\varphi(r)=\left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2+r^2}\right)^{(n-2)/2}, \quad a>0,$$

最后，由于 $Q_0(u)=Q_0(\lambda u)$, $\forall\lambda>0$, $u\in X$，最佳常数 Λ 被所有形如 $\varphi(x)=(a+b|x|^2)^{(2-n)/2}$ 的函数所达到，直接计算可得 $\Lambda=n(n-1)\omega_n^{2/n}$. 这样我们就证明了：

定理 A.4. Sobolev 不等式 (A.1) 中的最佳常数 $\Lambda=n(n-1)\omega_n^{2/n}$. 这个常数被函数 $\varphi(x)=(a+b|x|^2)^{(2-n)/2}$ 所达到，其中 a, b 为任意正常数.

以上证明加以必要的修饰可用来获得 Sobolev 不等式 $c\|u\|_p\leqslant\|\nabla u\|_q$, $u\in C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$，中的最佳常数及达到此常数的极值函数，这里 $q<n$, $p=\dfrac{nq}{n-q}$. 我们的证明与原有的证明 (如 Talenti[31] 的证明)不同.

第六章 局部保角平坦流形

局部保角平坦结构是 Riemann 曲面上的保角结构到高维 Riemann 流形上的一种自然推广．这类流形的大范围性质的研究是从 Kuiper 开始的．他研究了紧保角平坦流形的基本群．

本章的中心任务是寻求一大类局部保角平坦流形 M，使其嵌入球面 S^n．类似于 Riemann 曲面，有高维 Klein 群 Γ，同构于这流形的基本群 $\pi_1(M)$，并使 $M\cong \Omega/\Gamma$，其中 Ω 是这 Klein 群的不连续区域．

本章 §1 介绍保角变换的基本性质，以及保角变换群、保角平坦流形等基本概念． §2 引进保角不变量，特别是研究保角平坦流形上的极小正 Green 函数及其在 ∞ 处的可积幂次 $p(M)$（及 $d(M)$）． §3 研究保角平坦流形到 S^n 的浸没．特别对具非负数量曲率的保角平坦流形，应用正能量定理建立这种浸没． §4 研究保角平坦流形的拓扑：基本群、高阶同伦群以及 Betti 数，最后在 §5 我们再把这种局部保角平坦流形的讨论与 S^n 上区域 Ω 上的 Yamabe 方程的弱解联系起来．

§1. 保角变换与保角平坦流形

本节引入本章中的基本定义以及必要的准备知识．

设(M_1,g_1)，(M_2,g_2)是两个连通的 Riemann 流形，其中 g_1，g_2 分别表示其上的 Riemann 度量．映射 Φ：$M_1\to M_2$ 称为是保角的（conformal），是指存在 M_1 上的正值函数 f，使得 $\Phi^*(g_2)=f\cdot g_1$．

由此可见，在几何上，所谓 Φ 是保角的，是指：$\forall x_0\in M_1$，$\forall s$，$t\in T_{x_0}(M_1)$，我们有

$$\cos\theta = \frac{g_1(s,t)}{g_1(s,s)^{\frac{1}{2}} g_1(t,t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_2(\Phi_* s, \Phi_* t)}{g_2(\Phi_* s, \Phi_* s)^{\frac{1}{2}} g_2(\Phi_* t, \Phi_* t)^{\frac{1}{2}}}.$$

通常，我们把 f 写成 $e^{2\rho}$ 的形式，其中 ρ 是 M 上的一个(光滑)函数。

从微分几何角度看，首先关心的是保角变换给曲率带来的变化。为此，在 M_1 上选取一个局部标架场 $\omega_1, \cdots, \omega_n$，$n = \dim M_1 = \dim M_2$。写出结构方程

$$d\omega_i = -\sum \omega_{ij} \wedge \omega_j, \omega_{ij} = -\omega_{ji}, \tag{1.1}$$

$$d\omega_{ij} = -\sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \tag{1.2}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,$$

$1 \leqslant i, j \leqslant n$，其中 R_{ijkl} 是曲率张量。

设 $\omega_i^* = e^\rho \omega_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。此后，若 ϕ 是(M_1, g_1)上的一个几何量，则用 ϕ^* 表示 M_1 上以 $e^{2\rho} g_1$ 为度量的对应的几何量。因此，

$$\begin{aligned} d\omega_i^* &= -e^\rho \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j + e^\rho \sum \rho_j \omega_j \wedge \omega_i \\ &= -\sum \omega_{ij}^* \wedge \omega_j^*, \end{aligned}$$

其中

$$\omega_{ij}^* = \omega_{ij} + \rho_j \omega_i - \rho_i \omega_j. \tag{1.3}$$

进而，利用(1.1)，(1.2)与(1.3)并直接计算 $d\omega_{ij}^* + \sum \omega_{ik}^* \wedge \omega_{kj}^*$，容易得到

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^* = \Omega_{ij} &- \sum (\rho_{jk} - \rho_k \rho_j) \omega_i \wedge \omega_k \\ &- \sum (\rho_{ik} - \rho_k \rho_i) \omega_k \wedge \omega_j - \sum \rho_k^2 \omega_i \wedge \omega_j, \end{aligned} \tag{1.4}$$

在此，(ρ_{ik})是 ρ 的 Hessian，定义为

$$\sum \rho_{jk} \omega_k = d\rho_j - \sum \rho_k \omega_{kj}. \tag{1.5}$$

利用(1.4)给出，当 $i \neq j$ 时，

$$e^{2\rho} R_{ijij}^* = R_{ijij} + \rho_i^2 + \rho_j^2 - \rho_{ii} - \rho_{jj} - \sum \rho_k^2. \tag{1.6}$$

又当 $n \geqslant 3$，且 $i \neq j$ 时，Ricci 曲率之间有关系如下：

$$e^{2\rho} R_{ij}^* = R_{ij} - (n-2)\rho_{ij} + (n-2)\rho_i \rho_j. \tag{1.7}$$

由此进一步得到数量曲率间的关系

$$e^{2\rho} R^* = R - 2(n-1)\Delta\rho - (n-1)(n-2)\sum \rho_k^2, \tag{1.8}$$

其中Δ是度量 g_1 下的 Laplace 算子 Δ_{g_1}:

$$\Delta_{g_1}\rho = \sum_i \rho_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j} \partial_i (g^{ij}\sqrt{\det g}\, \partial_j\rho).$$

保角变换的例子很多，当 $M = \hat{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$时，平移、转动、相似以及反演变换都是保角变换. 当 $n = 2$ 时，全纯映射也导出保角变换. 重要的是有下面的

定理 1.1 (Liouville). 设 $n \geqslant 3$，则$(\hat{\mathbf{R}}^n, dx^2)$上一切保角变换都是由平移、转动、相似以及反演变换生成的.

证明: 1° 注意到$(\hat{\mathbf{R}}^n, dx^2)$上的度量 dx^2 是平坦的，经保角变换后，也得到平坦的度量. 设变换带来的度量因子是 $e^{2\rho}$，因 $n \geqslant 3$，按公式(1.6)与(1.7)应有

$$\rho_{ii} + \rho_{jj} = - \sum_{k \neq i,j} \rho_k^2, \qquad i \neq j, \tag{1.9}$$

$$\rho_{ij} = \rho_i\rho_j, \qquad i \neq j. \tag{1.10}$$

作函数变换: $u = e^{-\rho}$，化为

$$u(u_{ii} + u_{jj}) = \sum_k u_k^2, \qquad i \neq j, \tag{1.9)'$$

$$uu_{ij} = 0, \qquad i \neq j. \tag{1.10)'$$

因为 $u > 0$，所以(1.10)′蕴含了 $u_{ij} = 0$，当 $i \neq j$. 这表明 $u_i(x)$是只依赖于自变量 x_i 的函数: $u_i(x) = h_i(x_i)$，其中 h_i: $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$.

设 $l \neq i, j$，对(1.9)′两边作 x_l 的微分，再利用(1.10)′得到

$$u_l(u_{ii} + u_{jj} - 2u_{ll}) = 0. \tag{1.11}$$

再作 x_l 的微分，还利用(1.10)′，又得到

$$u_l u_{iil} = 0, \qquad 当\ i \neq l. \tag{1.12}$$

2° 我们说，以下两种情形之一必发生:

(1) $h_l \equiv 0, 1 \leqslant l \leqslant n$;

(2) h_l 都是斜率相同的线性函数，$1 \leqslant l \leqslant n$.

事实上，若有，例如说，$h_1(t_0) \neq 0$，对某个 $t_0 \in \mathbf{R}^1$，则由(1.12)可见 $h_i(t)$必是线性函数，$i \neq 1$; 即 $h_i(t) = a_i t + b_i$，$2 \leqslant i \leqslant n$. 再取 $l = 2$，$i = 1$，并应用(1.12)及(1.9)′即得

$$h_i(t) = a_i t + b_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

最后利用(1.11)立得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n, \text{ 记作 } a.$$

3° 对于情况(1)，可得 $u = \text{const}$. 这时 $\Phi: \hat{\mathbf{R}}^n \to \hat{\mathbf{R}}^n$ 满足：$\Phi^*(dx^2) = \text{const}\, dx^2$. 因其在差一常因子下是等距变换，故为线性变换，从而必由平移、转动、相似复合而成(因保角)。

对于情况(2)，解得

$$u(x) = \frac{a}{2}|x|^2 + \sum b_i x_i + c.$$

利用(1.9)′式得

$$c = \frac{1}{2a}\sum b_i^2.$$

因此，

$$u(x) = \frac{1}{2a}\sum (a x_i + b_i)^2,$$

还有

$$\Phi^*(dx^2) = \frac{4}{a^2} dy^2,$$

其中 $y = \frac{z}{|z|^2}$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 而 $z_i = x_i + \frac{b_i}{a_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 定理证毕.

由于 $\hat{\mathbf{R}}^n$ 与 S^n 保角同胚(通过球极投影)，所以我们可以刻划出 S^n 到自身的一切保角变换.

以下记 $\text{Conf}(S^n)$ 为 S^n 到自身的保角变换群.

我们来考察 $\text{Conf}(S^n)$ 的线性表示.

用 $\text{GM}(\hat{\mathbf{R}}^n)$ 表示 $\hat{\mathbf{R}}^n$ 到自身的，由平移、转动、相似与反演组成的变换的全体组成的群，称之为广义 Möbius 群. $\text{GM}(\hat{\mathbf{R}}^n)$ 中任一变换，称为 Möbius 变换. 按定理，可见球极投影建立了 $\text{Conf}(S^n)$ 与 $\text{GM}(\hat{\mathbf{R}}^n)$ 的同构.

首先把 S^n 嵌入 $\mathbf{R}^{n+1}$, 记 B^{n+1} 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中以原点为中心的单位球，$\partial B^{n+1} = S^n$. 我们来考察 $\text{GM}(\hat{\mathbf{R}}^{n+1})$ 的一个子群 $\text{GM}(B^{n+1})$,

它把 B^{n+1} 映入自身.

引理 1.2. $\mathrm{GM}(\hat{\mathrm{R}}^n)\cong \mathrm{GM}(B^{n+1})$.

证明: 1° $\forall \phi\in \mathrm{GM}(\hat{\mathrm{R}}^n)$, $\exists ! \tilde{\phi}\in \mathrm{GM}(\hat{\mathrm{R}}^{n+1})$ 使得

$$\tilde{\phi}(x,0)=(\phi(x),0),\ \forall x\in \hat{\mathrm{R}}^n, \tag{1.13}$$

并保持上半空间

$$H^{n+1}=\{\hat{x}=(x,x_{n+1})\in \hat{\mathrm{R}}^n\times \mathrm{R}^1 \mid x_{n+1}>0\} \tag{1.14}$$

不变.

$\tilde{\phi}$ 可以通过(1.13)(1.14), 按 ϕ 为平移、转动、相似、与反演的情形定义其扩张. 对平移、转动、相似, 这只需让 $\tilde{\phi}$ 在 x_{n+1} 方向保持不变, 而当 ϕ 为反演时, 定义 $\tilde{\phi}$ 为以同一个球心, 同一个半径, 但在 $\hat{\mathrm{R}}^{n+1}$ 中的反演.

兹证保持(1.13)与(1.14)的扩张是唯一的. 设 $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ 是同一个 ϕ 的扩张, 则 $\tilde{\phi}=\tilde{\phi}_1^{-1}\tilde{\phi}_2$ 满足: $\tilde{\phi}|_{\hat{\mathrm{R}}^n}=\mathrm{id}_{\hat{\mathrm{R}}^n}$, 并且是保角的. 要证: $\tilde{\phi}=\mathrm{id}_{\hat{\mathrm{R}}^{n+1}}$.

$\forall a\in \mathrm{R}^n$, $\forall r>0$, $\tilde{\phi}$ 变球面 $S_r(a)=\partial B_r^{n+1}(a)$ 为球面, 然而限制在 $\hat{\mathrm{R}}^n$ 上, $S_r(a)$ 与 $\tilde{\phi}(S_r(a))$ 相同, 故 $S_r(a)=\tilde{\phi}(S_r(a))$. 今 $\forall \hat{x}\in \hat{\mathrm{R}}^{n+1}$, $x_{n+1}\neq 0$. 设 $\hat{y}=\tilde{\phi}(\hat{x})$, 则由 $\tilde{\phi}$ 变球面 $S_r(a)$ 到自身, 取 $r=|\hat{x}-a|$, 即得

$$|\hat{x}|^2-2(\hat{x},a)+|a|^2=|\hat{y}|^2-2(\hat{y},a)+|a|^2.$$

由于 $a\in \mathrm{R}^n$ 是任意的, 所以 $|\hat{x}|=|\hat{y}|$, 且 $(\hat{x},a)=(\hat{y},a)$, $\forall a\in \mathrm{R}^n$; 从而 $x_i=y_i$, $i=1,\cdots,n$, 以及 $x_{n+1}=\pm y_{n+1}$. 又因为 $\tilde{\phi}$ 保持 H^{n+1} 不变, 所以 $x_{n+1}=y_{n+1}$. 这证明了 $\tilde{\phi}=\mathrm{id}$, 即 $\tilde{\phi}_1=\tilde{\phi}_2$.

2° 再用反演变换 ϕ_0: $\hat{\mathrm{R}}^{n+1}\to \hat{\mathrm{R}}^{n+1}$, 以 $e_{n+1}=(0,\cdots,0,1)$ 为中心, $\sqrt{2}$ 为半径.

$$\phi_0(\hat{x})=\left(\frac{2x}{|x|^2+(x_{n+1}-1)^2},\ 1+\frac{2(x_{n+1}-1)}{|x|^2+(x_{n+1}-1)^2}\right)$$

连同关于 $\hat{\mathrm{R}}^n$ 的反演变换 σ: $\hat{x}=(x,x_{n+1})\longmapsto (x,-x_{n+1})$.

作复合变换 $\psi=\phi_0\circ\sigma$, 则 ψ: $H^{n+1}\to B^{n+1}$, 并映 $\hat{\mathrm{R}}^n$ 到 S^n 上, 而且 $\psi|_{\hat{\mathrm{R}}^n}$ 正是球极投影.

引理 1.3. 若在 B^{n+1} 上用 Poincaré 度量

$$ds^2 = \frac{4dx^2}{(1-|x|^2)^2}, \tag{1.15}$$

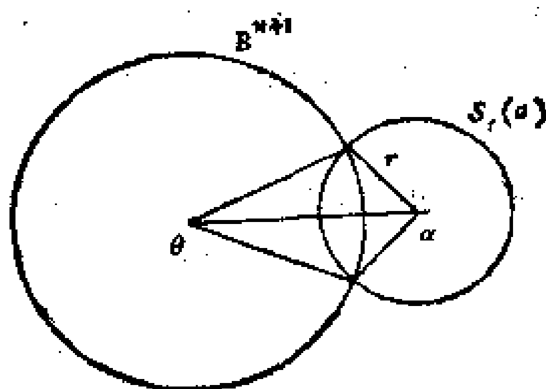
则 $\mathrm{GM}(B^{n+1}) \cong (B^{n+1}, ds^2)$的等距变换群.

证明: 将证: 为了 $\rho \in \mathrm{GM}(B^{n+1})$ 必须且仅须

$$\rho = A \cdot \sigma,$$

其中 $A \in O(n+1)$, σ 是关于某个与 S^n 正交的球面 $S_r(a)$, $a \in \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$, $0 < r \leqslant \infty$, 的反演:

$$\begin{cases} \sigma(x) = a + \dfrac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}, \text{当 } a \neq \infty, \\ \text{关于过原点垂直于 } a \text{ 的超平面的反演,当 } a = \infty, \end{cases} \tag{1.16}$$



其中 $r^2 = |a|^2 - 1$.

事实上, 若 $\rho = A \cdot \sigma$,则显然 $\rho \in \mathrm{GM}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$. 但 $A: B^{n+1} \to B^{n+1}$, 又因

$$1 - |\sigma(x)|^2 = (1 - |x|^2) \cdot \frac{(|a|^2 - 1)}{|x-a|^2}, \tag{1.17}$$

可见 σ: $B^{n+1} \to B^{n+1}$; 故 $\rho \in \mathrm{GM}(B^{n+1})$.

反之,若 $\rho \in \mathrm{GM}(B^{n+1})$,取 $a = \rho^{-1}(\infty)$,作反演 σ. 由(1.17), σ: $B^{n+1} \to B^{n+1}$. 若记 $a^* = \rho^{-1}(\theta)$,则因 $\sigma(a) = \infty$, 故 $\sigma(\theta) = a^*$, 于是

$$\rho \circ \sigma(\theta) = \rho(a^*) = \theta.$$

这表明 $\rho \circ \sigma \in \mathrm{GM}(B^{n+1})$,且保持原点不变,所以 $A \triangleq \rho \circ \sigma \in O(n+1)$. 我们得到分解 $\rho = A \circ \sigma$.

A显然是(B^{n+1}, ds^2)上的等距变换。又利用(1.16)易见

$$|\sigma'(\hat{x})|^2 = \left(\frac{r^2}{|\hat{x}-a|^2}\right)^2 = \left(\frac{1-|\sigma(\hat{x})|^2}{1-|\hat{x}|^2}\right)^2,$$

所以σ也是(B^{n+1},ds^2)上的等距映射，即得ρ是(B^{n+1}, ds^2)上的等距映射。

反之，(B^{n+1}, ds^2)上的等距映射显然一定是$\mathrm{MG}(B^{n+1})$中的元素。

定理 1.4. $\mathrm{GM}(\hat{\mathbf{R}}^n) \cong \mathrm{SO}(1, n+1)$.

证明：只须证 $\mathrm{GM}(B^{n+1}) \cong \mathrm{SO}(1, n+1)$。由引理 1.3，$\mathrm{GM}(B^{n+1})$是$(B^{n+1}, ds^2)$上的等距变换群。今令

$$Q = \{(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{n+1} | x_0^2 - |\hat{x}|^2 = 1, x_0 > 0\},$$

其中 $\hat{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1})$，并在$Q$上引入欧氏度量

$$ds_1^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2 - dx_0^2$$

作映射

$$F: (x_0, \hat{x}) \longmapsto \frac{\hat{x}}{1+x_0}, \quad Q \to B^{n+1},$$

不难验证F是同构。此外，记 $\hat{y} = \dfrac{\hat{x}}{1+x_0}$，则

$$dy_i = \frac{dx_i}{1+x_0} - \frac{x_i dx_0}{(1+x_0)^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

得

$$\frac{4|d\hat{y}|^2}{(1-|\hat{y}|^2)^2} = ds_1^2.$$

所以F还是等距映射。

然而，(Q, ds_1^2)上的等距映射恰是$\mathrm{SO}(1, n+1)$。

通过以上讨论，可见下图交换：

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\phi} & S^n \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ B^{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & B^{n+1} \\ \downarrow F^{-1} & & \downarrow F^{-1} \\ Q & \xrightarrow{A} & Q \end{array}$$

$\phi \in \mathrm{Conf}(S^n)$,

$\tilde{\phi} \in \mathrm{MG}(B^{n+1})$, $\tilde{\phi}|_{S^n} = \phi$,

$A \in \mathrm{SO}(1, n+1)$.

若对 B^{n+1} 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})$，在射影空间中用齐次坐标表示 $\tilde{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_{n+1})$，其中 $x_i=\dfrac{y_i}{y_0}$，$i=1,\cdots,n+1$. 按映射 F 的表示可见，这时 S^n 上的点相当于 $\tilde{y}=(0,y_1,\cdots,y_{n+1})$，$|\tilde{y}|=1$. 定理 1.4 表明 $\forall\phi\in\mathrm{Conf}(S^n)$，存在 $A\in\mathrm{SO}(1,n+1)$ 使得当

$$A=\begin{pmatrix}\gamma & \alpha^T\\ \beta & A_1\end{pmatrix},\quad A_1\in\mathrm{GL}(n+1,\mathrm{R}),\ \alpha,\ \beta\in\mathrm{R}^{n+1},$$

时，$\phi(\tilde{y})=\dfrac{A_1\hat{y}}{\alpha^T\hat{y}}$，其中 $\hat{y}=(y_1,\ \cdots,\ y_{n+1})$.

以下我们对 $\mathrm{Conf}(S^n)$ 中的变换进行分类.

定义 1.5. 设 $\phi\in\mathrm{Conf}(S^n)$，若 $\tilde{\phi}$ 在 $\mathring{B}^{n+1}$ 中有不动点，则称 ϕ 是椭圆型的；若 $\tilde{\phi}$ 在 $\mathring{B}^{n+1}$ 中没有不动点，但在 S^n 上恰有一个不动点，则称 ϕ 是抛物型的；若 ϕ 在 $\mathring{B}^{n+1}$ 中没有不动点，但在 S^n 上恰有两个不动点，则称 ϕ 是双曲型的.

显然，由定理 1.4，$\mathrm{Conf}(S^n)$ 中的变换必属以上三种类型变换之一，而且在 $\mathrm{Conf}(S^n)$ 的共轭之下，类型是不变的.

简单地讨论一下这三种类型变换是有益的.

I 椭圆型. 设 ϕ 是椭圆型变换，则必存在 $\sigma\in\mathrm{Conf}(S^n)$，使 $\tilde{\sigma}\circ\tilde{\phi}\circ\tilde{\sigma}^{-1}$ 以原点为不动点. 在把 S^n 看成射影空间的 ∞ 点时，便有 $O\in O(n+1)$ 使得

$$\tilde{\sigma}\circ\tilde{\phi}\circ\tilde{\sigma}^{-1}x=Ox.$$

II 抛物型. 设 ϕ 是抛物型变换. 设 $p_0\in S^n$ 是它的唯一不动点，不妨设其为 S^n 之北极点，作球极投影，使 $S^n\backslash\{p_0\}\cong\mathrm{R}^n$. ϕ 在这 R^n 上可以表示为 $y=\phi x=\lambda Ax+b$ 的形式，其中 $\lambda>0$，$A\in O(n)$，而 $b\in\mathrm{R}^n$. 因为 ϕ 在 R^n 上已没有不动点，所以 $\lambda=1$，且 A 有本征值 1.

III 双曲型. 设 ϕ 是双曲型变换，它在 S^n 上有两个不动点. 取出一个作北极点，作球极投影，则 ϕ 在这 R^n 上表示为 $y=\lambda Ax+b$，其中 $A\in O(n)$，$\lambda\neq1$，或 $\lambda=1$，但 1 不是 A 的本征值.

定义 1.6. 设 M 是一个 n 维流形，如果它有一个坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$，$\phi_\alpha: U_\alpha\to S^n$，使得当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，坐标变换映射 $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是一个保角的微分同胚。这时，我们称 M 是一个局部保角平坦的流形（locally conformal flat），$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ 称为局部保角平坦结构。

当 $n=2$ 时，局部保角平坦流形就是 Riemann 曲面。而当 $n\geqslant 3$ 时，由 Lionuille 定理，若 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ 是一个局部保角平坦结构，则 $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$ 在 $\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 的连通分量上是一个 Möbius 变换的限制.

定义 1.7. 设 (M, g) 是一个 Riemann 流形，又设 M 还是局部保角平坦的，我们说度量 g 与其局部保角平坦结构 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ 是相容的，如果 $\forall\alpha\in\Lambda$，ϕ_α: $(U_\alpha, g)\to(S^n, g_0)$ 是一个保角映射，其中 g_0 是 S^n 上的标准度量。这时，又称 (M, g) 是一个局部保角平坦的 Riemann 流形.

按定义，为了 g 与局部保角平坦结构相容，必须且仅须 $\forall\alpha\in\Lambda$，$\exists U_\alpha$ 上的正函数 λ_α 使得

$$g(x)=\lambda_\alpha(x)\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2,\ 当\ x\in U_\alpha,$$

其中 ϕ_α 有坐标 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$.

命题 1.8. 设 M 是一个仿紧的局部保角平坦流形，则 M 上必有一个与其局部保角平坦结构相容的 Riemann 度量 g.

证明：按局部保角平坦法构决定的覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 作其局部有限加细覆盖，不妨仍记其为 $\{U_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，得一单位分解：$\{\eta_\alpha\in C^\infty(M)|\text{supp}\eta_\alpha\subset U_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$ 满足：$\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}\eta_\alpha=1$. 令

$$g=\sum\eta_\alpha\phi_\alpha^*(g_0).$$

其中 g_0 是 S^n 上的标准度量，而 ϕ_α 是 U_α 上的坐标映射. 这个度量 g 就是与保角平坦结构相容的一个 Riemann 度量.

为了用曲率张量来描写 Riemann 流形的局部保角平坦性质，引入 Weyl 张量：

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\{R_{ik}\delta_{jl} - R_{jk}\delta_{il} + R_{jl}\delta_{ik} - R_{il}\delta_{jk}\}$$
$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}),$$

当 $\dim M \geqslant 4$ 时,以及 Bek 张量:

$$C_{ijk} = \frac{1}{n-2}(R_{ijk} - R_{ikj})$$
$$- \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\delta_{ij}R_k - \delta_{ik}R_j),$$

当 $\dim M = 3$ 时, 其中

$$\sum R_{ijk}\omega_k = dR_{ij} - R_{kj}\omega_{ki} - R_{ik}\omega_{kj}$$

是 Ricci 曲率张量的协变微商. 按公式(1.6)可以算出:

$$e^{2\rho}C^*_{ijkl} = C_{ijkl}, \text{ 当 } n \geqslant 4,$$
$$e^{3\rho}C^*_{ijk} = C_{ijk}, \text{ 当 } n = 3.$$

因此,如果(M,g)是局部保角平坦的,那么其 Weyl ($\dim M \geqslant 4$), Bek($\dim M = 3$)张量必为零;而且反过来的结论也对.

关于局部保角平坦流形, 有下列简单的例:

(1) $(\mathbf{R}^n, dx^2)$,

(2) (S^n, g_0), g_0 是标准度量.

又设将 S^n 嵌入 $\mathbf{R}^{n+1}$, 写成 $\left\{(x_0,\cdots,x_n)\,\middle|\,\sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\right\}$, 给定 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上一个 C^2 函数 $f(x_0,\cdots,x_n)$令 $M = \{x\in S^n | f(x) > 0\}$, $\partial M = \{x\in S^n | f(x) = 0\}$, 以及 $g = f^{-1}\sum_{i=0}^n dx_i^2$, 则$(M,g)$是一个局部保角平坦流形.

(3) (T^n, dx^2), 其中 T^n 是 n 维环面.

(4) $\left(H_+^{n+1}, \frac{dx^2}{x_{n+1}^2}\right)$, 这是上半平面 Poincaré 模型.

为了获得更多局部保角平坦流形的例子, 我们注意到

(1) 两个局部保角平坦流形的乘积流形是局部保角平坦的.

(2) 若(M_1,g_1), (M_2, g_2)是两个同维数 n 的局部保角平坦的

流形，则其连结和(connected sum) $M_1 \# M_2$，也必是局部保角平坦的。

这是因为按定义，M_1 上有一 n 圆领(collar)，取适当坐标系，设为 $B_1 \backslash B_{1/3}$，M_2 上有一圆领，设为 $B_1^{\wedge} \backslash B_{1/3}^{\wedge}$。以下等同 $B_{2/3} \backslash B_{1/3}$ 与 $B_{2/3}^{\wedge} \backslash B_{1/3}^{\wedge}$。使得 $\partial B_{2/3}$ 与 $\partial B_{1/3}^{\wedge}$，$\partial B_{2/3}^{\wedge}$ 与 $\partial B_{1/3}$ 按对应点等同。注意到两个同心球面包含的区域 $B_{2/3} \backslash B_{1/3}$ 上存在反演变换，变 $\partial B_{1/3}$ 到 $\partial B_{2/3}$，而反演变换是保角的。于是，$M_1 \backslash B_{1/3}$ 与 $M_2 \backslash B_{1/3}^{\wedge}$ 上的局部保角平坦结构是相容的。

(3) 设 $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(S^n)$ 是 S^n 上的自由作用的有限子群，则 S^n/Γ 是局部保角平坦流形。

(4) 设 M^n 是一个光滑、连通流形，又设 Φ: $M^n \to S^n$ 是一个局部浸没(immersion)，即 $\Phi'_{(p)}$: $T_pM^n \to T_{\Phi(p)}S^n$，$\forall p \in M$，是一个线性同构；则 Φ 可以诱导出 M 上的一个局部保角平坦结构。

事实上，$\forall p \in M$，有 p 的一个邻域 U_p，使得 Φ: $U_p \to \Phi(U_p)$ 是微分同胚。如果我们取 $\{(U_p, \Phi) | p \in M\}$ 为坐标覆盖，那么相应的 S^n 区域到 S^n 区域的坐标变换就是恒同变换。于是这是一个局部保角平坦结构，这时，若记 g_0 为 S^n 上的标准度量，则 $\Phi^* g_0$ 便是 M 上与这局部保角平坦结构相容的度量。

现在我们问一个反过来的问题：给定一个局部保角平坦流形 M^n，是否存在一个局部浸没 Φ: $M^n \to S^n$，使其局部保角平坦结构是由 Φ 诱导出来的？

定理 1.9. 设 $\dim M \geqslant 3$，且 M 是单连通的局部保角平坦流形，则必存在局部浸没 Φ: $M \to S^n$，$n = \dim M$，使得 M 上的局部保角平坦结构是由 Φ 诱导出来的。

证明：设 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in A\}$ 是 M 上的局部保角平坦结构，$\forall p_0 \in M$，设 U_0 为使 $p_0 \in U_0$ 的一个覆盖邻域。在 U_0 上取 $\Phi = \phi_0$，显然 $\Phi|_{U_0}$ 是一个局部浸没。

为延拓 Φ 到整个 M 上，我们仿照解析延拓的 Monodromy 定理的办法分三步进行。

1°对任意一条以 p_0 为出发点的弧 γ，沿 γ 延拓 Φ。为此，设 γ

的另一端点是 p_1，并设 Φ 已在 $\gamma\backslash\{p_1\}$ 上定义好了，现在要把 Φ 延拓到 p_1（的一个邻域）上去。设(U_1, ϕ_1)是 p_1 的覆盖邻域及相应坐标函数。按 Lionville 定理，在 $\mathrm{dom}(\Phi)\cap U_1$ 上 $\exists\phi\in\mathrm{Conf}(S^n)$，使得 $\phi=\Phi\circ\phi_1^{-1}$，其中 $\mathrm{dom}(\Phi)$ 是 Φ 的定义域。于是定义

$$\Phi=\phi\circ\phi_1,\ \text{于}\ U_1,$$

于是我们把 Φ 沿 γ 延拓到 p_0 的一个邻域。

2°证明：按上述方式沿同一条弧 γ 的延拓，所得的 Φ 总是一样的。即，若 γ: $[0,1]\to M$，分别沿 $V_1,\cdots,V_l$ 与 $W_1,\cdots,W_m$ 延拓到 p_1，其中 $V_i\cap V_{i+1}\neq\varnothing$，$W_j\cap W_{j+1}\neq\varnothing$，而 V_i，W_j 都是 M 上的局部保角平坦结构的覆盖邻域。$i=1,\cdots,l-1$，$j=1,\cdots,m-1$，$V_1=W_1=U_0$，$V_l=W_m=U_1$。记相应的延拓为 (Φ_i, V_i)，(Φ_j, W_j)，$i=1,\cdots,l$，$j=1,\cdots,m$。

今后我们把(Φ,V)，(Ψ,W)称为相容的，如果 $V\cap W\neq\varnothing$ 蕴含了 $\Phi=\Psi$ 于 $V\cap W$。

我们要证：(Φ_l,V_l)与(Ψ_m, W_m)是相容的。

为此，分划 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=1$，$0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1$ 使得 $\gamma[t_{i-1},t_i]\subset V_i$，$\gamma[s_{j-1}, s_j]\subset W_j$，$i=1,\cdots,l$，$j=1,\cdots,m$。我们将证：若有 $[t_{i-1}, t_i]\cap[s_{j-1}, s_j]=\varnothing$，则必$(\Phi_i, V_i)$与$(\Psi_j, W_j)$相容。这个结论显然蕴含我们所要的结论。

反证。倘若不然，必有 i，j 使得(Φ_i, V_i)与(Ψ_j, W_j)不相容，但 $V_i\cap W_j\neq\varnothing$。令 $k=i+j$。今取其中一对 i_0，j_0 使 $k_0=i_0+j_0$ 是这些不相容对(Φ_i,V_i)，(Ψ_j,W_j)，$V_i\cap W_j\neq\varnothing$ 中的最小者。显然，$k_0>2$。不妨设 $s_{j_0-1}\leqslant t_{i_0-1}$，则 $\gamma(t_{i_0-1})\in V_{i_0-1}\cap V_{i_0}\cap W_{j_0}$。由定义$(\Phi_{i_0-1},V_{i_0-1})$与$(\Phi_{i_0},V_{i_0})$是相容的。又由 i_0+j_0 的极小性，$(\Phi_{i_0-1}, V_{i_0-1})$与$(\Psi_{j_0}, W_{j_0})$也必是相容的。从而$(\Phi_{i_0}, V_{i_0})$与$(\Psi_{j_0},W_{j_0})$相容，这导出矛盾。

3°最后证明：不论沿那一条弧 γ 延拓 Φ 由 p_0 至 p_1，所得结果是一样的。设 γ_1，γ_2: $[0,1]\to M$，满足 $\gamma_i(0)=p_0$，$\gamma_i(1)=p_1$，$i=1,2$。设(Φ,V)与(Ψ,W)分别是沿 γ_1，γ_2 延拓到 p_1 的映射对 $\Phi: V\to S^n$，Ψ: $W\to S^n$，$p_1\in V\cap W\subset M$。要证(Φ, V)与$(\Psi,$

W)相容.

由设M是单连通的，故有 $F:[0,1]\times[0,1]\to M$ 使得 $F(0,t)=\gamma_1(t), F(1,t)=\gamma_2(t), t\in[0,1]$; $F(s,0)=p_0$, $F(s,1)=p_1$, $s\in[0,1]$. 记 $\gamma_s=F(s,\cdot), \forall s\in[0,1]$，并设沿 γ_s 延拓时，有相应的局部保角平坦结构的覆盖邻域 $V_1, V_2, \cdots, V_l$，其中 $V_i\cap V_{i+1}\neq\emptyset$, $V_1=U_0$, $V_l=U_1$，以及相应的延拓(Φ_i, V_i), $i=1,\cdots,l-1$.

分划 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=1$，使得 $K_i=\gamma_s[t_{i-1}, t_i]\subset V_i$. 令 $\varepsilon=\mathrm{Min}\{\mathrm{dist}(K_i, M\backslash V_i)|1\leqslant i\leqslant l\}$ (>0)，则 $\exists\delta>0$ 使得当 $|s-s'|<\delta$ 时，$\mathrm{dist}(\gamma_s(t), \gamma_{s'}(t))<\varepsilon$, $\forall t\in[0,1]$. 从而，$\gamma_{s'}[t_{i-1}, t_i]\subset V_i$，由此推出：$(\Phi_i, V_i)$, $i=1,\cdots,l$，还是沿曲线$\gamma_{s'}$的一个延拓. 于是沿 γ_s 与 $\gamma_{s'}$ 所得的延拓在 p_1 点是一样的. 再由$[0,1]$的紧性，可通过有限个 s 值由 0 过渡到 1，使得(Φ, V)与(Ψ, W)相容.

为此在 M 上定义的局部浸没 Φ: $M\to S^n$ 显然诱导出 M 上原来的局部保角平坦结构.

定义 1.10. 设 Φ: $M\to S^n$ 是一个局部浸没，则称 Φ 为 M 的展开映射 (developing map).

一般的局部保角平坦流形未必是单连通的，所以不一定有展开映射. 为了充分利用展开映射作工具，我们退一步，先从 M 的万有覆盖 $\widetilde{M}$ (universal covering) 出发.

所谓$(\overline{M}, \pi)$是 M 的一个覆盖空间，是指 $\overline{M}$ 是一个连通的局部保角平坦的 Riemann 流形，以及覆盖映射 π: $\overline{M}\to M$.

拓扑意义下的覆盖空间要求覆盖映射 π 满足如下条件：$\forall x\in M$，有它的一个邻域 U_x 使得 π^{-1} 把 U_x 同胚地映到 $\pi^{-1}(U_x)$ 的每个分量. 而局部保角意义下的覆盖空间，则还要求覆盖映射 π 满足：π^{-1} 把 U_x 微分同胚，并保角地映到 $\pi^{-1}(U_x)$ 的每个分量.

对于拓扑意义下的覆盖空间$(\overline{M}, \pi)$，我们可以唯一地用 U_x 上的保角平坦结构规定 $\pi^{-1}(U_x)$ 的每个分量上的保角平坦结构. 于是拓扑意义下的覆盖空间便被唯一规定了保角平坦结构. 这就是

我们现在意义下的覆盖空间。

万有覆盖空间 $\widetilde{M}$ 本来是这样定义的：任取 $x_0 \in M$，$\tilde{x} \in M$定义为一对$(x, h(x))$，其中 $x \in M$，而 $h(x)$是以 x_0 为起点 x 为终点的 M 上的曲线的同伦类，于是 $\widetilde{M}$ 上的拓扑以及保角平坦结构都被自然地定义了。

设 $d \in \pi_1(M, x_0)$，则

$$d: (x, h(x)) \longmapsto (x, d + h(x)) \tag{1.18}$$

如非恒同，便是 $\widetilde{M} \to \widetilde{M}$ 的一个没有不动点的拓扑保角映射．而一切形如(1.18)的变换 d 构成$(\widetilde{M}, M)$的覆盖群 $D \cong \pi_1(M)$。

因为 $\widetilde{M}$ 是单连通的局部保角平坦流形，所以有

推论 1.11. 设 $M^n, n \geqslant 3$，是一个局部保角平坦的流形，则 $\widetilde{M}$ 有展开映射 $\Phi: \widetilde{M} \to S^n$.

在此，展开映射 Φ 在相差一个 $\mathrm{Conf}(S^n)$ 元的意义下是唯一确定的．又注意到覆盖群D定义了 $\widetilde{M}$ 到自身的保角变换群(1.18)，于是有 $\rho(d) \in \mathrm{Conf}(S^n)$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\Phi} & S^n \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho(d)} \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{\Phi} & S^n, \end{array}$$

即 $\rho: D \cong \pi_1(M) \to \mathrm{Conf}(S^n)$ 是一同态满足：

$$\rho(d) \circ \Phi = \Phi \circ d.$$

我们称此同态 ρ 为 M 的和乐表示(holonomy)．$\rho\pi_1(M)$称为$\pi_1(M)$的和乐群。

记 ρ 的核为 $\ker\rho$，则 $\ker\rho$ 为 $\pi_1(M)$的正规子群，于是可以定义商群 $\hat{\Gamma} = \pi_1(M)/\ker\rho$ 以及覆盖空间 $\hat{M} = \widetilde{M}/\ker\rho$，并把展开映射 Φ 定义在 $\hat{M}$ 上，即有

$$\Phi: \hat{M} \to S^n.$$

我们把 $\hat{M}$ 称为 M 的和乐覆盖．这时 $\hat{\Gamma}$ 在 M 上起覆盖变换的作用，且有 $M = \hat{M}/\hat{\Gamma}$，以及

$$\hat{\rho}: \hat{\Gamma} \to \mathrm{Conf}(S^n)$$

是单射。

所以今后，我们可以不必在万有覆盖 $\tilde{M}$ 上用展开映射，而只须限制在和乐覆盖 $\hat{M}$ 上，有时这样做更方便些。

§2. 保角不变量

本节将引进保角不变的 Laplace 算子、Sobolev 商 $Q(M)$，以及一个与保角平坦流形的 Green 函数在奇点邻域外可积幂次有关的指标 $d(M)$。它们是研究局部保角平坦流形的基本工具。此外，我们还将从流形的曲率性质估计 $d(M)$的大小，从 $d(M)$的大小估计覆盖流形边界的 Hausdorff 维数。在下一节还将通过 $d(M)$的大小判断流形 M 嵌入 S^n 的可能性。

2.1. 保角不变的 Laplace 算子

设(M, g)是一个 Riemann 流形，$\dim M \geq 3$。现在用 M 上的正函数 u 满足：

$$u^{\frac{4}{n-2}} = e^{2\rho}$$

来取代保角变换对应的度量因子 ρ。设 $g^* = \Phi^*(g) = u^{\frac{4}{n-2}}g$，这时(1.8)改写成

$$\Delta_g u - c_n R_g u = -c_n R_{g^*} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{2.1}$$

其中 $c_n = (n-2)/4(n-1)$。线性算子

$$L_g = \Delta_g - c_n R_g$$

称为保角不变的 Laplace 算子。因为如果还有保角变换 Ψ 满足：$g^\wedge = \Psi^*(g^*) = v^{\frac{4}{n-2}}g^*$，$v > 0$，则

$$\begin{aligned} L_{g^*} v &= -c_n R_{g^\wedge} v^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &= -c_n \cdot R_{(uv)^{\frac{4}{n-2}}g}(u \cdot v)^{\frac{n+2}{n-2}} \cdot u^{-\frac{n+2}{n-2}} \\ &= L_g(uv) \cdot u^{-\frac{n+2}{n-2}}. \end{aligned}$$

或者写成

$$L_g(uv) = u^{\frac{n+2}{n-2}} L_{u^{\frac{4}{n-2}}g} v. \tag{2.2}$$

注意到 L_g 及 $L_{u^{\frac{4}{n-2}}g}$ 都是线性算子，所以(2.2)式中 $v > 0$ 的

条件可以去掉。

等式(2.2)非常重要，它表示在保角变换下 Laplace 算子的变换公式。

2.2. 保角不变量 $Q(M)$

利用保角不变算子 L_g，定义

$$Q(M)=\inf\left\{-\int_M \varphi L_g\varphi dv_g \mid \varphi\in C_0^\infty(M),\right. \tag{2.3}$$
$$\left.\int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}}dv_g=1\right\}.$$

这是一个保角不变量. 事实上，若有 $g^*=u^{\frac{4}{n-2}}g$，则

$$\int_M \varphi L_{g^*}\varphi dv_{g^*}=\int_M \varphi u^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(u\varphi)\cdot u^{\frac{2n}{n-2}}dv_g$$
$$=\int_M (u\varphi)L_g(u\varphi)dv_g,$$

而且

$$\int_M \varphi^{\frac{2n}{n-2}}dv_{g^*}=\int_M (u\varphi)^{\frac{2n}{n-2}}dv_g.$$

利用这些保角不变性，我们首先可以对紧的局部保角平坦流形按其数量曲率的符号来分类.

定理 2.1. 设 M 是一个紧的局部保角平坦流形，则必存在与其相容的度量 g，使其数量曲率不变号.

证明: 设 g_0 是 M 上的一个相容的 Riemann 度量. 作保角变换，设 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$，$u>0$，则由(2.2)

$$c_nR_g=-L_g1=-u^{-\frac{n+2}{n-2}}L_{g_0}u.$$

今取 u 为对应于 $-L_{g_0}$ 的第一本征值 λ_1 的正本征函数，则

$$c_nR_g=\lambda_1u^{-\frac{4}{n-2}}. \tag{2.4}$$

推论 2.2. 设 M 是一个紧的局部保角平坦流形，则为了 $Q(M)>0(=0$, 或$<0)$必须且仅须 M 上存在与之相容的度量 g，使其数量曲率 $R_g>0(=0$, 或$<0)$.

证明: 盖因

$$\lambda_0 = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(M)} \frac{-\int \varphi L_{g_0} \varphi dv_{g_0}}{\int \varphi^2 dv_{g_0}}$$

$$= Q(M) \cdot \inf_{\varphi \in C_0^\infty(M)} \frac{\left[\int \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}\right]}{\int \varphi^2 dv_{g_0}}.$$

由 Hölder 不等式，$\mathrm{Vol}(M)^{-\frac{2}{n}} Q(M) \leqslant \lambda_0$. 此外显然有常数 $C > 0$ 使得 $\lambda_0 \leqslant CQ(M)$. 因此 λ_0 与 $Q(M)$ 同号.

以下我们想了解 $Q(M)$ 的大小. 在第五章，我们证明了：对于紧流形，$Q(M) \leqslant Q(S^n)$，$\dim M = n$；并且除非 M 保角等价于 S^n，总有 $Q(M) < Q(S^n)$. 从 $Q(M)$ 的保角等价性，还可看出：对于紧流形，$Q(M) = Q(S^n)$ 必须且仅须 M 保角等价于 S^n. 现在我们考察未必是紧的流形.

定理 2.3. 设 (M, g) 是一个 Riemann 流形，又设有 $\Phi: (M, g) \to (S^n, g_0)$ 是一个保角变换，其中 g_0 是标准度量，则 $Q(M) = Q(S^n)$.

先证一个

引理 2.4. 设 $M \subset S^n$ 是一个开集，则 $Q(M) = Q(S^n)$.

证明：按定义，若有子流形 $\Omega_1 \supseteq \Omega_2$，则必 $Q(\Omega_1) \leqslant Q(\Omega_2)$. 所以有 $Q(M) \geqslant Q(S^n)$.

为证反过来的不等式，任取在标准度量下，一个以 $\varepsilon > 0$ 为半径的球 B_ε. 再取保角变换 $\psi: S^n \to S^n$，满足：$\psi(M) \supset S^n \backslash B_\varepsilon$，则

$$Q(M) = Q(\psi(M)) \leqslant Q(S^n \backslash B_\varepsilon) \to Q(S^n)$$

当 $\varepsilon \to 0$.

定理 2.3 的证明：

1° 因为保角变换 Φ 局部地是一一的，于是有开集 $\mathcal{O} \subset M$，使得 $\Phi(\mathcal{O}) \subset S^n$ 是一个开子集. 按引理 2.4，$Q(\mathcal{O}) = Q(\Phi(\mathcal{O})) = Q(S^n)$. 因此，$Q(S^n) \geqslant Q(M)$.

2° 要证：$Q(M) \geqslant Q(S^n)$. 取一串有光滑边界的紧区域 $\{U_i,$

$i=1,2\cdots\}$，满足：$U_i\subset U_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$以及 $\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=M$.
因此，$\lim_{i\to\infty}Q(U_i)=Q(M)$。

我们如果能证明：对于 M 的任意开区域 U，$\bar{U}$ 紧，∂U光滑，都有 $Q(U)\geqslant Q(S^n)$，那么目的就达到了。

反证，倘若不然，有一个 U，$\bar{U}$ 紧，∂U 光滑，满足：$Q(U)<Q(S^n)$。于是由第五章，$\exists u>0$ 于 U 满足：

$$\begin{cases}L_gu+Q(U)u^{\frac{n+2}{n-2}}=0，\text{于 } U,\\ u|_{\partial U}=0,\\ \int_U u^{\frac{2n}{n-2}}dv_g=1.\end{cases}$$

在U外补充 $u\equiv 0$，那么 $\forall\varphi\in C_0^\infty(M)$，$\varphi>0$，

$$\int_M\varphi L_gudv_g=\int_M uL_g\varphi dv_g$$

$$=-\int_U\varphi L_gudv_g-\int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\geqq\int_U\varphi L_gudv_g,$$

所以在广义函数意义下，

$$L_gu+Q(U)u^{\frac{n+2}{n-2}}\geqslant 0\quad\text{于 } M \text{ 上}.$$

现在把 u 的定义拉到 S^n 上去，定义

$$v(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y\in S^n\backslash\Phi(\bar{U}),\\ \max\{|\Phi'(x)^{-1}|^{\frac{n-2}{2}}u(x)\,|\,x\in\Phi^{-1}(y)\cap U\}, & \text{当 } y\in\Phi(\bar{U}).\end{cases}$$

因为Φ是局部浸没，所以 $\Phi^{-1}(y)\cap\bar{U}$ 只能是有限集，并且 $\forall x\in\Phi^{-1}(y)\cap U$，$\exists x$ 的邻域 U_x，使得Φ：$U_x\to\Phi(U_x)$ 是微分同胚，$\Phi(U_x)$是 y 的一个邻域。记 Φ_x^{-1} 为其逆。再定义

$$v_x(z)=|(\Phi_x^{-1})'|^{\frac{n-2}{2}}u(\Phi_x^{-1}(z))，\text{当 } z\in\Phi(U_x),$$

则由 L_{g_0} 的保角不变性，

$$L_{g_0}v_x+Q(U)v_x^{\frac{n+2}{n-2}}\geqslant 0，\text{于 } \Phi(U_x).$$

由此可见 v 是 S^n 上的非负 Lipschitz 函数，满足

$$L_{g_0}v+Q(U)v^{\frac{n+2}{n-2}}\geqslant 0，\text{于 } S^n. \tag{2.5}$$

利用保角不变性，

$$\int_{\Phi(U_x)} v_x^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \int_{U_x} u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g.$$

因此，

$$\int_{S^n} v^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leqslant 1,$$

积分不等式(2.5)得

$$-\int_{S^n} v \cdot L_{g_0} v dv_{g_0} \leqslant Q(U)\int_{S^n} v^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leqslant Q(U),$$

由于$\int_{S^n} v^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leqslant 1$，所以 $Q(S^n) \leqslant Q(U)$. 这与前设矛盾.

推论 2.5. 设 (M, g)是一个单连通的局部保角平坦流形，g 是一个相容度量，$n = \dim M \geqslant 3$; 则 $Q(M) = Q(S^n)$.

2.3. $d(M)$及其估计

紧 Riemann 流形(M, g)上 L_g 算子的 Green 函数是有定义的。 现在要把 Green 函数的概念推广到未必是紧的保角平坦流形的万有覆盖以及和乐覆盖上去.

以下设(M, g)是局部保角平坦的 Riemann 流形，$\dim M \geqslant 3$。

定理 2.6. $\forall p_0 \in \hat{M}$，L_g 在 $\hat{M}$ 上有唯一的极小正 Green 函数，以 p_0 为极点.

证明：取一串开区域 $U_i \subset \hat{M}$，如下：

$p_0 \in U_i \subset \overline{U}_i \subset U_{i+1}$，$\overline{U}_i$ 紧，∂U_i 光滑，$i = 1, 2\cdots$，以及

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \hat{M}.$$

作 0-Dirichlet 边值问题的以 p_0 为极点的 Green 函数

$$\begin{cases} L_g G_0^i = -\delta_{p_0} & \text{在 } U_i \text{ 中，} \\ G_0^i|_{\partial U_i} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

我们要证：G_0^i 收敛到一函数 G_0.

注意到 $\hat{M}$ 有展开映射 Φ: $\hat{M} \to S^n$，则由定理 2.3，$Q(\hat{M}) = Q(S^n)$. 于是对于 $\hat{M}$ 上的开集 U_i，$\overline{U}_i$ 紧，当 i 足够大时，有 $Q(U_i)$

$=Q(S^n)>0$，从而 L_g 对应的第一本征值 $\lambda_0(U_i)>0$，于是在 U_i 上，L_g 有极大值原理，由此推出：

$$0<G_0^i\leqslant G_0^{i+1}.$$

我们要找一个上方控制函数．还是利用展开映射 Φ．设 $q_0=\Phi(p_0)$，利用(S^n,g_0)上以 q_0 为极点的 Green 函数 H_0，把它通过 Φ 拉回到 $\hat{M}$ 上，作为 $\hat{M}$ 上函数列 G_0^i 的上方控制函数．

事实上，因为 $\Phi^*(g_0)=|\Phi'|^2g$，由(2.2)，

$$L_{\Phi^*(g_0)}H_0\circ\Phi=|\Phi'|^{-\frac{n+2}{2}}L_g|\Phi'|^{\frac{n-2}{2}}H_0\circ\Phi.$$

而左式等于 $-\sum\limits_{p\in\Phi^{-1}(q_0)}\delta_p$．因此，由极大值原理，

$$G^*=|\Phi'(p_0)|^{-\frac{n+2}{2}}|\Phi'|^{\frac{n-2}{2}}H_0\circ\Phi$$

满足：

$$G_0^i\leqslant G^*,\ i=1,2,\cdots,$$

由单调收敛定理，存在 Green 函数 G_0 满足：

$$\begin{cases}\lim\limits_{i\to\infty}G_0^i=G_0,\\ L_gG_0=-\delta_{p_0},\\ 0<G_0\leqslant G^*.\end{cases}\tag{2.7}$$

G_0 的极小性是由(2.6)与(2.7)以及极大值原理直接得到的．再用极大值原理，极小正 Green 函数是唯一的．

命题 2.7． 设 G_0 与 G_0' 分别是以 p_0 与 p_0' 为极点的 L_g 的极小正 Green 函数，又设 $\mathcal{O}\subset\hat{M}$ 为一开子集，使 $p_0,p_0'\in\mathcal{O}$，且 $\bar{\mathcal{O}}$ 是紧子集，则必有 $\lambda\in(0,1)$使得

$$\lambda G_0\leqslant G_0'\leqslant\lambda^{-1}G_0,\ 于\ \hat{M}\backslash\mathcal{O}.$$

证明：取一串开区域 U_i 如上，并设 $\bar{\mathcal{O}}\subset U_i$，$i=1,2,\cdots$．设 G_0^i 与 $G_0^{i\prime}$ 分别表示 U_i 上对应于 L_g 的以 p_0 与 p_0' 为极点的 Green 函数，则因

$$G_0^i|_{\partial U_i}=G_0^{i\prime}|_{\partial U_i}=0,$$

而且有 $\lambda_0\in(0,1)$使得

$$\lambda_0G_0|_{\partial\mathcal{O}}\leqslant G_0'|_{\partial\mathcal{O}}\leqslant\lambda_0^{-1}G_0|_{\partial\mathcal{O}},$$

所以当 i 足够大时，有 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 使得

$$\lambda G_0^i|_{\partial\mathcal{O}}\leqslant G_0^{i'}|_{\partial\mathcal{O}}\leqslant\lambda^{-1}G_0^i|_{\partial\mathcal{O}}.$$

在 $U_i\backslash\bar{\mathcal{O}}$ 上，应用极大值原理，得

$$\lambda G_0^i\leqslant G_0^{i'}\leqslant\lambda^{-1}G_0^i,$$

取极限，即得结论.

注意到 Green 函数 G_0 除奇点 p_0 而外，是光滑的，应用定理 2.6 与命题 2.7，我们能引入

定义 2.8. 设 (M,g) 是一个局部保角平坦的 Riemann 流形，又设 $\hat{M}$ 是它的和乐覆盖. 定义

$$p(M)=\inf\left\{p\geqslant 0\,\Big|\int_{\hat{M}\backslash\mathcal{O}}G_0^p dv_g<\infty,\quad p_0\in\mathcal{O},\right.$$

$$\left.\mathcal{O}\text{ 是开集}，\bar{\mathcal{O}}\text{ 是 }\hat{M}\text{ 中之紧集}\right\},$$

以及

$$d(M)=\frac{n-2}{2}p(M).$$

$p(M)$ 与 $d(M)$ 与 p_0 以及 $\mathcal{O}$ 的特殊选择无关，它们是 G_0 的在 ∞ 处增张行为的一个整体描述.

如此定义的 $p(M)$ 与 $d(M)$ 当 M 是紧 Riemann 流形时是一个保角不变量.

定理 2.9. 若 (M,g) 是紧局部保角平坦的 Riemann 流形，则 $d(M)$ 与 g 无关，而只依赖于 M 上的保角平坦结构.

证明：设 g 与 $\bar{g}$ 是 M 上的两个相容的保角度量，有 $u>0$ 适合 $\bar{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$. 由于 M 紧，故有 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $\lambda\leqslant u\leqslant\lambda^{-1}$. 分别记 G_0 与 $\bar{G}_0$ 为 L_g 与 $L_{\bar{g}}$ 以 $p_0\in\hat{M}$ 为极点的 Green 函数，由 (2.2)，

$$\bar{G}_0=u(p_0)^{\frac{n+2}{n-2}}u^{-1}G_0,$$

从而 G_0 与 $\bar{G}_0$ 有相同的可积幂次.

以下我们来估计 $d(M)$.

定理 2.10. 设 (M,g) 是任意局部保角平坦的 Riemann 流形，则 $d(M)\leqslant n$.

证明：要证：$\int_{\hat{M}\setminus\mathscr{O}} G_0^{\frac{2n}{n-2}} < \infty$. 通过前述一串开集 U_i，及相应的 Green 函数 G_0^i，只要证明

$$\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} (G_0^i)^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C\ (\text{与 } i \text{ 无关}),\ i=1,2,\cdots \tag{2.8}$$

就够了. 设 U 是任意一个开集，记

$$E_U(\phi) = \int_U (|\nabla_g \phi|^2 + C_n R_g \phi^2) dv_g,$$

其中 $\phi \in C_0^\infty(U)$. 为证(2.8)选取 $\hat{\mathscr{O}} \subset \hat{\mathscr{O}} \subset \mathscr{O}$，$p_0 \in \hat{\mathscr{O}}$，以及 $\zeta \in C_0^\infty(\mathscr{O})$，$0 \leqslant \zeta \leqslant 1$，满足：$\zeta|_{\hat{\mathscr{O}}} = 1$. 因为有

$$\int_{U_i\setminus\mathscr{O}} (G_0^i)^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leqslant \int_{U_i} [(1-\zeta)G_0^i]^{\frac{2n}{n-2}} dv_g$$
$$\leqslant Q(U_i) E_{U_i}((1-\zeta)G_0^i),$$

而 $Q(U_i) \to Q(M)$，并且 $G_0^i|_{\partial U_i} = \zeta G_0^i|_{\partial U_i} = 0$ 以及 $G_0^{(i)}|_{\partial\hat{\mathscr{O}}} = \zeta G_0^i|_{\partial\hat{\mathscr{O}}}$；联同

$$L_g G_0^i = 0, \qquad \text{于 } U_i \setminus \hat{\mathscr{O}},$$

所以可见（Dirichlet 原理）

$$E_{U_i\setminus\hat{\mathscr{O}}}(G_0^i) \leqslant E_{U_i\setminus\hat{\mathscr{O}}}(\zeta G_0^i) \to E_{\mathscr{O}\setminus\hat{\mathscr{O}}}(\zeta G_0),\ \text{当 } i \to \infty.$$

设上式右端 $\leqslant$ 常数 C（与 i 无关），得

$$E_{U_i}((1-\zeta)G_0^i) = E_{U_i\setminus\hat{\mathscr{O}}}((1-\zeta)G_0^i) \leqslant 4C.$$

于是(2.8)得证.

定理 2.11. 设 $R_g \geqslant R_0 > 0$，R_0 是一常数，则 $d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}$.

证明：要证

$$\int_{\hat{M}\setminus\mathscr{O}} G_0 dv_g < \infty,$$

沿用以上记号. 令 v_i 是下列方程之解：

$$\begin{cases} L_g v = -1, & \text{于 } U_i, \\ v|_{\partial U_i} = 0, \end{cases}$$

则有

$$\int_{U_i} G_0^i dv_g = \langle G_0^i, 1 \rangle$$
$$= -\langle G_0^i, L_g v_i \rangle$$

$$= v_i(p_0).$$

因此

$$v_i(p_0) \leqslant \sup_{\bar{U}_i} v_i = v_i(p_i^*),$$

其中 $p_i^* \in U_i$ 是 v_i 之极大值点. 注意到

$$-\Delta_g v_i(p_i^*) \geqslant 0,$$

以及

$$-\Delta_g v_i + C_n R_0 v_i \leqslant -L_g v_i = 1, \quad 于 U_i,$$

于是得到

$$v_i(p_i^*) \leqslant \frac{1}{c_n R_0},$$

这就是我们要证的.

去掉限制 $R_g \geqslant R_0 > 0$, 只假设 $R_g \geqslant 0$. 我们要想估计 $d(M)$的值. 为此用 $\lambda_0(\hat{M})$ 表示 U_i 上零边值 $-L_g$ 算子的第一本征值 $\lambda_0(U_i)$的极限. 显然有 $\lambda_0(\hat{M}) \geqslant 0$.

定理 2.12. 设 $R_g \geqslant 0$.

(a) 若 $\lambda_0(\hat{M}) > 0$, 则 $d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}$;

(b) 若 $\lambda_0(\hat{M}) = 0$, 则 $d(M) \leqslant \frac{n}{2}$.

证明: 由设 $R_g \geqslant 0$, 可见

$$\Delta_g G_0^i \geqslant 0, \qquad 于 U_i \backslash \mathcal{O} 上,$$

乘以$(G_0^i)^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, 作分部积分得

$$\int_{U_i\backslash \mathcal{O}} |\nabla (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2 dv_g = -\int_{U_i\backslash \mathcal{O}} (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \Delta_g (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} dv_g$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{O}} (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \frac{\partial (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{\partial n_g}$$

$$= -\frac{1+\varepsilon}{2} \int_{U_i\backslash \mathcal{O}} (G_0^i)^\varepsilon \Delta_g G_0^i + \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\times \int_{U_i\backslash \mathcal{O}} |\nabla (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2 + \int_{\partial \mathcal{O}} (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \frac{\partial (G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{\partial n_g}.$$

即得一与 i 无关的常数 $C > 0$ 使得

$$\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_{U_i\setminus\mathscr{O}}|\nabla(G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2dv_g+\frac{1+\varepsilon}{2}$$

$$\times\int_{U_i\setminus\mathscr{O}}(G_0^i)^{\varepsilon}\Delta G_0^i\leqslant C. \tag{2.9}$$

因为 (2.9)式 左端之两项都是非负的，从而它们都被常数 C 所控制.

(a) 设 $\lambda_0(\hat{M})>0$. 应用 Poincaré 不等式，有与 ε 有关的常数 $C_\varepsilon>0$，使得

$$\int_{U_i\setminus\mathscr{O}}(G_0^i)^{1+\varepsilon}dv_g\leqslant C_\varepsilon.$$

又因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以得 $d(M)\leqslant\frac{n-2}{2}$.

(b) 设 $\lambda_0(\hat{M})=0$. 利用

$$\int_{U_i\setminus\mathscr{O}}(G_0^i)^{(1+\varepsilon)\frac{n}{n-2}}\leqslant Q(U_i\setminus\bar{\mathscr{O}})E_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}((G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}). \tag{2.10}$$

因为 $Q(U_i\setminus\bar{\mathscr{O}})\to Q(\hat{M}\setminus\bar{\mathscr{O}})$，而

$$E_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}((G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}})=\int_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}[|\nabla(G_0^i)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}|^2$$

$$+c_nR_g(G_0^i)^{1+\varepsilon}]dv_g.$$

所以我们分别来看上式右端之两项. 由(2.9)，其第一项$\leqslant C_\varepsilon$. 再利用方程 $L_gG_0^i=0$ 于 $U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}$，

$$\int_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}C_dR_g(G_0^i)^{1+\varepsilon}dv_g=\int_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}(G_0^i)^{\varepsilon}\Delta G_0^idv_g.$$

再由(2.9)，这第二项也$\leqslant C_3$. 从而有

$$\int_{U_i\setminus\bar{\mathscr{O}}}(G_0^i)^{(1+\varepsilon)\frac{n}{n-2}}dv_g\leqslant 2C_\varepsilon,$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以得 $d(M)\leqslant\frac{n}{2}$.

定理 2.13. 设 $R_g\geqslant R_0>0$，其中 R_0 是一常数. 又设 $|R_g|$ 连同 $|\nabla R_g|$ 都是有界的，并有实数 b_0，使得 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant -b_0^2$，则 $\exists\varepsilon_0\in(0,1)$ 使得 $d(M)\leqslant\frac{n-2}{2}(1-\varepsilon_0)$.

证明：由设 $R_g\geqslant R_0>0$，按定理 2.11 即得

$$\int_{\hat{M}\setminus O} G_0 dv_g < \infty.$$

为了证明现在的结论，需利用更多的曲率条件将这估计改善。

任取 $b > r \geq 0$，记测地球 $B_r = B_r(p_0)$，$B_b = B_b(p_0)$。构作函数 $\eta, \varphi \in C_0^\infty(\hat{M})$满足

$\varphi = 0$ 于 B_{2b} 之外，$\varphi|_{B_b} = 1, 0 \leq \varphi \leq 1$，以及 $|\nabla\varphi| \leq 2b^{-1}$，

$\eta|_{B_r} = 0, \eta = 1$ 于 B_{r+1} 之外，$0 \leq \eta \leq 1$，以及 $|\nabla\eta| \leq 2$。

于是

$$\int_{B_{2b}\setminus B_{r+1}} G_0 \leq \int_{\hat{M}\setminus B_r} \varphi \cdot \eta \cdot G_0.$$

但因

$$\Delta_g G_0 - c_n R_0 G_0 \geq 0, \quad 于 \hat{M}\setminus B_r,$$

所以

$$\begin{aligned}
c_n R_0 \int_{\hat{M}\setminus B_r} \varphi \cdot \eta \cdot G_0 dv_g &\leq \int_{\hat{M}\setminus B_r} \varphi \cdot \eta \cdot \Delta_g G_0 dv_g \\
&= -\int_{\hat{M}\setminus B_r} (\varphi\nabla\eta + \eta\nabla\varphi) \cdot \nabla G_0 dv_g \\
&\leq 2C\left[\int_{B_{r+1}\setminus B_r} G_0 dv_g + b^{-1}\int_{B_{2b}\setminus B_b} G_0 dv_g\right],
\end{aligned}$$

在此，我们用到第一章中的梯度估计：

$$|\nabla G_0| \leq CG_0, \quad C \text{ 是一常数.}$$

虽然在第一章中梯度估计是对调和函数作出的，但在添加 R_g，$|\nabla R_g|$有界的条件下，梯度估计可推广到 $L_g u = 0$ 的解。

现在令 $b \to \infty$，我们得到

$$\int_{\hat{M}\setminus B_r} G_0 dv_g \leq C_1 \int_{B_{r+1}\setminus B_r} G_0 dv_g,$$

其中 $C_1 > 0$ 是一常数(与 r 无关)，即得

$$\int_{\hat{M}\setminus B_{r+1}} G_0 dv_g \leq \frac{C_1}{1 + C_1}\int_{\hat{M}\setminus B_r} G_0 dv_g.$$

于是我们得到改善的估计：

$$\int_{\hat{M}\setminus B_{N+1}} G_0 dv_g \leq \lambda^N \int_{\hat{M}\setminus B_1} G_0 dv_g,$$

其中 $\lambda = C_1(1 + C_1)^{-1} < 1$，$N = 1, 2, \cdots$。

又注意到在 $\mathrm{Ric}(g) \geqslant -b_0^2$ 的条件下，按第一章命题 1.4.3 的证明可得

$$\mathrm{Vol}(B_{N+1}\setminus B_N) \leqslant C_2(1+N)^n e^{cN}.$$

其中 $c = \dfrac{b_0+1}{2}$，而 C_2 是与 N 无关的常数。

现在由 Hölder 不等式得到

$$\int_{\hat{M}\setminus B_1} G_0^{1-\varepsilon_0} dv_g = \sum_{N=1}^{\infty} \int_{B_{N+1}\setminus B_N} G_0^{1-\varepsilon_0} dv_g$$

$$\leqslant \sum_{N=1}^{\infty} \left(\int_{\hat{M}\setminus B_N} G_0 dv_g \right)^{1-\varepsilon_0} \mathrm{Vol}(B_{N+1}\setminus B_N)^{\varepsilon_0}$$

$$\leqslant C_3 \sum_{N=1}^{\infty} \lambda^{(N-1)(1-\varepsilon_0)}(1+N)^{n\varepsilon_0} e^{cN\varepsilon_0},$$

其中 C_3 是与 N 无关的常数. 适当选择 $\varepsilon_0 > 0$，可使上级数收敛，即得结论.

2.4. $\dim(\partial M)$ 与 $d(M)$

设 $M \subset S^n$，我们将用 $d(M)$ 估计 ∂M 的 Hausdorff 维数. 为此，我们引进有关 Hausdorff 测度以及容度 (capacity) 的必要概念和结论.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中之一子集，对于 $0 \leqslant d \leqslant n$，$\varepsilon > 0$，令

$$H_{d,\varepsilon}(A) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \inf\{\Sigma r_i^d \mid A \subset \cup B_{r_i}(x_i),$$

$$r_i \leqslant \varepsilon\},$$

其中 $B_r(x)$ 是以 x 为中心，$r > 0$ 为半径的球，以及

$$H_d(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{d,\varepsilon}(A),$$

并称后者为 A 的 d 维 Hausdorff 测度.

由定义可见，Hausdorff 测度是 M 上的一个正则外测度，而当 $d=n$ 时，它就是 Lebesgue 外测度.

定义 2.14. 称

$$\dim(A) = \inf\{d \geqslant 0 \mid H_d(A) = 0\}$$

为子集A的 Hausdorff 测度。

此外，我们再引进度量集合大小的容度的概念。

设$K\subset \mathbb{R}^n$是一紧集，$p>1$，令

$$C_p(K)=\inf\left\{\int|\nabla\varphi|^p dx \mid \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi \text{ 在} K \text{的一个邻域上为 } 1\right\},$$

并称其为紧集K的p容度。当$p=2$时，称为牛顿容度。

Hausdorff 测度与p容度之间有如下关系。

定理 2.15. 设K是$\mathbb{R}^n$中之一紧集，$n\geqslant p>1$.

(1) 若$H_{n-p}(K)<\infty$，则必$C_p(K)=0$.

(2) 若有$\varepsilon>0$使$H_{n-p+\varepsilon}(K)>0$，则必$C_p(K)>0$.

(参看 Adams D. R., Meyers N. G., Bessel potentials, inclusion relations among classes of exceptional sets, *Ind. Univ. Math. J.*, **22** (1973), 873—905.)

定理 2.16. 设$M\subset S^n$是一区域，g是M上的一个完备保角度量$g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$，其中g_0是S^n上的标准度量。又设(M, g)上的L_g的以内点$p_0\in M$的极点的极小正 Green 函数G_0满足

$$G_0=u(p_0)^{\frac{n+2}{n-2}}u^{-1}H_0\triangleq\bar{G}_0,$$

其中H_0是与G_0有相同极点的L_{g_0}的 Green 函数；则

$$C_2(\partial M)=0,$$

以及

$$\dim(\partial M)\leqslant d(M).$$

证明：1° 不妨设p_0为S^n的北极点。由于p_0为M之内点，所以球极投影$\varphi: S^n\backslash\{p_0\}\to\mathbb{R}^n$变$\partial M$上零容度集为零容度集，而且反之亦然。为此取$\varphi_m\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$适合：$\varphi_m$在$\partial\varphi(M)$的邻域内为 1，但

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi_m|^2 dx\to 0,\quad \text{当 } m\to\infty.$$

φ_m的选择如下：按G_0定义，有G_m满足：

$$\begin{cases} L_g G_m = -\delta_{p_0}, & \text{于 } U_m, \\ G_m|_{\partial U_m} = 0, \end{cases} \quad m = 1, 2, \cdots$$

(记号见定理 2.6)，以及 $G_m \uparrow G_0$. 记 $G_m^\wedge$ 为 G_m 在$(\mathbf{R}^n, dx^2)$上导出的近似 Green 函数列: $G_m^\wedge = |\psi'|^{-\frac{n-2}{2}} G_m \circ \psi^{-1}$, 则有

$$\begin{cases} \Delta G_m^\wedge = 0, \text{ 于 } \Omega_m = \psi(U_m), \\ G_m^\wedge|_{\partial \Omega_m} = 0, & m = 1, 2, \cdots, \\ G_m^\wedge(\infty) = c_n, \end{cases}$$

这是因为 $G_0 = \overline{G}_0 = c_n(1 - x_0)^{-\frac{n-2}{2}}$, 从而 $G_0^\wedge = |\psi'|^{-\frac{n-2}{2}} G_0 \circ \psi^{-1} = c_n$. 扩张 $G_m^\wedge$ 使其在 Ω_m 外为 0, 于是有

$$\int_\Omega |\nabla(G_m^\wedge - G_0^\wedge)|^2 \to 0, \text{ 当 } m \to \infty,$$

对任意 $\Omega \subset \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ 紧.

适当修饰 $G_m^\wedge$,使其在一紧集外为常数 c_n,即可取作 φ_m. 注意到对于 p_0 的任意邻域 $\mathscr{O}$,若记 $\Omega = \phi(\mathscr{O})$, 则在 $\partial\Omega$ 邻近 $G_m^\wedge$ 连同其导数一致收敛到 $G_0^\wedge$,所以

$$\int_{\hat{\mathbf{R}} \setminus \Omega} |\nabla G_m^\wedge|^2 dx = -\int_{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial n} G_m^\wedge \cdot G_m^\wedge d\sigma \to 0, \text{ 当 } m \to \infty$$

即得

$$\int |\nabla \varphi_m|^2 dx \to 0,$$

这就是 $C_2(\partial M) = 0$.

2°再证 $\dim(\partial M) \leqslant d(M)$.

由 1°, 以及定理 2.15, $\dim(\partial M) \leqslant n - 2$.

取 $p > \frac{2}{n-2} d(M)$, 则 $\int_{M \setminus \theta} G_0^p dv_g < \infty$, 即有

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2} - p} dv_{g_0} < \infty,$$

构造函数列

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_a(p_0), \\ 0, & x \notin B_{2a}(p_0), \end{cases}$$

其中 $a > 0$, $B_a(p_0)$是在度量 g 下,以 p_0 为中心, a 为半径的测地球, 还可要求

$$|\nabla_g \phi_a(x)| \leqslant 2a^{-1}.$$

若记 $\partial\phi_a$ 为在度量 g_0 下的梯度，则

$$|\partial_{g_0}\phi_a| = u^{\frac{2}{n-2}}|\nabla_g\phi_a|.$$

若令 $q = n - \frac{n-2}{2}p$，则

$$\int_M |\partial\phi_a|^q dv_{g_0} \leqslant (2a^{-1})^q \int_M u^{\frac{2n}{n-2}-p} dv_{g_0} \to 0,$$

当 $a\to\infty$ 时，因为 g 是完备的．又因为 $\phi_a\to 1$ 一致于 M 的任意紧子集上，并且 ϕ_a 在 ∂M 的一个邻域内为 0，按定义

$$C_q(\partial M) = 0.$$

再由定理 2.15，

$$\dim(\partial M) \leqslant n - q = \frac{n-2}{2}p = d(M).$$

对于定理 2.16 中的 (M, g)，我们还能估计出 u 与欧氏距离 $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial M)$的关系．

定理 2.17．设 $M\subset S^n$ 是一个区域，又设 $g = u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 是 M 上的一个完备保角度量．如果(M, g)有有界曲率，并且 R_g 有有界导数，那么

$$u(x) \geqslant C\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}}, \qquad \forall x\in M.$$

其中 $C>0$ 是一个仅依赖于(M,g)曲率的常数．

证明：设 $p_0\in M$，在 $\mathbf{R}^n = S^n\backslash\{p_0\}$ 上选择欧氏度量．在此欧氏坐标下，有函数 $v>0$ 满足

$$g_{ij} = v^{\frac{4}{n-2}}\delta_{ij}.$$

因为 $v^{-\frac{4}{n-2}}g$ 是平坦度量，所以 $L_g v^{-1} = 0$．

现在仿第一章 § 3 作正调和函数的梯度估计，

$$|\nabla_g \log v| \leqslant C', \text{ 在 } \partial M \text{ 附近}.$$

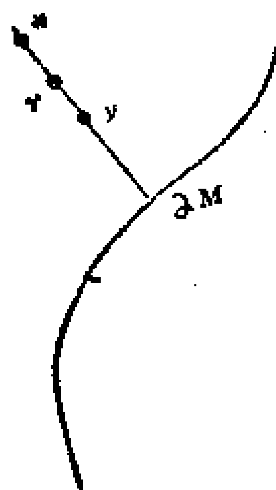
化到欧氏梯度有

$$\begin{aligned}|\partial v| &= v|\partial\log v|\\ &\leqslant C' v^{\frac{n}{n-2}},\end{aligned}$$

于是有

$$|\partial v^{-\frac{2}{n-2}}| \leqslant C'.$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial M$，令 γ 为从 x 出发到 ∂M 上一点，长度为 $\delta(x)$ 的欧氏线段．从 x 积分到 γ 上任意一点 y，有



$$v(x)^{-\frac{2}{n-2}} \leqslant C''\delta(x) + v(y)^{\frac{-2}{n-2}}.$$

因设 g 是完备的，所以有

$$\int_\gamma v^{\frac{2}{n-2}} d\zeta = +\infty.$$

从而有点列 $\{y_i\} \subset \gamma$，使得 $v(y_i) \to +\infty$，即得

$$v(x) \geqslant C''\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

又因为度量 g_0 与欧氏度量在 ∂M 附近是等价的，所以有 $C > 0$，使得

$$u(x) \geqslant C\delta(x)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

注：在定理 2.17 的条件下，我们可以不通过容度概念，直接给出 $\dim(\partial M) \leqslant d(M)$ 的证明．

事实上，$\int_M u^{-p+\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} < \infty$ 蕴含了 $\int_M \delta^{-n+d(M)} dv_{g_0} < \infty$．再利用 Hausdorff 测度的定义，选取适当球覆盖，有 $d \leqslant d(M)$ 使 $H_d(\partial M) < \infty$．

综合定理 2.12 与 2.17，从 $G_0 = G_0$ 可见当 $R_g \geqslant 0$ 时，除 $\lambda_0(\hat{M}) = 0$ 而外，都有 $\dim(\partial \hat{M}) \leqslant \dfrac{n-2}{2}$．现在要证反过来的结论．

定理 2.18. 设 (M^n, g) 是一个紧的局部保角平坦流形，又设 Φ: $\hat{M} \to S^n$ 是展开映射．如果 $H_{\frac{n-2}{2}}(S^n \backslash \Phi(\hat{M})) < \infty$，那么 M 上必有一保角的 Riemann 度量 g_1 使得 R_{g_1} 为非负常数．

证明：由第五章，可作保角变换，使 R_{g_1} 成为常数．兹证 $R_{g_1} \geqslant 0$．反证：倘若 $R_{g_1} < 0$．记 $\Lambda = S^n \backslash \Phi(\hat{M})$，$g_1 = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$，其中 $u > 0$，而 g_0 是 S^n 上的标准度量，则

$$L_{g_0} u = -c_n R_{g_1} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ 于 } M. \qquad (2.11)$$

我们希望把方程(2.11)扩充到 S^n 上去，即 u 延拓到整个 S^n 上，并在广义函数意义下满足(2.11)于 S^n. 一旦完成这一扩充，u 便成为 S^n 上的弱次调和函数. 事实上，

$$\int_{S^n} u L_{g_0}\varphi = -c_n R_{g_1}\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi \geqslant 0,$$

从而

$$\int u\Delta_{g_0}\varphi \geqslant 0,$$

对于一切 $\varphi\in C^\infty(S^n)$，满足 $\varphi\geqslant 0$. 从而 u 必为常数，但这与(2.11)矛盾($R_{g_1}<0$). 也就证明了定理.

因此，我们只要扩充(2.11)到 S^n 就够了. 选取函数 $\alpha\in C^\infty(S^n)$，使得 α 在 A 的一个邻域 U 内为 0，而在 $U\subset\bar U\subset V$，另一个邻域 V 外为 1. $\forall\varphi\in C^\infty(S^n)$，$\alpha\cdot\varphi\in C_0^\infty(S^n\backslash A)$. 由(2.11)得

$$\int_{S^n} L_{g_0}u(\alpha\varphi) = d_n\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}}(\alpha\varphi),$$

其中 $d_n = -c_n R_{g_1} > 0$. 即有

$$\int_{S^n} u(\alpha\Delta_{g_0}\varphi + 2\nabla\alpha\nabla\varphi + \varphi\Delta_{g_0}\alpha) = d_n\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}}\alpha\varphi. \quad (2.12)$$

令 $V\to A$，则 $\alpha\to 1$，a.e. 我们希望证明(2.12)左边的第二、三项 $\to 0$，而其右端 $\to d_n\int u^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi$. 至于后一个结论只要能证：$\int_{S^n\backslash A} u^{\frac{n+2}{n-2}} < +\infty$ 就够了.

以下选择适当的 α，证明以上三个结论.

$\forall\varepsilon>0$，作球 $B_i = B_{r_i}(x_i)$，$r_i>0$，$x_i\in A$，使得 $A\subset \cup B_{r_i}(x_i)$，满足 $r_i\leqslant\varepsilon$，以及 $\sum r_i^{\frac{n-2}{2}} < C$ (常数). 令

$$\alpha_i(x) = \begin{cases}0, & x\in B_{\frac{r_i}{2}}(x_i),\\ 1, & x\notin B_i,\end{cases}$$

$0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$，满足：$|\nabla\alpha_i|\leqslant 2r_i^{-1}$，$|\Delta\alpha_i|\leqslant 4r_i^{-2}$，又令

$$\alpha(x) = \prod\alpha_i(x),$$

则

$$\Delta\alpha = \Delta\prod\alpha_i$$

$$-\sum\Delta\alpha_i\prod_{j\neq i}\alpha_j+\sum\nabla\alpha_i\nabla\alpha_j\prod_{k\neq i,j}\alpha_k$$

$$\leqslant\sum\frac{4}{r_i^2}\chi_{B_i}+\sum\frac{4}{r_ir_j}\chi_{B_i}\cdot\chi_{B_j},$$

其中 χ_E 表示 E 的特征函数. 所以有常数 $C_1>0$ 使

$$|\Delta\alpha|\leqslant C_1^2\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^2.$$

同理

$$|\nabla\alpha|^2\leqslant C_1^2\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^2.$$

先利用这个 α 证 $\int_{S^n}u^{\frac{n+2}{n-2}}<\infty$. 令 $k=\frac{n+2}{2}$,则

$$d_n\int_{S^n}\alpha^k u^{\frac{n+2}{n-2}}\leqslant\int_{S^n}\alpha^k\Delta u=\int_{S^n}\Delta\alpha^k\cdot u$$

$$=\int_{S^n}\left(k\alpha^{k-1}\Delta\alpha+k(k-1)\alpha^{k-2}\nabla\alpha\right)u$$

$$\leqslant k^2C_1^2\int\alpha^{k-2}\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^2u$$

$$\leqslant\left(\int_{S^n}\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^{\frac{n+2}{2}}dv_{g_0}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\int_{S^n}\alpha^k u^{\frac{n+2}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}},$$

所以有

$$\int\alpha^k u^{\frac{n+2}{n-2}}\leqslant C_2\int\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^{\frac{n+2}{2}}$$

$$\leqslant C_2\sum r_i^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)}\cdot r_i^n$$

$$=C_2\sum r_i^{\frac{n-2}{2}}$$

$$<C_2C.$$

于是当取 $\varepsilon\to0$ 时,得 $\int_{S^n}u^{\frac{n+2}{n-2}}\leqslant C_2C$.

再证(2.12)左端第三项→0. 事实上,

$$\int_{S^n}u\varphi\Delta\alpha\leqslant C_1^2\left(\int_{UB_i}u^{\frac{n+2}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}}\left(\int\left(\sum r_i^{-1}\chi_{B_i}\right)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{4}{n+2}}$$

$$\leqslant C_1^2\left(\int_{UB_i}u^{\frac{n+2}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}}\left(\sum r_i^{\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{4}{n+2}}\to0,$$

当 $\varepsilon\to0$. 同理证(2.12)左端第二项→0. 至此得

$$\int_{S^n}uL_{g_0}\varphi dv_{g_0}=\int_{S^n}u^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi dv_{g_0},\quad\forall\varphi\in C^\infty(S^n).$$

定理证完.

对于完备的局部保角平坦流形(M, g)，即使 $\dim(\partial M)=0$ 也不能保证 $R_g \geqslant 0$. 有下例:

取 $M=S^n\setminus\{x_i, x\}$,其中 x 是 x_i 的极限点,而 x_i 的选择如下: $\forall \alpha>0$, 作

$S_i=$ 以 x 为中心, $i^{-\alpha}$ 为半径的球面上,彼此间距离 $\geqslant i^{-\alpha-1}$ 的极大点集.

于是 $\# S_i=O(i^{n-1})$. 令 $\{x_1, x_2, \cdots\}=US_i$,则 $\forall y \in US_i, \delta(y)=\operatorname{dist}(y, \partial M) \geqslant i^{-\alpha-1}$. 为了

$$\int \delta(y)^{\frac{n-2}{2} p-n} d v_{g_0}<\infty,$$

必须且仅须

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(i^{-\alpha-1}\right)^{\frac{n-2}{2} p} i^{n-1}<\infty.$$

因此, $p>(1+\alpha)^{-1} \dfrac{2 n}{n-2}$. 按定理 2.10 与 2.17, 可见 $n \geqslant d(M) \geqslant n(1+\alpha)^{-1}$.如果选择 g 的曲率张量连同 R_g 的导数都有界,再由定理 2.12, 如果 $R_g \geqslant 0$, 则必 $d(M) \leqslant \dfrac{n}{2}$, 就产生了矛盾(当 $\alpha \rightarrow 0$).

§3. 局部保角平坦流形的嵌人

我们要找出相当大一类局部保角平坦流形，它们实际上是 S^n 中的区域. 自然的想法是考察何时这流形的和乐覆盖上的展开映射是单射.

在和乐覆盖 $\hat{M}$ 上的极小正 Green 函数 G_0 (以 $p_0 \in \hat{M}$ 为极点) 与 S^n 上的 Green 函数 H_0 (以 $q_0=\Phi(p_0)$) 的通过展开映射 $\Phi: \hat{M} \rightarrow S^n$ 的拉回 $\bar{G}_0$ 之间有紧密的联系. $\bar{G}_0=|\Phi'|^{\frac{n-2}{2}} H_0 \circ \Phi$, 满足

$$L_g \bar{G}_0=-\sum_{p \in \Phi^{-1}(q_0)}|\Phi'|^{\frac{n+2}{2}}(p) \delta_p. \tag{3.1}$$

一般来说，$G_0 \leqslant \bar{G}_0$．并且 $G_0 = \bar{G}_0$ 当且仅当 Φ 是单射。

我们先来写出(S^n, g_0)上以南极为极点的 L_{g_0} 的 Green 函数 H_0．为此，把 S^n 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$．设 $\bar{x} = (x, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$，$S^n$ 上的点满足 $x_0^2 + |x|^2 = 1$，这时

$$g_0 = dx^2 + \frac{(x \cdot dx)^2}{1 - |x|^2}, \quad \text{当 } |x| \neq 1,$$

作球极投影 Ψ：$(S^n \backslash N, g_0) \to (\mathbb{R}^n, dy^2)$，其中$N$为北极。

$y = \Psi(\bar{x}) = \dfrac{x}{1 - x_0}$，则

$$dy^2 = \frac{1}{(1 - x_0)^2} \cdot g_0,$$

或者说，$|\Psi'|^2 = \dfrac{1}{(1 - x_0)^2}$，即

$$g_0 = (1 - x_0)^2 \Psi^*(dy^2).$$

因为 $(\mathbb{R}^n, dy^2)$ 上以 0 为极点的 Δ 的 Green 函数 $E_0 = c_n |y|^{2-n}, c_n = \dfrac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}$，其中 ω_{n-1} 是 S^{n-1}的面积，所以利用 Ψ 的拉回，可以求得

$$\begin{aligned} H_0 &= |\Psi'|^{\frac{n-2}{2}} E_0 \circ \Psi \\ &= c_n (1 - x_0)^{\frac{n-2}{2}} |x|^{2-n}. \end{aligned}$$

引理 3.1. 设 Φ：$(M, g) \to (S^n, g_0)$是一个保角映射．又设 $\forall p_0 \in M$，$\bar{G}_0$ 是 S^n 上以 $\Phi(p_0)$为极点的 Green 函数H通过 Φ 的拉回，即

$$\bar{G}_0 = |\Phi'|^{\frac{n-2}{2}} H \circ \Phi,$$

则 $\tilde{g} = \bar{G}_0^{\frac{4}{n-2}} g$ 是 M 上的一个平坦度量．

证明：事实上，不妨设 $\Phi(p_0)$为南极，则

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= |\Phi'|^2 g \cdot c_n' [(1 - x_0)^2 |x|^{-4}] \circ \Phi \quad (c_n' = c_n^{\frac{4}{n-2}}) \\ &= c_n' \Phi^*(g_0) [(1 - x_0)^2 |x|^{-4}] \circ \Phi \\ &= c_n' \Phi^* [(1 - x_0)^2 |x|^{-4} \cdot (1 - x_0)^2 \Psi^*(dy^2)] \end{aligned}$$

$$= c_n' \Phi^* \circ \psi^* \left(\frac{dy^i}{|y|^4} \right)$$

$$= c_n' \Phi^* \circ \psi^* \left[\left(\frac{dy}{|y|^2} \right)^2 \right],$$

所以 $\tilde{g}$ 是平坦度量.

引理 3.2. 设 (M,g) 是完备的 Riemann 流形，又设 $\Phi: M \to S^n$ 是一个保角映射. $\forall p_0 \in M$，设 G_0 是 L_{g_0} 的以 p_0 为极点的正极小 Green 函数，$\bar{G}_0$ 是 S^n 上以 $\Phi(p_0)$ 为极点的 Green 函数通过 Φ 的拉回，满足 $\bar{G}_0 - G_0$ 在 p_0 附近有界. 令 $v = G_0/\bar{G}_0$，$\tilde{g} = \bar{G}_0^{\frac{4}{n-2}} g$，则 v 是 $\tilde{g}$ 度量下的调和函数，即

$$\Delta_{\tilde{g}} v = 0.$$

证明：注意到

$$G_0^{\frac{4}{n-2}} g = v^{\frac{4}{n-2}} \tilde{g},$$

由保角 Laplace 算子的不变性，

$$L_{\tilde{g}} v = v^{\frac{n+2}{n-2}} L_{G_0^{\frac{4}{n-2}} g} \cdot 1$$

$$= v^{\frac{n+2}{n-2}} \cdot G_0^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g G_0$$

$$= -v^{\frac{n+2}{n-2}} G_0^{-\frac{n+2}{n-2}} \delta_{p_0} = 0.$$

又因为 $\tilde{g}$ 是平坦的，所以 $R_{\tilde{g}} = 0$，即得

$$\Delta_{\tilde{g}} v = 0.$$

引理 3.3. 设 (M,g) 是完备的 Riemann 流形，$R_g \geqslant -c$，c 是一常数，又设 $\Phi: (M,g) \to (S^n, g_0)$ 是一个保角映射，则

$$\lim_{\sigma \to \infty} (\sup\{G_0(x) \mid \rho(x, p_0) \geqslant \sigma\}) = 0.$$

证明：由定理 2.10，我们已经知道，对于 p_0 的任意开邻域 $\mathcal{O}$，有

$$\int_{M \setminus \mathcal{O}} G_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_g < \infty,$$

由此可以推出

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{\{x \mid \rho(x, p_0) \geqslant \sigma\}} G_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_g = 0.$$

我们希望得到如下估计：

$$G_0(x) \leqslant C\left(\int_{B_1(x)} G_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{n-2}{2n}}, \forall x \in M \backslash B_2(p_0). \tag{3.2}$$

因为(3.2)蕴含了引理的结论．为证(3.2)，设 $R_+ = \max\{R_g, 0\}$，按定理 2.3，

$$\left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant Q(S^n)^{-1}\int_M [|\nabla\phi|^2 + c_n R_+ \phi^2] dv_g, \tag{3.3}$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(M)$．注意到 $R_g \geqslant -c$，可见

$$-c_n \cdot c G_0(x) \leqslant \Delta_g G_0(x) - c_n R_+ \cdot G_0(x), \text{ 当 } x \in B_1(p_0).$$

两边同乘以 $G_0^{p-1}\phi^2$，其中 $\phi \in C_0^\infty(M\backslash B_1(p_0))$，作分部积分给出

$$\begin{aligned}&(p-1)\int_M \phi^2 G_0^{p-2}|\nabla G_0|^2 dv_g + c_n\int_M \phi^2 R_+ G_0^p dv_g \\ &\leqslant 2\int_M \phi G_0^{p-1}|\nabla\phi||\nabla G_0| dv_g + c\cdot c_n\int_M \phi^2 G_0^p dv_g.\end{aligned} \tag{3.4}$$

假设 $p \geqslant \dfrac{2n}{n-2}$，由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}2\int_M \phi G_0^{p-1}|\nabla\phi||\nabla G_0| dv_g \leqslant\ & \alpha\int_M \phi^2 G_0^{p-2}|\nabla G_0|^2 dv_g \\ &+ \frac{1}{\alpha}\int_M |\nabla\phi|^2 G_0^p dv_g,\end{aligned} \tag{3.5}$$

令 $\alpha = p-2$，联合(3.4)与(3.5)得

$$\begin{aligned}&\int_M \left[\phi^2 G_0^{p-2}|\nabla G_0|^2 + c_n\phi^2 R_+ G_0^p\right] dv_g \\ &\leqslant \frac{1}{p-2}\int_M |\nabla\phi|^2 G_0^p dv_g + c_n c\int_M \phi^2 G_0^p dv_g,\end{aligned} \tag{3.6}$$

再令 $\alpha = 1$ 于(3.5)，联合(3.6)得

$$\begin{aligned}&2\int_M \phi G_0^{p-1}|\nabla\phi||\nabla G_0| dv_g \\ &\leqslant \frac{p-1}{p-2}\int_M |\nabla\phi|^2 G_0^p dv_g + c\cdot c_n\int_M \phi^2 G_0^p dv_g.\end{aligned}$$

因此有

$$\int_M (|\nabla(\phi G_0^{p/2})|^2 + c_n R_+ \phi^2 G_0^p) dv_g$$

$$\leqslant \int_M \Big(|\nabla\phi|^2 G_0^p + p|\nabla\phi|\,|\nabla G_0|\phi G_0^{p-1}$$

$$+ \frac{p^2}{4}\phi^2 G_0^{p-2}|\nabla G_0|^2 + c_n R_+ \phi^2 G_0^p \Big) dv_g$$

$$\leqslant c_n p^2 \int_M (|\nabla\phi|^2 + \phi^2) G_0^p dv_g. \tag{3.7}$$

再联合(3.3)与(3.7)得

$$\left[\int_M (\phi G_0^{p/2})^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right]^{\frac{n-2}{n}} \leqslant C_n' p^2 \int_M G_0^p (|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2) dv_g, \tag{3.8}$$

其中 C_n' 是与 p 无关的常数.

反复利用(3.8)，逐次迭代如下:

设 $a_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} 3^{-i}$,

$$\varphi_k(y) = \begin{cases} 1, & y \in B_{a_k}(x), \\ 0, & y \notin B_{a_{k-1}}(x), \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi_k \leqslant 1,$$

$$|\nabla\varphi_k(y)| \leqslant 2 - 3^k, \quad \varphi_k \in C_0^\infty(M),$$

以及

$$p_k = p_0 r^k, \quad r = \frac{n}{n-2}, \quad p_0 = 2r.$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$, 则由(3.8)可以推出

$$\left[\int_{B_{a_k}(x)} G_0^{p_k} dv_g \right]^{\frac{1}{p_k}} \leqslant (C_n' \cdot p_{k-1}^2)^{\frac{1}{p_{k-1}}} (4.3^{2k} + 1)^{\frac{1}{p_{k-1}}} \times \left[\int_{B_{a_{k-1}}(x)} G_0^{p_{k-1}} dv_g \right]^{\frac{1}{p_{k-1}}},$$

$k = 1, 2, \cdots$. 于是有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in B_{\frac{1}{2}}(x)} G_0(y) \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (45 c_n' p_0^2 \cdot (g r^2)^{j-1})^{\frac{1}{p_0 r^{j-1}}} \cdot \left(\int_{B_1(x)} G_0^{p_0} dv_g \right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

上式右端的无穷乘积显然是收敛的，(3.2)得证.

引理 3.4. 在引理 3.2 的假设下，有常数 $C > 0$，使得 $\forall \varphi \in$

$(C_0^\infty(M)\setminus\{p_0\})$，有不等式

$$\int_M \varphi^2|\nabla\log\bar{G}_0|^2 dv_g \leqslant C\int_M (\varphi^2|\nabla\log G_0|^2+|\nabla\varphi|^2)dv_g.$$

证明：在极点 p_0 以外，

$$\begin{aligned}\Delta\log\bar{G}_0 &= \bar{G}_0^{-1}\Delta\bar{G}_0-|\nabla\log\bar{G}_0|^2\\ &= c_nR_g-|\nabla\log\bar{G}_0|^2\\ &= G_0^{-1}\Delta G_0-|\nabla\log\bar{G}_0|^2\\ &= \Delta\log G_0+|\nabla\log G_0|^2-|\nabla\log\bar{G}_0|^2. \end{aligned}\quad(3.9)$$

对任意 $\varphi\in C_0^\infty(M\setminus\{p_0\})$，用 φ^2 同乘(3.9)两边，并作分部积分，有

$$\int_M \varphi^2|\nabla\log\bar{G}_0|^2dv_g \leqslant \int_M \varphi^2|\nabla\log G_0|^2dv_g + 2\int_M \varphi\nabla\varphi\cdot\nabla(\log\bar{G}_0-\log G_0)dv_g.$$

用 Schwarz 不等式，有常数 $C>0$ 使得

$$\int_M \varphi^2|\nabla\log\bar{G}_0|^2dv_g \leqslant C\int_M[\varphi^2|\nabla\log G_0|^2+|\nabla\varphi|^2]dv_g. \quad(3.10)$$

现在我们来证明本节的主要定理。

定理 3.5. 设(M^n,g)是完备 Riemann 流形，又设 $\Phi: M\to S^n$ 是一保角映射．假设 $d(M)<\frac{(n-2)^2}{n}$。又

当 $n\geqslant 5$ 时，设 $R_g\geqslant -c$（c 是一正常数），

当 $n=3,4$ 时，设 $|R_g|\leqslant c$；

则Φ是单射，并且 $C_2(\partial\Phi(M))=0$，即 $\partial\Phi(M)$有 0 牛顿容度．

证明：用引理 3.1，3.2 的记号，只需证：$v=G_0/\bar{G}_0\equiv 1$．

1°建立估计式：设 $\alpha=\frac{2(n-2)}{n}$，$\varphi\in C_0^\infty(M)$，则

$$\int_M \varphi^2|\bar{\nabla}v|^{\alpha-2}|\bar{\nabla}|\bar{\nabla}v||^2dv_{\bar{g}} \leqslant C\int_M |\bar{\nabla}\varphi|^2\bar{G}_0^\alpha|\bar{\nabla}v|^\alpha dv_{\bar{g}}, \quad(3.11)$$

其中$\bar{\nabla}$表示度量 $\bar{g}$ 下的梯度，C 是一个常数．

先对 $|\bar{\nabla}v|^2$ 作 $\bar{\Delta}(=\Delta_{\bar{g}})$，应用 Bochner 公式，由于 $\bar{g}$ 是平坦

度量，且 $\Delta v=0$，便有

$$\Delta|\nabla v|^2=2|\nabla\nabla v|^2. \tag{3.12}$$

注意到(参看第一章(1.3.5)式)

$$|\nabla\nabla v|^2\geqslant\frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2,$$

从(3.12)得 $\forall$ 实数 α，

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla v|^\alpha=&\frac{\alpha}{2}|\nabla v|^{\alpha-2}\Delta|\nabla v|^2+\\&+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)|\nabla v|^{\alpha-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2\\\geqslant&\alpha\left(\frac{n}{n-1}+\alpha-2\right)|\nabla v|^{\alpha-2}|\nabla|\nabla v||^2.\end{aligned}$$

取 $\alpha>\dfrac{n-2}{n-1}$，便有 $C_\alpha>0$ 常数，满足

$$\Delta|\nabla v|^\alpha\geqslant C_\alpha|\nabla v|^{\alpha-2}|\nabla|\nabla v||^2.$$

先对 $\phi\in C_0^\infty(M\backslash\{p_0\})$ 建立(3.11)式. 为此，以 ϕ^2 乘上式两端，并作分部积分，

$$\begin{aligned}&\int_M\phi^2|\nabla|\nabla v||^2\cdot|\nabla v|^{\alpha-2}dv_{\tilde{g}}\\&\leqslant C_\alpha^{-1}\int_M\phi^2\Delta|\nabla v|^\alpha dv_{\tilde{g}}\\&\leqslant 2\alpha C_\alpha^{-1}\int_M|\phi||\nabla\phi||\nabla v|^{\alpha-1}|\nabla|\nabla v||dv_{\tilde{g}},\end{aligned}$$

应用 Schwarz 不等式，有常数 $C'_\alpha>0$，

$$\begin{aligned}&\int_M\phi^2|\nabla|\nabla v||^2|\nabla v|^{\alpha-2}dv_{\tilde{g}}\\&\leqslant C'_\alpha\int_M|\nabla\phi|^2|\nabla v|^\alpha dv_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

再把不等式右端化到度量 g，取 $\alpha=\dfrac{2(n-2)}{n}$ (当 $n\geqslant3$，适合 $\alpha>\dfrac{n-2}{n-1}$)，有

$$\int_M\phi^2|\nabla|\nabla v||^2|\nabla v|^{\alpha-2}dv_{\tilde{g}}$$

$$\leqslant C_2' \int_M |\nabla\phi|^2 |\nabla v|^\alpha \bar{G}_0^\alpha dv_g,$$

即为(3.11).

再把 ϕ 的限制去掉. 选择 ϕ 是在 p_0 附近为 0 的 C^∞ 函数，满足 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$,而现在设 $\varphi \in C_0^\infty(M)$. 用 $\phi \cdot \varphi$ 代 ϕ 便有

$$\int_M \phi^2\varphi^2 |\nabla|\nabla v||^2 |\nabla v|^{\alpha-2} dv_g$$
$$\leqslant C_\alpha' \int_M |\nabla\phi|^2 |\nabla v|^\alpha \bar{G}_0^{-\alpha} dv_g$$
$$+ C_\alpha'' \int_M \varphi^2 |\nabla\phi|^2 |\nabla v|^\alpha \bar{G}_0^\alpha dv_g.$$

因为

$$\left.\begin{aligned} |\nabla v|(x) &= O(\rho(x)^{n-3}), \\ \bar{G}_0(x) &= O(\rho(x)^{2-n}), \end{aligned}\right. \quad \text{当 } x \to p_0,$$

其中 $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, p_0)$, 测地距离，所以若取

$$\phi_r(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_r(p_0), \\ 1, & x \notin B_{2r}(p_0), \end{cases}$$
$$|\nabla\phi_r| \leqslant 2 \cdot r^{-1},\ 0 \leqslant \phi_r \leqslant 1.$$

其中 $r > 0$ 是任意实数，便有

$$\int_M \varphi^2 |\nabla\phi_r|^2 |\nabla v|^\alpha \bar{G}_0^\alpha dv_g = O(r^{n-2-\alpha}) \to 0,$$

当 $r \to 0$. 于是(3.11)得证.

2°建立估计式:

$$\int_{B_{\frac{\sigma}{2}}(p_0)} |\nabla v|^{\alpha-2} |\nabla|\nabla v||^2 dv_g$$
$$\leqslant C_\alpha \sigma^{-2} \int_{B_{2\sigma}(p_0)\setminus B_{\frac{\sigma}{4}}(p_0)} G_0^\alpha (1 + |\nabla \log G_0|^2) dv_g \qquad (3.13)$$

对足够大的 $\sigma > 0$, 其中 C_α 是一常数.

利用(3.11), 注意到

$$\bar{G}_0^\alpha |\nabla v|^\alpha = |\nabla G_0 - G_0 \bar{G}_0^{-1} \nabla \bar{G}_0|^\alpha$$
$$\leqslant C_\alpha(|\nabla G_0|^\alpha + G_0^\alpha |\nabla \log \bar{G}_0|^\alpha),$$

其中 $C_\alpha > 0$ 是一常数. 取 $\varphi \in C_0^\infty(M)$适合

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in B_{\sigma/2}(p_0),\\ 0, & x\notin B_\sigma(p_0),\end{cases}$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 1,\quad |\nabla\varphi|\leqslant 4\sigma^{-1},$$

则(3.11)右端受

$$16C_\alpha\sigma^{-2}\int_{B_\sigma\setminus B_{\sigma/2}}(|\nabla G_0|^\alpha+G_0^\alpha|\nabla\log\overline{G}_0|^\alpha)dv_g$$

所控制．又因为 $\alpha\leqslant 2$，所以

$$|\nabla G_0|^\alpha\leqslant C_\alpha(G_0^\alpha+G_0^{\alpha-2}|\nabla G_0|^2)$$
$$=C_\alpha G_0^\alpha(1+|\nabla\log G_0|^2).$$

同理，

$$|\nabla\log\overline{G}_0|^\alpha\leqslant 1+|\nabla\log\overline{G}_0|^2.$$

代入(3.11)后，得

$$\int_{B_{\sigma/2}(p_0)}|\nabla v|^{\alpha-2}|\nabla|\nabla v||^2dv_g$$

$$\leqslant C_\alpha\sigma^{-2}\int_{B_\sigma\setminus B_{\sigma/2}}G_0^\alpha(1+|\nabla\log G_0|^2+|\nabla\log\overline{G}_0|^2)dv_g.$$

为了得到(3.13)，我们将利用引理 3.4．设 $\phi\in C_0^\infty(M\setminus\{p_0\})$ 并用 $G_0^{\alpha/2}\phi$ 代替 φ，应用引理 3.4，

$$\int_M\phi^2G_0^\alpha|\nabla\log\overline{G}_0|^2dv_g$$

$$\leqslant C\int_M(\phi^2G_0^\alpha|\nabla\log G_0|^2+|\nabla(G_0^{\alpha/2}\phi)|^2)dv_g,$$

再由 Schwarz 不等式，上式右端小于或等于

$$C\int_M(\phi^2|\nabla\log G_0|^2+|\nabla\phi|^2)G_0^\alpha dv_g.$$

现在取 $\phi\in C_0^\infty(M)$满足:

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x\in B_\sigma(p_0)\setminus B_{\sigma/2}(p_0),\\ 0, & x\in B_{\frac{\sigma}{4}}(p_0)\cup(M\setminus B_{2\sigma}(p_0)),\end{cases}$$

$$0\leqslant\phi\leqslant 1,\quad |\nabla\phi|\leqslant 1,\text{ 当 }\sigma>0\text{ 足够大．}$$

遂得

$$\int_{B_{\frac{\sigma}{2}}(p_0)}|\nabla v|^{\alpha-2}|\nabla|\nabla v||^2dv_g$$

$$\leqslant C_\alpha\sigma^{-2}\int_{B_{2\sigma}(p_0)\setminus B_{\frac{\sigma}{4}}(p_0)}G_0^\alpha(1+|\nabla\log G_0|^2)dv_g,$$

即是 (3.13)。

3°现在利用曲率 R_g 的条件导出估计:

$$\int_{B_{\frac{\sigma}{2}}(p_0)} |\bar{\nabla} v|^{\alpha-2} |\bar{\nabla}|\bar{\nabla} v||^2 dv_{\bar{g}}$$

$$\leqslant C_\alpha \sigma^{-2} \int_{M \setminus B_{\frac{\sigma}{8}}(p_0)} G_0^{\alpha_1} dv_g, \tag{3.14}$$

其中当 $n \neq 4$ 时, $\alpha_1 = \alpha = \frac{2(n-2)}{n}$, 而当 $n = 4$ 时, $\alpha_1 < 1$.

分三种情形验证.

(a) $n \geqslant 5$. 这时 $\alpha > 1$. 利用 $R_g \geqslant -c$, 可见在$B_{\frac{\sigma}{2}}(p_0)$外,

$$\Delta G \geqslant -c_n C G_0,$$

同乘以 $\phi^2 G_0^{\alpha-1}$ 作分部积分, $\phi \in C_0^\infty(M)$, 得

$$\int_M G_0^{\alpha-2} |\nabla G_0|^2 \phi^2 dv_g \leqslant c_n C \int_M G_0^\alpha (|\nabla\phi|^2 + \phi^2) dv_g,$$

适当选取截断函数 ϕ,利用(3.13), 立得(3.14).

(b) $n = 3$. 这时 $\alpha = \frac{2}{3}$. 因设 $|R_g| \leqslant C$, 故有

$$\Delta G_0 \leqslant c_n C G_0, \quad 于\ B_{\sigma/8}(p_0)之外.$$

同乘以 $\phi^2 G_0^{\alpha-1}$ 作分部积分,又有

$$(1-\alpha)\int_M \phi^2 G_0^{\alpha-2} |\nabla G_0|^2 dv_g \leqslant 2\int_M \phi G_0^{\alpha-1} |\nabla\phi| \, |\Delta G_0| dv_g$$

$$+ c_n c \int G_0^\alpha \phi^2 dv_g, \tag{3.15}$$

同理,得(3.14).

(c) $n = 4$. 这时 $\alpha = 1$, 于是不能直接利用 (3.15) 来估得 (3.14). 但任选 $\alpha_1 < 1$, 应用引理 3.3, 我们知道 G_0 在 $M \setminus B_1(p_0)$ 上是有界的. 因此(3.13)的右端,当以 α_1 代 α 时, 仍成立. 这时, 在(3.15)中,若用 α_1 易 α, 即得出(3.13)右端的估计,为(3.14).

4°现在推证 $v \equiv 1$.

因设 $p(M) = \frac{2}{n-2} d(M) < \frac{2(n-2)}{n} = \alpha$,故有 $p_i \downarrow p(M)$ 使得 $\int_{M \setminus B_1(p_0)} G_0^{p_i} dv_g < \infty$. 取 i 充分大,以致 $p_i < \alpha$, 再应用引理

3.3，即得

$$\int_{M\setminus B_1(p_0)} G_0^{\alpha} dv_g \leqslant C^{\alpha-p_i} \int_{M\setminus B_1(p_0)} G_0^{p_i} dv_g < \infty, \qquad (3.16)$$

其中 C 是 G_0 在 $M\setminus B_1(p_0)$ 上的上界．联合(3.14)与(3.16)即得

$$|\nabla v| = \text{const}.$$

但因

$$|\nabla v|(p_0) = \bar{G}_0^{-1}|\nabla G_0 - v\nabla \bar{G}_0|(p_0) = 0,$$

从而 $\nabla v = 0$，即 $v = \text{const}$．又因为 $v(p_0) = 1$，所以 $v \equiv 1$．于是 Φ 是单射．

5°最后证：$C_2(\partial\Phi(M)) = 0$．

这是定理 2.16 的直接推论．

如果对数量曲率 R_g 的限制加强到 $R_g \geqslant 0$，那么定理 3.5 中的限制 $d(M) \leqslant \frac{(n-2)^2}{n}$ 就可以去掉．这要用到正质量定理．

回顾引理 3.2，S^n 上以北极 N 为极点的 Green 函数 $H_0 = c_n(1+x_0)^{\frac{n-2}{2}}|x|^{2-n} = c_n(1-x_0)^{-\frac{n-2}{2}}$．若令 $\bar{g} = H^{\frac{4}{n-2}} \cdot g_0$，其中 g_0 是 S^n 上的标准度量，则 $\bar{g} = c_n^{\frac{4}{n-2}}(1-x_0)^{-2}g_0 = c_n^{\frac{4}{n-2}} \cdot \psi^*(dy^2)$，其中 ψ 是 $S^n\setminus N \to \mathbf{R}^n$ 的球极投影．

现在把球极投影的概念推广到完备 Riemann 流形．设 $p_0 \in M$，又设存在着以 p_0 为极点的 L_g 的极小正 Green 函数 G_0．在 $M_1 = M\setminus\{p_0\}$ 上，引入度量

$$\hat{g} = G_0^{\frac{4}{n-2}} g,$$

则 $(M_1, \hat{g})$ 连同自然映射 Φ: $M\setminus\{p_0\} \to M_1$ 称为 M 关于 p_0 的球极投影．

为了说明这种球极投影，我们引入

定义 3.6．（渐近平坦末端）设 (M^n, g) 是一个 Riemann 流形，$\tau > 0$．如果存在分解 $M^n = M_0 \cup M_\infty$，以及微分同胚 $M_\infty \approx \mathbf{R}^n\setminus B_R$，其中 $R > 0$，B_R 是中心在原点的半径为 R 的球，满足

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(\rho^{-\tau}),$$

$$\partial g_{ij} = O(\rho^{-\tau-1}),$$

$$\partial\partial g_{ij} = O(\rho^{-\tau-2}),$$

当 $\rho = |x| \to \infty$ 时，其中 x 是按上述同胚诱导的 M_∞上的坐标；那么我们称 M_∞ 为(M, g)的一个 τ 阶渐近平坦末端.

设(M, g)是一个紧流形，$R_g \geqslant 0$，则 $\forall p_0 \in M$，有 Green 函数 G_0 存在，且在局部坐标下(p_0 对应 $x = 0$)

$$G_0(x) = A|x|^{2-n} + B + O(|x|^{1-n}),$$

于是取 g 的标准坐标系可使

$$\bar{g}_{ij}(x) = (B + A|x|^{2-n} + O(|x|^{1-n}))\delta_{ij},$$

再作反演变换

$$\hat{g}_{ij} = (A + B|y|^{2-n} + O(|y|^{1-n}))\delta_{ij},$$

并且

$$\partial\hat{g}_{ij}, \ \partial\partial\hat{g}_{ij}$$

也满足相应渐近展开式。因此$(M_1, \hat{g})$有一个 $n-2$ 阶渐近平坦末端。

设(M, g)是一个局部保角平坦的 Riemann 流形，设 $\hat{M}$ 是它的和乐覆盖。因此 $\forall p_0 \in \hat{M}$，有极小正 Green 函数 G_0，以及 S^n 上相应 Green 函数在展开映射下的拉回. 按引理 3.1，$\bar{g} = \bar{G}_0^{\frac{4}{n-2}} g$ 是平坦度量。记$\hat{g} = \bar{G}_0^{\frac{4}{n-2}} g$，按引理 3.2，$\hat{g} = G_0^{\frac{4}{n-2}} \bar{g}$，并且 v 是 $\bar{g}$ 调和函数：$\Delta_{\bar{g}} v = 0$. 事实上，取 p_0 的一个局部领域 $\mathcal{O}$，使 Φ: $O \to S^n$ 是保角同胚，则 $\Phi(0)$在球极投影 ϕ 下成为渐近平坦末端 $\mathcal{O}$ 的坐标。事实上，记

$$v(p) = h(y), \ y = \frac{x}{|x|^2}, \ x = \phi \cdot \Phi(p),$$

则因 $v(p_0) = 1$，以及 $h(y)$是一大球外之调和函数，可见 $h(y) \to 1$ 当 $|y| \to \infty$，从而

$$h(y) = 1 + E(p_0)|y|^{2-n} + O(|y|^{1-n}), \qquad (3.17)$$

以及 $\hat{g}$ 在此坐标下有表示

$$\hat{g}_{ij} = 1 + E(p_0)|y|^{2-n} + O(|y|^{1-n})\delta_{ij}.$$

同理，$\partial\hat{g}_{ij}$，$\partial\partial\hat{g}_{ij}$ 也满足相应渐近式。

正质量定理陈述如下：

定理 (Shoen-Yau 正质量定理)．设(M^n, g)是一个完备的 Riemann 流形，$R_g \geq 0$．又设 M^n 有一个渐近平坦的末端 M_∞，在此 M_∞ 上按渐近坐标

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{C}{|x|^{n-2}}\right)\delta_{ij} + O(|x|^{1-n}),$$

则必有 $C \geq 0$．

我们把 g_{ij} 的展开式中的系数 C 称为质量．

应用正质量定理，我们来证：h 的渐近展开式中 $E(p_0) \geq 0$．

现在的问题是 $M_1 = M\backslash\{p_0\}$，按度量 $\hat{g} = G_0^{\frac{4}{n-2}} g$ 未必是完备的．然而有

引理 3.7. 设 (M, g) 是一个完备的局部保角平坦的 Riemann 流形，$R_g \geq 0$．倘若有 $p_0 \in M$，存在以 p_0 为极点的 L_g 的最小正 Green 函数 G_0；则 $E(p_0) \geq 0$．

证明：$\forall \varepsilon > 0$，度量 $\tilde{g} = (G_0 + \varepsilon)^{\frac{4}{n-2}} g$ 是 $M_1 = M\backslash\{p_0\}$ 上的完备度量．由设 $R_g \geq 0$ 以及等式

$$\begin{aligned} -c_n R_{\tilde{g}} &= (G_0 + \varepsilon)^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(G_0 + \varepsilon) \\ &= -(G_0 + \varepsilon)^{-\frac{n+2}{n-2}} c_n \varepsilon R_g, \end{aligned}$$

可见 $R_{\tilde{g}} \geq 0$．现在由于

$$\tilde{g}_{ij} = \left(1 + \frac{E(p_0) + \varepsilon}{|x|^{n-2}}\right)\delta_{ij} + O(|x|^{1-n}),$$

应用正质量定理，

$$E(p_0) + \varepsilon \geq 0.$$

又因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故有 $E(p_0) \geq 0$．

定理 3.8. 设(M, g)是一个完备的 Riemann 流形，$R_g \geq 0$，又设 $\Phi: M \to S^n$ 是一保角变换；则 Φ 是一单射，并且 $c_1(\partial\Phi(M)) = 0$．

证明：和定理 3.5 证明一样，要证：$G_0 = \bar{G}_0$．其中 G_0 是以 $p_0 \in M$ 为极点的 L_g 的极小正 Green 函数，而 $\bar{G}_0$ 是相应的球上 Green 函数之拉回．记 $\hat{g} = G_0^{\frac{4}{n-2}} g$，$\bar{g} = \bar{G}_0^{\frac{4}{n-2}} g$，则 $\hat{g} = (\varphi_1 \circ$

$\Phi)^*(h^{\frac{4}{n-2}}dy^2)$，$g=(\Psi_1\circ\Phi)^*(dy^2)$，其中 Φ_1 是球极投影与反演变换之复合．由于 $0<v\leqslant 1$，所以 $0<h\leqslant 1$．要证：$h\equiv 1$．

反证：倘若 $h\not\equiv 1$，则因 h 是调和函数，有渐近展开式(3.17)，故 $h<1$ 于一大球 B_σ 之外，$\sigma>0$．选择 $\delta>0$ 使 $|1-h(y)|_{\partial B_\sigma}\geqslant\delta>0$．又因为 $1-h$ 是正调和函数，由极大值原理，

$$1-h(y)\geqslant\delta\left|\frac{y}{\sigma}\right|^{2-n}，当 |y|\geqslant\sigma,$$

从而有

$$E(p_0)\leqslant-\delta\sigma^{n-2}.$$

这与 $E(p_0)\geqslant 0$ 矛盾．

同理，由 $G_0=\overline{G}_0$ 推出 $c_2(\partial\Phi(M))=0$．

对于不单连通的流形，我们可以了解到覆盖空间的质量与底空间质量的关系．

定理 3.9. 设 $\pi: M_1\to M$ 是一个非平凡的覆盖映射．(M,g) 是一个局部保角平坦的 Riemann 流形．又设 $\forall p_0\in M$，存在以 p_0 为极点的 L_g 的极小正 Green 函数；则 $\forall p\in M_1$，M 和 M_1 的质量函数 $E(p)$ 与 $E_1(p)$ 满足不等式．

$$E_1(p)<E(\pi(p)).$$

证明：证明同上．

§4. 局部保角平坦流形的拓扑性质

本节讨论局部保角平坦流形的拓扑性质．

4.1．基本群

下述群的可依性(amenable)概念用来区别局部保角平坦流形的基本群．

定义 4.1. 设 G 是一个可数生成的离散群．称 G 是可依的，如果 $L^\infty(G)$ 上有有界线性泛函 μ 满足：

(1) $\inf\limits_{g\in G} f(g)\leqslant\mu(f)\leqslant\sup\limits_{g\in G} f(g)$，$\forall f\in L^\infty(G)$，

(2) $\forall g\in G$，$\mu(g\circ f)=\mu(f)$，其中 $g\circ f(x)=f(g^{-1}x)$．

按定义，任意有限群总是可依的，因为可以取

$$\mu(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g).$$

Fφlner 曾给出G成为可依群的一个充要条件：$\forall k\in(0,1)$，$\forall a_1,\cdots,a_n\in G$，$\exists$有穷子集 $E\subset G$使得 $\#(E\cap a_iE)\geqslant k\# E$，其中$\#(\cdots)$表示子集中元素的个数．

由此可见，由两个以上生成元构成的自由群不是可依的．

定理(Brooks)．设(M,g)是一个紧 Riemann 流形，又设$(\widetilde{M},\tilde{g})$是$(M,g)$的万有覆盖；则为了$\pi_1(M)$是可依的必须且仅须 0 是$\Delta_{\tilde{g}}$在$L^2(\widetilde{M})$上的一个谱点．

利用 Brooks 的结果，我们有

定理 4.2. 设(M,g)是一个保角平坦的 Riemann 流形．又设$R_g\leqslant -a<0$，其中a是一常数，则$-\Delta_{\tilde{g}}$的第一本征值$\lambda_0>0$．

此外，$\exists\delta>0$使得$\forall p_0\in M$，$\forall r>2\exists$常数$C(\delta,p_0)$使得

$$\mathrm{Vol}(B_r(p_0))\geqslant C(\delta,p_0)e^{\delta r}.$$

如果M还是紧的，那么$\pi_1(M)$是不可依的．

证明：按推论 2.5，$Q(\widetilde{M})=Q(S^n)>0$．而

$$\lambda_0=\inf_{\varphi\in C_0^\infty(\widetilde{M})}\frac{-\int\varphi\Delta_{\tilde{g}}\varphi dv_{\tilde{g}}}{\int\varphi^2dv_{\tilde{g}}}$$

$$=\inf_{\varphi\in C_0^\infty(\widetilde{M})}\left[\frac{-\int_{\widetilde{M}}\varphi L_{\tilde{g}}\varphi dv_{\tilde{g}}}{\int_{\widetilde{M}}\varphi^2dv_{\tilde{g}}}+\frac{c_n\int_{\widetilde{M}}R_{\tilde{g}}\varphi^2dv_{\tilde{g}}}{\int_{\widetilde{M}}\varphi^2dv_{\tilde{g}}}\right]$$

$$\geqslant\inf_{\varphi\in C_0^\infty(\widetilde{M})}\frac{\left(\int_{\widetilde{M}}|\varphi|^{\frac{2n}{n-2}}dv_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{\int\varphi^2dv_{\tilde{g}}}\cdot Q(\widetilde{M})+c_n\cdot a$$

$$\geqslant c_na>0.$$

直接应用 Brooks 定理，即得最后结论．

为得体积估计，选取函数列$\varphi_k\in C_0^\infty(\widetilde{M})$满足：

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}1, & x\in B_k(p_0),\\ 0, & x\notin B_{k+1}(p_0),\end{cases}$$

$$|\nabla\varphi_k|\leqslant 2,\quad 0\leqslant\varphi_k\leqslant 1,$$

则若记 $V_k=\mathrm{Vol}(B_k(p_0))$，便有

$$\begin{aligned}V_{k+1}-V_k&\geqslant 4\int_{\bar{M}}|\nabla\varphi_k|^2 dv_g\\&\geqslant 4c_n a\int_{\bar{M}}\varphi_k^2 dv_g\\&\geqslant 4c_n a V_k,\end{aligned}$$

$k=1,2,\cdots$. 记 $c=c_n a$，又有

$$V_{k+1}\geqslant(1+4c)^k V_1.$$

令 $\delta=\log(1+4c)$，$C(\delta,p_0)=(1+4c)^{-2}V_1$，则当 $r\geqslant 2$ 时，有

$$V_r\geqslant C(\delta,p_0)e^{\delta r}.$$

以下仿 Riemann 面的研究引入 Klein 群的定义. 设 $\Gamma\subset\mathrm{Conf}(S^n)$ 是一子群，$\forall p_0\in S^n$，称 Γ 在 p_0 是真不连续的（properly continuous）如果

（1） Γ 在 p_0 处之迷向子群 $\Gamma_{p_0}=\{g\in\Gamma\,|\,g(p_0)=p_0\}$ 是有限的，

（2） 存在 p_0 的一个邻域 U 使得

$$g(U)=U,\ \forall g\in\Gamma_{p_0},$$
$$g(U)\cap U=\varnothing,\ \forall g\in\Gamma\setminus\Gamma_{p_0}.$$

（3） $\forall x,y\in S^n$，不在同一 Γ 轨道上，则必有 x，y 的邻域 U 与 V 使得 $U\cap\Gamma V=\varnothing$.

我们把 $\Omega(\Gamma)=\{p\in S^n\,|\,\Gamma$ 在 p 是真不连续的$\}$ 称为 Γ 的不连续区域.

易见 $\Omega(\Gamma)$ 是一个 Γ 不变的开集.

定义 4.3. 设 Γ 是 $\mathrm{Conf}(S^n)$ 的一个子群，满足：$\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$，那么我们称 Γ 为 Klein 群.

按定义，不难证明：每个 Klein 群必是至多可数群，并且是离散群.

记 $\Lambda(\Gamma)=\{p\in S^n\,|\,\exists g_m\in\Gamma,\ \exists q\in S^n$ 使得 $g_m q\to p\}$，称其为 Γ 的极限集. 它是 Γ 的极小闭不变子集. $\#\Lambda(\Gamma)\leqslant 2$ 的 Klein 群称为初等群.

Kalkarni 与 Kamishima 证明了：若Γ是 Klein 群，则Γ在$S^n\setminus\cap(\Gamma)$上的作用是真不连续的．

从而$\Omega(\Gamma)=S^n\setminus\Lambda(\Gamma)$．

如果Γ在$\Omega(\Gamma)$上还没有不动点，那么$\Omega(\Gamma)/\Gamma=M$便是一个局部保角平坦的流形．事实上，有一大类局部保角平坦流形正是通过 Klein 群按上述方式实现的．

为证此，我们再推广基本区域的概念．

定义 4.4. 设Γ是一个 Klein 群．$\Omega(\Gamma)$是它的不连续区域．设$D\subset\Omega(\Gamma)$是一个相对于$\Omega(\Gamma)$开的子集，满足：

(1) $\forall P\in\Omega(\Gamma)$，至少有一个 $g\in\Gamma$ 使得 $g(p)\in\overline{D}$，

(2) $\forall p\in\Omega(\Gamma)$，至多有一个$g\in\Gamma$使得$g(p)\in D$，则称$D$是$\Gamma$的一个基本区域．

由定义可见，

$$\Omega(\Gamma)=\bigcup_{g\in\Gamma}g(\overline{D}),$$

$$g(D)\cap g'(D)=\varnothing,\ \text{当}\ g,g'\in\Gamma,\ \text{但}\ g\neq g'.$$

定理 4.5. 设(M,g)是一个完备的局部保角平坦流形，则在以下两种情况之一：

(1) 当$n\geqslant5$时，R_g有下界，而当$n=3,4$时$|R_g|$有界；且设 $d(M)\leqslant\frac{(n-2)^2}{n}$，

(2) $R_g\geqslant0$，

我们都有和乐同态 $\rho:\ \pi_1(M)\to\mathrm{Conf}(S^n)$ 是单射，并且和乐群$\rho\pi_1(M)$是$\mathrm{Conf}(S^n)$的离散子群．

特别地，如又设M是紧的，则$\Omega=\Phi(\widetilde{M})$是$\rho\pi_1(M)$的不连续区域，并且$M=\Omega/\rho\pi_1(M)$．

证明：直接应用定理 3.5 与 3.8 于M的万有覆盖空间$\widetilde{M}$，则展开映射$\Phi:\widetilde{M}\to S^n$是单射．这表明和乐覆盖$\hat{M}=\widetilde{M}$，从而和乐表示$\rho$也是单射．注意到$\Gamma=\rho\pi_1(M)$在$\Omega=\Phi(\widetilde{M})$上的作用是真不连续的，这是因为覆盖变换群$D\cong\pi_1(M)$作为$\widetilde{M}\to\widetilde{M}$上的

变换群是真不连续的，而且有

$$\Phi\circ\gamma = \rho(\gamma)\circ\Phi, \quad \forall\gamma\in\pi_1(M).$$

于是 Γ 是 Klein 群，从而是离散的.

现在设 M 是紧的，要证 $\Omega = \Omega(\Gamma)$.

一方面 $\partial\Omega \triangleq S^n\setminus\Omega$ 在 Γ 的作用下是闭的不变子集，得知 $\Lambda(\Gamma)\subset\partial\Omega$，从而 $\Omega(\Gamma)\supset\Omega$.

另一方面，$\forall x\in\partial\Omega$，由于 M 是紧的，所以 x 的任意邻域必与 Γ 的一个紧基本区域 F 的无穷多个平移相交. 因此必有 $x\in\Lambda(\Gamma)$，从而 $\Lambda(\Gamma)\supset\partial\Omega$，即得 $\Omega = \Omega(\Gamma)$.

对于 Klein 群 Γ，我们引入 Poincaré 级数

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma'|^{\delta}, \quad \delta > 0,$$

并定义

$$\delta(\Gamma) = \inf\left\{\delta \,\Big|\, \sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma'|^{\delta} < \infty\right\}.$$

Patterson 与 Sullivan 曾证明 $\delta(\Gamma)$与 $\Lambda(\Gamma)$的维数 $d(\Lambda) = \dim\Lambda(\Gamma)$之间有如下联系：

定理 (Patterson Sullivan). 设 Γ 不是初等的 Klein 群，则

$$\delta(\Gamma) = d(\Lambda).$$

利用这个结果可得

定理 4.6. 设(M,g)是一个紧的局部保角平坦流形，并且 Φ: $\widetilde{M}\to S^n$ 是单射. 如果 $\Gamma = \rho\pi_1(M)$不是初等的，那么 $d(M) = d(\Lambda)$.

证明：只需证：$d(M) = \delta(\Gamma)$. 设 $p > 0$ 使得

$$\int_{\widetilde{M}\setminus\mathcal{O}} G_0^p dv_g < \infty,$$

其中 $\mathcal{O}$ 是 $p_0\in M$ 的一个开邻域，设 F 是 Γ 的一个紧基本区域，$\mathcal{O}\subset F$，则

$$\sum_{\gamma\in\Gamma,\,\gamma\neq 1}\int_F G_0^p(\gamma_x)dv_g < \infty, \tag{4.1}$$

但因 γ 在 $\widetilde{M}$ 上的作用是等距的，所以 $G_0(\gamma_x) = G_{\gamma^{-1}_0}(x)$. 又因为 F 是紧集，由 Harnack 不等式，有常数 $C > 0$ 使得

$$\max_F G_{\gamma^{-1}0} \leqslant C \inf_F G_{\gamma^{-1}0}, \text{ 当 } \gamma \neq 1.$$

这使(4.1)等价于

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1} G^p_{\gamma^{-1}0}(x) < \infty, \ \forall x \in F.$$

因为 $G_0(x) = u(x)^{-1}\overline{G}_0(x)$，其中 $\overline{G}_0$ 是 L_{g_0} 在 S^n 上的以 p_0 为极点的 Green 函数，所以(4.1)又等价于

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1} u^{-p}(\gamma_0) < \infty.$$

然而 u 的变换规则是:

$$u(x) = |\gamma'|^{\frac{n-2}{2}} u_0\gamma(x), \ \forall \gamma \in \Gamma,$$

于是(4.1)等价于 Poincaré 级数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'|^{\frac{n-2}{2}p} < \infty.$$

这就是 $\delta(\Gamma) = d(M)$.

定理 4.7. 设 Γ 是一个 Klein 群，有不连续区域 Ω. 设 $M = \Omega/\Gamma$ 是紧的，则为了存在 M 上保角相容的度量 g 使得 $R_g \geqslant 0$ 必须且仅须: $d(\Lambda) \leqslant \frac{n-2}{2}$.

证明: 1°设 $R_g \geqslant 0$. 按定理 3.7，$d(\Lambda) \leqslant d(M)$. 若 $\lambda_0(\widetilde{M}) > 0$，则由定理 2.12，$d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}$. 而若 $\lambda_0(\widetilde{M}) = 0$，则由定理 (Brooks)，$\pi_1(M)$ 是可依的，因此 $\Gamma \cong \pi_1(M)$ 不能含有非交换的自由群. 从而必是初等的. 这时 $\# \Lambda(\Gamma) \leqslant 2$，所以 $d(\Lambda) = 0 < \frac{n-2}{2}$.

2°反之，设 $d(\Lambda) \leqslant \frac{n-2}{2}$. 要证存在保角相容的度量 g 使得 $R_g \geqslant 0$.

因为 M 是紧的，所以按定理 2.1，有保角平坦的度量 g 使 $R_g \geqslant 0$ 或 $R_g < 0$ 于 M.

倘若是后者，必有 $R_0 > 0$ 使 $R_g \leqslant -R_0$. 设 $p_0 \in \Omega$，G_0 是以

p_0为极点的 L_g 的正极小 Green 函数，又设 $\mathscr{O}$ 是 p_0 的一个紧邻域，则在 $\Omega\backslash\mathscr{O}$ 上

$$\Delta G_0 \leqslant -R_0 G_0.$$

设 $\delta > 0$，则有

$$\Delta G_0^{1+\delta} \leqslant -(1+\delta)R_0 G_0^{1+\delta} + \delta(1+\delta)G_0^{-1+\delta}|\nabla G_0|^2.$$

用梯度估计，$|\nabla G_0|^2 \leqslant C G_0^2$，并取 $\delta > 0$ 足够小，得

$$\Delta G_0^{1+\delta} \leqslant -C G_0^{1+\delta}, \text{ 于 } \Omega\backslash\mathscr{O}, \tag{4.2}$$

C 是常数。我们要证：

$$\int_{\Omega\backslash\mathscr{O}} G_0^{1+\delta} dv_g = \infty. \tag{4.3}$$

因为由此联同引理 3.3，可得

$$\int_{\Omega\backslash\mathscr{O}} G_0 dv_g = \infty,$$

所以得到

$$d(M) > \frac{n-2}{2}.$$

当 Γ 不是初等群时，由定理 4.6，有 $d(\Lambda) = d(M) > \dfrac{n-2}{2}$，便与假设矛盾.

假定(4.3)不对，即有

$$\int_{\Omega\backslash\mathscr{O}} G_0^{1+\delta} dv_g < \infty,$$

那么必可抽出一列半径 $\sigma_i \to \infty$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\partial B_{\sigma_i}(p_0)} G_0^{1+\delta} d\Sigma = 0;$$

这里 $d\Sigma$ 是 $\partial B_{\sigma_i}(p_0)$ 上关于 g 诱导出的测度. 对(4.2)两边在 $B_{\sigma_i}\backslash\mathscr{O}$ 上积分，应用 Stokes 定理，有

$$\int_{\partial B_{\sigma_i}} \frac{\partial}{\partial n} G_0^{1+\delta} d\Sigma \leqslant -C\int_{B_{\sigma_i}\backslash\mathscr{O}} G_0^{1+\delta} dv_g,$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 是外法向. 用梯度估计：$\left|\dfrac{\partial}{\partial n} G_0^{1+\delta}\right| \leqslant C G_0^{1+\delta}$，并让 $i \to \infty$，导出矛盾。于是(4.3)成立。

剩下 Γ 是初等群的情形：

(1) $\# A(\Gamma)=0$，这时，Γ 是有限群. M 上的度量 g 可取为 S^n 上的标准度量.

(2) $\# A(\Gamma)=1$. 这时 Γ 中仅有的无穷阶元素是抛物型的，从而 M 必是平坦的，从而必有：$R_g=0$.

(3) $\# A(\Gamma)=2$. 这时 Γ 中仅有的无穷阶元素是双曲型的，于是 $M\cong S^1\times S^{n-1}$. 因此也有相容的度量 $R_g\geqslant 0$.

4.2. 高阶同伦群

通过展开映射 Φ，我们把保角平坦流形 M 嵌入 S^n，又通过对 $\partial\Phi(\widetilde{M})$ 的维数的估计，我们还能了解 M 的高阶同伦群的一些属性.

定理 4.8. 设 (M^n, g) 是一完备局部保角平坦流形，又设有整数 $k\geqslant 2$，使得 $d(M)<\min\left\{n-k-1, \frac{(n-2)^2}{2}\right\}$，并且 $R_g\geqslant -C$，当 $n\geqslant 5$，$|R_g|\leqslant C$，当 $n=3, 4$，其中 C 是一正常数；则

$$\pi_i(M)=0,\quad i=2,\cdots,k. \tag{4.4}$$

证明：按定理 2.16 与定理 3.3，M 的万有覆盖 $\widetilde{M}$ 可嵌入 S^n 成一区域 Ω，且 $\partial\Omega$ 的维数 $\leqslant d(M)<n-k-1$. 为证(4.4)，需证

$$f_0:\ S^i\to\Omega$$

在 Ω 内可以收缩，$i=2,\cdots,k$. 即存在 f: $B^{i+1}\to\Omega$ 使得 $f|_{\partial B^{i+1}}=f_0$，$i=2,\cdots\cdots\cdots,k$.

不妨设 f_0 是一浸入(因 $i\leqslant k<n$)，故可扩张为浸入 f_1: $B^{i+1}\to S^n$，使 $f_1|_{S^i}=f_0$. 再扩张 f_1 为浸入 F: $B^{i+1}\times B^{n-i-1}\to S^n$ 满足：

$$F|_{S^i\times B^{n-i-1}}=f_0,$$
$$F|_{B^{i+1}\times\{0\}}=f_1.$$

$\forall t\in B^{n-i-1}$，记 $B_t^{i+1}=B^{i+1}\times\{t\}$，利用测度的可加性，存在常数 C 使得

$$\int_{B^{n-i-1}} H_0(F^{-1}(\partial\Omega)\cap B_t^{i+1})dt \leqslant CH_{n-i-1}(\partial\Omega),$$

在此 $H_i(\cdot)$表示 i 维 Hausdorff 测度.

因为 $i\leqslant k$, 且

$$H_{n-k-1}(\partial\Omega)=0,$$

所以 $\exists t_0\in B^{n-i-1}$, 使得

$$H_0(F^{-1}(\partial\Omega)\cap B_{t_0}^{i+1})=0,$$

即

$$F^{-1}(\partial\Omega)\cap B_{t_0}^{i+1}=\phi,$$

或

$$F(B_{t_0}^{i+1})\subset\Omega.$$

因为 $F|_{S^i\times\{t_0\}}=f_0$, 所以 $F|_{B_{t_0}^{i+1}}$ 即实现所要之收缩. (4.4)得证.

定理 4.9. 设完备局部保角平坦流形 (M^n, g) 的数量曲率 $R_g\geqslant R_0>0$, R_0是一常数; 则

$$\pi_i(M)=0,\ i=2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]-1.$$

又若还有 $|R_g|$, $|\nabla R_g|$都有界,且有常数 b 使 $\mathrm{Ric}(g)\geqslant -b^2$, 则还有

$$\pi_i(M)=0,\ i=2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

证明同理.

4.3. 调和形式与 Betti 数

我们还可以通过调和形式对保角平坦流形上的拓扑得到限制.

设(M,g)是一个局部保角平坦流形, 注意到$*$运算在中间维数是保角不变的,而微分算子 d 也是保角不变的, 从而 $\delta=*d*$ 是保角不变的. 一个 p 调和形式 ω 满足 $d\omega=\delta\omega=0$. 因此 p 调和形式经保角变换后也还是 p 调和形式.

设

$$\omega=\alpha_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

是 (M, g) 上的一个 p-调和形式(在此略去和号). 以下记 $\Delta_h=$

$d\delta + \delta d$，以及 Δ_g 为(M, g)上的 Laplace 算子，则有

$$\frac{1}{2}\Delta_g|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \langle\omega, \Delta_c\omega\rangle, \tag{4.5}$$

其中

$$\Delta_c = \Delta_g - \Delta_h + \text{曲率项},$$

求得

$$\langle\omega, \Delta_c\omega\rangle = p \cdot F(\omega),$$

其中

$$F(\omega) = R_{ij}\alpha^{i\alpha_2\cdots i_p}\alpha^j_{i_2\cdots i_p} + \frac{p-1}{2}R_{ijkl}\alpha^{iji_3\cdots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\cdots i_p}.$$

对于保角平坦的度量，

$$R^l_{ikl} = \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta^l_l - R_{il}\delta^l_k - g_{ik}R^l_l - g_{il}R^l_k)$$

$$- \frac{R_g}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k),$$

从而有

$$F(\omega) = \frac{n-2p}{n-2}R_{ij}\alpha^{ji_2\cdots i_p}\alpha^j_{i_2\cdots i_p}$$

$$+ \frac{p!(p-1)}{(n-1)(n-2)}R_g|\omega|^2. \tag{4.6}$$

由(4.6)立得

定理 4.10 (Bourguignon). 设(M, g)是 $2n$ 维紧局部保角平坦流形，其 $R_g > 0$. 又若 $\omega \in L^2(M)$是它的一个 n 调和形式，则必 $\omega = 0$.

证明：利用(4.6)，

$$F(\omega) = \frac{n!(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}R_g|\omega|^2 \geqslant 0,$$

所以

$$\frac{1}{2}\Delta_g|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \frac{n!}{2\cdot(2n-1)}R_g|\omega|^2 \geqslant 0,$$

因此 $|\omega|^2 =$ 常数，于是 $|\omega|^2 = 0$，从而 $\omega = 0$.

推论 4.11. 在定理 4.10 的假设下，M^{2n} 的 n 阶 Betti 数 $b_n =$

0.

我们还将推广这个结论.

定理 4.12. 设(M, g)是$n=2m$维完备局部保角平坦流形，其$R_g \geqslant R_0 > 0$，且$\mathrm{Ric}(g) \geqslant -b^2$，$R_g$以及$|\nabla R_g|$都有界，则$(M, g)$上的有界$m$调和形式恒为零.

证明：不妨设M是单连通的. 利用展开映射将其嵌入S^n.设$M = S^n \backslash \Lambda$，$g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$，其中$g_0$是$S^n$上的标准度量. 设$\omega$是$(M, g)$上的有界$m$调和形式，则

$$\omega \wedge * \omega = |\omega|_g^2 dv_g = |\omega|_{g_0}^2 dv_{g_0},$$

在此，

$$|\omega|_{g_0}^2 = |\omega|_g^2 \cdot u^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C u^{\frac{2n}{n-2}}.$$

如果能将ω扩张为S^n上的弱m调和形式,那么应用分部积分，得$\omega = 0$.

以下证ω可以扩张到 S^n 上,即要证：$\forall \eta \in \Lambda^{m-1}(M)$，$\forall \xi \in \Lambda^{m+1}(M)$，都有

$$\int_{S^n} d\eta \wedge \omega = \int_{S^n} \delta\xi \wedge \omega = 0.$$

为此,取 $\varphi \in C_0^\infty(M)$,且$\varphi \equiv 1$于$\Lambda$外一个邻域,则

$$0 = \int_{S^n} d(\varphi\eta) \wedge \omega = \int_{S^n} d\varphi \cdot \eta \wedge \omega + \varphi d\eta \wedge \omega, \tag{4.7}$$

但

$$\begin{aligned}\int_{S^n} (d\varphi) \cdot \eta \wedge \omega &\leqslant C_\eta \int |d\varphi|_{g_0} \cdot |\omega|_{g_0} dv_{g_0} \\ &\leqslant C'_\eta \int |d\varphi|_{g_0} u^{\frac{n}{n-2}} dv_{g_0} \\ &\leqslant C_\eta \left(\int_{S^n} |d\varphi|^{\frac{n+2}{2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{2}{n+2}} \\ &\quad \times \left(\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n}{n+2}},\end{aligned}$$

而$\int_{S^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} dv_{g_0} < +\infty$(定理 2.11). 再由定理 2.13，$\exists \varepsilon_0 > 0$,使得 $d(M) \leqslant \frac{n-2}{2}(1-\varepsilon_0)$. 应用定理 3.7,以及定理 2.16，$\dim \Lambda$

$\leqslant \frac{n-2}{2}(1-\varepsilon_\epsilon)$，从而

$$C_{\frac{n+2}{2}}(\Lambda)=0.$$

这表明存在 $\varphi_k \in C_0^\infty(M)$，$\varphi_k \to 1$，使得 $\int_{S^n} |d\varphi_k|^{\frac{n+2}{2}} dv_{g_0}$ 任意小。于是我们得到

$$\int_{S^n} d\eta \wedge \omega = 0.$$

类似地证明：$\int_{S^n} \delta\eta \wedge \omega = 0.$

于是 ω 是 S^n 上的弱调和形式。

推论 4.13. 设 (M, g) 是 $n=2m$ 维紧局部保角平坦流形，且 $\mathrm{Ric}(g)>0$，则 Betti 数

$$b_i(M)=0,\ i=1, 2, \cdots, m.$$

证明：利用等式(4.5)，

$$\frac{1}{2}\Delta_g|\omega|^2 \geqslant C|\omega|^2,\ C>0,$$

其中 ω 是任意 p 调和形式，$p=1, 2, \cdots, m$。即得 $\omega=0$。

§5. 与偏微分方程的关系

设 $\Omega \subset S^n$，我们来考察下面两个问题的联系：

(1) 在 Ω 上构造常数量曲率的完备保角度量。

(2) 求下列方程的弱解

$$L_0 u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \text{ 于 } S^n, \tag{5.1}$$

其中 $L_0 = L_{g_0}$，g_0 是 S^n 上的标准度量。所谓弱解是指广义函数解。研究(5.1)的正解 $u \in L_{loc}^{\frac{n+2}{n-2}}$ 有实质上的重要性，下述定理联系这两个问题。

定理 5.1. 设 $\Omega \subset S^n$ 是一个区域，$g=\mu^{\frac{4}{n-2}}g_0$ 是 Ω 上的一个完备度量，使其数量曲率 $R_g \geqslant 1$ 于 Ω，则 $\dim(S^n \backslash \Omega) \leqslant \frac{n-2}{2}$，$u \in L^{\frac{n+2}{n-2}}(S^n)$，并且存在 $\lambda>0$，使得 $v=\lambda u$ 满足

$$\int_{\Omega} vL_0\varphi + v^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi \leqslant 0,\ \forall\varphi\in C^{\infty}(S^n),\varphi\geqslant 0. \tag{5.2}$$

如果 g 有有界曲率，并且 $R_g\equiv 1$，则 $\exists\lambda>0$ 使得 $v=\lambda u$ 满足(5.1).

证明：关于 $\partial\Omega = S^n\backslash\Omega$ 的维数结论是定理 3.8，定理 2.16 以及定理 2.12 的直接推论.

为证(5.2)，先注意在点点意义下已有

$$L_0 u = -c_n R_g u^{\frac{n+2}{n-2}} \leqslant -c_n u^{\frac{n+2}{n-2}},\ 于\ \Omega. \tag{5.3}$$

乘以适当因子 $\lambda>0$，并令 $v=\lambda u$，则(5.3)变为

$$L_0 v + v^{\frac{n+2}{n-2}} \leqslant 0,\ 于\ \Omega.$$

为过渡到(5.2)，取一光滑上凸函数 $\chi_a(t)$，a 是一实参数，$t\in\mathbf{R}^1$，满足

$$\chi_a(t)=\begin{cases} t, & t\leqslant a,\\ \dfrac{3a}{2}, & t\geqslant 2a.\end{cases}$$

注意到

$$L_0\chi_a(v) \leqslant -c_n\chi_a(v) + \chi_a'(v)\Delta_{g_0}v,$$

所以在 Ω 上有

$$L_0\chi_a(v) \leqslant c_n(\chi_a'(v)v - \chi_a(v)) - \chi_a'(v)v^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{5.4}$$

如果(5.4)可以扩张到 S^n 上，使得其中的 $\chi_a(v)$ 成为 S^n 上的光滑函数，那么两边同乘以 $\varphi\in C^{\infty}(S^n)$，$\varphi\geqslant 0$，并作分部积分就有

$$\int_{S^n}(\chi_a(v)(L_0\varphi) + \chi_a'(v)v^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi)dv_{g_0}$$

$$\leqslant c_n\int_{S^n}\varphi(\chi_a'(v)v - \chi_a(v))dv_g.$$

如果还知道 $v\in L^{\frac{n+2}{n-2}}(S^n)$，那么便可以让 $a\to+\infty$，再应用 Lebesgue 控制定理得到所要的结论(5.2).

以下验证 $\chi_a(v)$ 可以光滑地扩张到 S^n 上.

设 G_0 是以 $0\in\Omega$ 为极点的 Ω 上的极小正 Green 函数，$\overline{G}_0$ 是 L_0 的以 0 为极点的 S^n 上的 Green 函数，则按定理 3.7，G_0 一

$\lambda^{\frac{-4}{n-2}}v(0)^{\frac{n+2}{n-2}}v^{-1}\cdot\bar{G}_0$. 按引理 3.3, $G_0(x)\to 0$ 当 $x\to\partial\Omega$ 一致, 从而 $v(x)\to+\infty$ 当 $x\to\partial\Omega$ 一致. 由此推得

$$\chi_a(v)(x)\to\frac{3a}{2},\ 于\ \partial\Omega\ 一致.$$

又因为 $\chi_a(v)$在 $\partial\Omega$ 附近都已达到$\frac{3a}{2}$, 所以 $\chi_a(v)$已光滑地扩张到 S^n 上去了.

这样一来,(5.4)在 S^n 上成立.

剩下来验证: $v\in L^{\frac{n+2}{n-2}}(S^n)$. 按定理 2.11,

$$\int_{\Omega\setminus\mathscr{O}}G_0dv_g<\infty,\ \mathscr{O}\ 为\ 0\ 之一邻域,$$

从而

$$\int_{\Omega}v^{\frac{n+2}{n-2}}dv_{g_0}<\infty,$$

又因为 $S^n\setminus\Omega$ 是零测集, 故 $v\in L^{\frac{n+2}{n-2}}(S^n)$.

最后,设 $R_g\equiv 1$, 于 Ω. 因此有 $\lambda>0$, 使 $v=\lambda u$ 满足(5.1)点点于 Ω. 这时在 S^n 上有

$$L_0(\chi_a(v))=\chi_a''(v)|\partial v|^2-\chi_a'(v)v^{\frac{n+2}{n-2}}$$
$$+c_n(\chi_a'(v)v-\chi_a(v)).$$

可以选择 $\chi_a(t)$还满足: $|\chi_a''(t)|\leqslant Ca^{-1}$, C 是一常数. 和前面的作法一样,为证在广义函数意义下(5.1)成立,取 $\varphi\in C^\infty(S^n)$, 只需再证

$$\int_{S^n}\varphi\chi_a''(v)|\partial v|^2dv_{g_0}\to 0,\ 当\ a\to 0 \tag{5.5}$$

就够了, 然而

$$\int_{S^n}\varphi\chi_a''(v)|\partial v|^2dv_{g_0}\leqslant Ca^{-1}\int_{\{x\in S^n|a\leqslant v(x)\leqslant 2a\}}|\partial v|^2dv_{g_0}$$
$$\leqslant 2C\int_{\{x\in S^n|v(x)\geqslant a\}}v^{-1}|\partial v|^2dv_{g_0}.$$

为证(5.5),我们只需证 $\int_\Omega u^{-1}|\partial u|^2dv_{g_0}<\infty$. 应用梯度估计,

$$|\nabla G_0| \leqslant CG_0, \text{ 于 } \Omega \backslash B_1(0),$$

所以有

$$|\nabla u^{-1}| \leqslant Cu^{-1} + C|\nabla \overline{G}_0^{-1}| u^{-1}\overline{G}_0,$$

从而还原到 g_0 的梯度，即得

$$|\partial u| \leqslant Cu^{\frac{n}{n-2}},$$

所以

$$\int_\Omega u^{-1}|\partial u|^2 dv_{g_0} \leqslant C\int_\Omega u^{\frac{n+2}{n-2}} dv_{g_0} < \infty.$$

(5.5)得证.

作为这个定理的应用，我们能找到方程(5.1)的一大类整体弱解的例子. 例如 Ω 是有正数量曲率的紧局部保角平坦流形的万有覆盖. 在商空间上的 Yamabe 问题的解便提升为 Ω 上的一个完备度量 g，满足 $R_g = 1$，并且有有界曲率.

例 1. 考察由一个双曲元素 $\gamma \in \mathrm{Conf}(S^n)$ 生成的 Klein 群 Γ，设 p, q 为其不动点. 令 $\Omega = S^n \backslash \{p, q\}$. 于是因 $\Omega\backslash\Gamma$ 保角同胚于紧流形 $S^1 \times S^{n-1}$，后者有一自然度量，有常值数量曲率，适当选择常因子，可使对应的度量 g 满足 $R_g = 1$. 这度量与 g_0 是保角的，从而 $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$. 这个 u 即是(5.1)在 S^n 上的广义函数解，以 p, q 为奇点.

当然这解也可以通过让 $q = -p$ (不失一般性)化归径向常微分方程解出.

例 2. 设 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Conf}(S^n)$ 是有不同不动点的两个足够强的双曲元素，设 Γ = 由 γ_1, γ_2 生成的 Klein 群，而 $\Omega = S^n \backslash \Lambda$, Λ 是 γ_1, γ_2 的极限集，则 Λ 是一个 Cantor 集. 可以适当选择 γ_1, γ_2，以使 Λ 的维数任意小.

还可以问：是否存在(5.1)的弱解，使其奇点在一光滑子流形上? 如果 R_g = 常数<0，这个问题已由 Löewner Nirenberg 解决. 参看 Partial diff. equations invariant under conformal or projective transformations, Contributions to Analysis 1974, Acad. Press, INC.. 最近 Schoen 证明了：对于给定的至少有两个

点的有限集合，存在在这集合上发散到∞的奇解。

最后，我们提出一个猜测作为本章结束。

猜测. 设 $u \in L^{\frac{n+2}{n-2}}(S^n)$, $u \geqslant 0$, 是(5.1)的一个弱解，则 u 必在某一区域 Ω 上光滑，其中 $\dim(\partial\Omega) \leqslant \frac{n-2}{2}$，而 $g = u^{\frac{4}{n-2}} g$ 是在 Ω 上有正常数量曲率的完备度量。

参 考 文 献

[1] M. T. Anderson, The dirichlet problem of infinity for manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geo.*, 18(1983), 701—721.

[2] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Annals of Maths.*, 121(1985), 429—461.

[3] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic PDE's or inequalities of 2nd order, *J. Math. Pure Appl.*, 36(1957), 235—249.

[4] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, Grundlehren der Mathematicschen Wissenschaften 252, Springer-Verlag, 1982.

[5] T. Aubin, Equations differentielles non-linéaires et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures et Appl.*, 55(1976), 269—296.

[6] T. Aubin, Best constants in the Sobolev imbedding theorem, The Yamabe Problem Seminar on Differential Geometry (1982).

[7] M. S. Berger, On Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, *J. Diff. Geo.*, 5(1971), 325—332.

[8] M. Berger, P. Gandtichon, and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne* Springer-Verlag Berlin, New York, Lecture notes in Math., No 194 (1972).

[9] G. Besson, Sm la maltiplicité de le première valear proper des surfaces Riemanniennes, *Ann. Inst Fourier Genoble*, 30.1(1980), 109—128.

[10] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[11] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, in *Problem in Analysis a Symposium in Honor of S. Bochner*, Princeton Univ. Press, 1970, 195—199.

[12] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature, *J. Diff. Geo.*, 6(1971), 119—128.

[13] J. Cheeger and S. T. Yau, A lower bound for the heat kernel, *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(1981).

[14] S. Y. Cheng, Eigenvalues and nodal sets, *Comment. Math. Helv.*, 51(1976), 43—55.

[15] J. F. Escobar and R. M. Schoen, *Conformal Metrics with Prescribed Scalar Curvature*, in preprint.

[16] M. P. Gaffney, A special stokes theorem for complete Riemannian manifolds, *Annals of Maths.*, 60(1945), 140—145.

[17] R. Greene and H. Wu, On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions, *Indiana Univ. Math. J.*, 22(1973), 641—653.

[18] J. Hersch, Quatre propriété isopérimétriques de membranes spheriques homogenes, *C. R. A. S.*, 270(1970), 1645—1648.

[19] J. Kazdan and F. Warner, Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, *J. Diff. Geom.*, 10(1975), 113—134.

[20] N. H. Kuiper, On conformal flat spaces in the large, *Ann. Math.*, **50**(1949), 916—924.

[21] P. Li and S. T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, in *Proceeding of Symposium in Pure Math.* vol **36**(1980), 205—239.

[22] P. Li and S. T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent Math.*, **69**(1982), 269—291.

[23] J. Moser, *On a Nonlinear Problem in Differential Geometry*, Dynamical Systems (edited by M. Peixato), Academic Press, New York, 1973.

[24] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan*, **14**(1962), 333—340.

[25] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 479—496.

[26] R. Schoen and S. T. Yau, Proof of the positive action conjecture in quantum relativity, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 547—548.

[27] R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.*, 65(1979), 45—76.

[28] R. Schoen and S. T. Yau, *The Geometry and Topology of Manifolds of Positive Scalar Curvature*, in preparation.

[29] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geo.*, 18(1983), 723—732.

[30] G. Szegö, Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area, *J. Rat. Mech. Anal.*, 3(1954), 343—356.

[31] G. Talenti, Best constant in sobolev inequality, *Ann. Math. Pure. Appl.*, **110** (1976), 353—372.

[32] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **22**(1968), 265—274.

[33] N. Varopoulos, The poisson kernel on positively curved manifolds, *J. Funct. Anal.*, 44(1981), 359—380.

[34] B. Wang, S. T. Yau, and S. T. Stephen, Yau, An estimate of the first two eigenvatues in the Schrödinger operator, to appear.

[35] E. Witt, A new proof of the positive energy Theorem, *Comm. Math. Phys.*, **80** (1981), 381—402.

[36] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osake Math. J.*, 12(1960), 21—37.

[37] S. T. Yau, Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, *Ind. Univ. Math. J.*, 25(1976), 659—670.

[38] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(1975), 201—228.

[39] S. T. Yau, Nonexistence of continuous convex functions on certain Riemannian manifolds, *Math. Ann.*, 207(1974), 269—270.

[40] J. Q. Zhong and H. C. Yang, On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, *Scientia, Sinica*, vol. XXVII, No 12(1984), 1265—1273.

附录一　几何中的非线性分析[1)]

丘　成　桐

几何学的要旨就是对于某一类的几何对象给出一个好的描述. 通常，这意味着我们必须对于空间上的分析结构及由这些结构定义的几何对象给出一个好的描述. 在许多情形下，我们必须知道如何来形变这些结构并且研究隶属于这种结构的几何对象的动力学. 这些几何对象的描述通常是由微分方程决定的. 由于几何对象一般都是弯曲的，这些方程的大多数是非线性的，正象在物理中那样，几何中的方程大都是变分性质的. 事实上，我们研究的几何中的方程几乎都与物理有关. （我们这儿指的是广义的物理，因此也包括了工程中的许多问题.）也许，几何同物理一样的实在. 在历史上，几何学家从几何自身的美出发而考虑的许多问题后来都在物理学中自然产生. 这件事常常使几何学家同物理学家都感到吃惊. 似乎当大自然通过数学来表现她自身的美的时候，她也通过它显示她的深邃性. 高能物理中一个最新的发展是超弦(superstring）理论. 它需要用到几何学中很多的知识. 我们希望看到物理学家与数学家对此连续不断的共同探讨.

除了物理学之外，几何学还同拓扑学及代数几何学密切相关. 拓扑学告诉我们空间基本的属性，而代数几何给我们提供了无数的自然的例子，使我们能去验证我们的理论. 我们希望通过这个演讲来说明这些联系中的若干方面.

本演讲将粗略地分成下列几个题目:

(I) 线性方程: Laplace 算子的谱及调和函数;

---

1) 本文是根据丘成桐于 1985 年下半年在 San Diego 分校(加州大学)讨论班的一系列讲演整理而成的.

(II) 半线性方程：与共形形变有关的 Yamabe 问题；

(III) 极小曲面方程及调和映照；

(IV) Kähler 几何。

在我们详细论述这些问题之前，我们提一下对几何学的看法的一种分类，过去，很多几何学家做的是“局部”的问题。当前，他们更多注意的是“整体”问题。这常常造成几何学家的这两种看法的对立。事实上，正象在微分方程的理论中一样，整体性问题的进展建立在关于局部问题的知识的基础之上。事实上，有些局部问题比整体问题还要困难。我们如下来讨论：

(i) 局部问题。

大多数几何中的局部问题可以通过代数化成微分方程中的局部存在性定理。其中涉及的代数可能是很复杂的。Griffiths 及其合作者们关于局部等度嵌入的工作是个很好的例证。Cartan-Kähler 理论正是为了把几何问题化成局部存在性定理（例如 Cauchy-Kovalevsky 定理)而提出的。在这些局部问题中，还用到了各种隐函数定理，其中包括 Nash-Moser 迭代程序。当所涉及到的方程是退化型时(即不全是椭圆型或双曲型，或改变类型的方式是退化的)，局部的存在性问题可能是极其困难的，当方程是非线性时尤其如此。

一个有趣的例子是局部度量嵌入问题。几何学的一个老的经典的问题是曲面片在三维欧氏空间中的嵌入问题。方程的形状是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=F(x,y,u,u_x,u_y)$。当 F 变号时或零点集复杂时，局部的存在性是很困难的。事实上，Pogorelov 和 Jacobowitz 在 $F\geqslant 0$ 时给出了 C^3 的反例。因此，C.S.Lin[ln1, 2] 在 C^{10} 的情形下给出了局部存在性的证明一事是十分引人注目的。

我们在此还应当提到 Kuranishi 关于 C-R 结构的局部嵌入理论的深刻的工作。

(ii) 半局部理论。

基本的例子是所涉及的方程的奇点的传播。几何学及微分方

程中一个最困难的课题也许是对于对称性的了解。在代数几何中，奇点是个较为明确的概念，因为那儿的"空间"就是多项式簇的零点集，而奇点是在其局部看来空间不能是仿射空间样子的点。

在几何中，奇点则较难定义，特别是当结构是由双曲型方程刻划并且空间的拓扑也允许改变时，一个好的例子是广义相对论中发展的奇点理论。现在，我们还没有找到黑洞的一个真正好的定义，黑洞本质上说就是 Einstein 方程的奇点，在我们对于具非奇异初值的 Einstein 方程的整体情况有个好的认识之前，给出广义相对论中奇点的更精确的定义是很困难的。注意，在著名的 Schwarzschild 解中，有一个坐标奇点，但它可以通过改换坐标而除掉。这明显地使问题复杂化了。Penrose 提出了一个叫做宇宙管制的著名问题，它对于一般性的现象给出了奇点如何发展的预测。这也许是经典的相对论中最基本的问题。

主要的问题是，当空间维数大于 1 时，我们对于非线性双曲系统的整体的性质知道得很少。几乎可以肯定地说，一旦我们对这类方程了解得更多，几何学就会有所突破。关于 Einstein 方程的最好的工作是 D. Christodoulou 最近得到的，在球对称的情形他给出了很好的结果。可以期望关于球崩坍的许多问题可以通过他的工作得到解答。

对于非线性椭圆系统，已有一个成熟的正则性理论。这方面的工作追溯到 Bernstein, Schauder, Morrey, Nirenberg, De Giorgi, Federer, Fleming, Allard, Almgren, Simon 等人。这些工作的大多数是集中在极小子簇方面。理由很简单，非线性椭圆方程的大多数困难在极小子簇中都已出现。关于极小子簇的好的认识往往引起更一般的非线性椭圆方程类的突破，极小子簇的正则性理论的大多数进展都假定极小子簇在整体上是面积极小的。

最好的例子是余维为 1 的面积极小的极小子簇。De Giorgi, Federer, Fleming, Almgren, Allard, Simon 和 Hardt 证明了当维数小于 6 时，没有奇性。最近，L. Simon 通过研究奇点的邻域给出孤立奇点的很好的认识。他证明了邻域可以用定义在切锥

上的 Hölder 连续函数的图象来描写。

(iii) 大范围问题。

与物理、拓扑和代数几何有关的很多问题都是整体性的，因此整体几何学的大多数工作都同这些学科有关． 粗略地说，"整体"表示我们研究紧致空间上的分析结构．对于非紧的流形，我们则要求它的结构在某种意义下是完备的．对于由这样的结构定义的几何对象，我们想知道它们随着时间(趋于正负无穷)的演变及其渐近行为。

从许多方面看，基本的问题是：

(1) 给定一个完备的分析结构，如何从局部的信息得出整体的信息？

(2) 给定了空间的拓扑，我们能否在此空间上加上某种分析结构？

因此第二个问题对应于分析中的存在性定理．第一个问题对应的是唯一性．从这些问题的叙述本身应该看到，对于整体拓扑的了解在这些问题的处理中是不可少的．事实表明，我们还可以把讨论倒过来，从而给出拓扑学中的新定理． 最近的例子是 S. Donaldson[D3,4] 把规范物理论应用到四维拓扑的研究而得到的惊人的成就．在这之中的存在性定理是 C. Taubes 在 K. Uhlenbeck 工作的基础上得到的(见 [U1, 2] 和 C. Taubes 的文章)．通常，建立在纯粹拓扑的信息之上的存在性定理是第一步．一旦建立起分析的结构，拓扑的推论可从分析的结构导出来．我们希望在演讲的下列部分中给出它的一个轮廓。

§1. 特征值与调和函数

黎曼流形 M 上最基本的椭圆算子是 Laplace 算子 Δ，若 M 是紧致的，则 Δ 有离散谱．我们把谱(即 Δ 的特征值)记作 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_i \leqslant \cdots$． 一个基本事实是当 $i \to \infty$ 时 $\lambda_i \to \infty$。

特征值的研究中有两个基本的并且密切相关的方向．第一个是研究叙列 $\{\lambda_i\}$ 的渐近性质． 基本性的结果可在 [BGM] 中找

到。

著名的 Weyl 公式给出了 λ_i 的渐近展开的第一项。它说的是

$$\lambda_i \sim C_n i^{\frac{2}{n}}/(\mathrm{Vol} M)^{\frac{2}{n}}, \text{ 当 } i \to \infty,$$

这儿 C_n 是只同 $n = \dim M$ 有关的普适常数。决定 λ_i 渐近展开的第二项则是个困难得多的问题。Ivrii [Iv] 在这个方向做了重要的工作 (Melrose 也有实质性的工作)。他的结果可以概述如下：设 M 是有边 $\partial M \neq \emptyset$ 的紧致流形。首先考虑 Dirichlet 问题。对于任意正数 λ，令 $N(\lambda)$ 表示不超过 λ^2 的特征值的个数(重数计在内)。在 M 的闭测地线集满足某个技术性条件的假定下，下列渐近公式成立

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} W_n(\mathrm{Vol} M)\lambda^n - \frac{1}{4}(2\pi)^{-n+1} W_{n-1}(\mathrm{Vol}\partial M)\cdot\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}),$$

这儿 W_n 及 W_{n-1} 是只依赖于 n 的常数。对于 Neumann 问题也有类似的结果。Ivrii 用的方法是研究波方程 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u$ 的基本解的奇性。

另一个与 Weyl 公式有关的问题是 Polya 猜测。它说的是，如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界域，则

$$\lambda_i \geqslant C_n(\mathrm{Vol}\Omega)^{-\frac{2}{n}}\cdot i^{\frac{2}{n}}$$

及

$$\mu_i \leqslant C_n(\mathrm{Vol}\Omega)^{-\frac{2}{n}}\cdot i^{\frac{2}{n}}.$$

这儿 $\{\lambda_i\}$ 及 $\{\mu_i\}$ 分别是 Dirichlet 及 Neumann 问题的特征值。

在 [LY1] 中，Li 同 Yau 证明了从平均上讲，Polya 猜测是对的。而且，对任意的闭流形 M，恒有

$$\lambda_i \leqslant C_1 + C_2(i+1)^{\frac{2}{n}}(\mathrm{Vol} M)^{-\frac{2}{n}},$$

这儿 C_1 及 C_2 是只同 M 的直径 m 及 Ricci 曲率的任一个下界有关的常数。

热核，或算子 $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ 的基本解，对于认识 Laplace 算子的

特征值是基本的工具。它常常给出关于特征值的较小依赖于几何的估计．然而，除了 Weyl 的渐近估计的第一项之外，它尚不能对低阶渐近项给出估计．但是，通过研究热核的迹，$\sum_i e^{-\lambda_i t}$，在过去已经得到了很多信息．特别，体积及总标量曲率等可以从此无穷级数当 $t \to 0$ 时得出来．然而，为了计算这些渐近值，必须知道全部的特征值，因此这不是得到不变量的有效的方法．当 M 是凸域时，的确可以找到有效地得到体积的方法．当 M 不凸时，问题是不稳定的并且是困难的，无论怎样，在一般情形，人们不可能得出流形的几何的全部信息(参看 [Mi])．C. Gordon 及 Wilson [GW] 发现了在某个紧流形上存在具有相同谱的非平凡的连续的度量族．然而，所有具有相同的谱的流形的已知例子都是局部等度的．

谱的研究的第二个方面是对一般的流形用极小极大原理估计开头几个特征值，特别是 λ_1，Cheng [Ch1] 给出了只依赖于流形的直径及 Ricci 曲率的任一个下界的 λ_1 的上界．后来，Li 及 Yau [LY1] 得到了 λ_1 的与同样的量有关的下界．Zhong 和 Yang [ZY] 得到了下界的最优估计．

估计特征值的空隙是个有趣且重要的问题．例如，可知 $\lambda_1(S^2)$ 的重数不超过 3 (见 [Ch2])．因此要估计 $\lambda_4 - \lambda_1$．对于 $\mathbf{R}^n$ 中的凸域 Ω，在 Dirichlet 边值条件下有 $\lambda_1 < \lambda_2$．在 [SWYY] 中，I. Singer, Wang, Yau 及 Yau 对于凸域的 $\lambda_2 - \lambda_1$ 给出了估计．证明的基本想法是：设 f_1 及 f_2 是开始的两个特征函数，因为 Ω 凸，所以函数 $u = f_2/f_1$ 是有定义的且直到边界上都是光滑的．令 $G = |\nabla u|^2 + \lambda(\mu - u)^2$，此处 $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ 及 $\mu = \sup_\Omega u$，由极大值原理，不难看出

$$G \leqslant \sup_{\partial\Omega} G = \sup_{\partial\Omega} \lambda(\mu - u)^2,$$

这蕴含

$$|\nabla u|^2 + \lambda(\sup u - u)^2 \leqslant \lambda[(\sup u - \inf u)^2 - (\sup u - u)^2],$$

因此

$$\sqrt{\lambda} \geqslant \frac{|\nabla u|}{\sqrt{(\sup u - \inf u)^2 - (\sup u - u)^2}}.$$

将此不等式沿着连结 u 达到极大与极小值的线段积分，就得到

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2},$$

这儿 d 是 Ω 的直径. 这个不等式的常数是否能够改进使得等号对于线段成立?

显然对于特征值的认识本质地依赖于对特征函数的认识，特征函数的基本部分是其零点集合，它叫做结点集 (nodal set). 甚至对二维流形，我们还不真正了解结点集. 一个很著名的古老问题是研究凸域的第二特征函数的结点线. 据猜测，它不可能包围域的任一个紧子集，最近 Lin 在域具有对称性的假设下证明了这个猜测. 另一个有趣的问题可以如下叙述：设 l_n 是第 n 个特征函数的长度，能否得到 l_n 的渐近估计? 似乎它的阶是 $\sqrt{\lambda_n}$，这儿 λ_n 是第 n 个特征值. 困难的是给出 l_n 的上界估计.

以下我们考虑 M 是完备的非紧流形的情形. 这时候，应该有两个理论，一个 L^2 的，一个 L^∞ 的. 首先考虑 L^2 理论，谱一般不是离散的了. 可是，我们还是可以问：$-\Delta$ 什么时候有特征值? 也就是说，存在 $f \in L^2(M)$，$f \neq 0$，使得 $\Delta f = -\lambda f$ $(\lambda > 0)$? 我们希望下列情况全是对的：

(1) 当 M 完备且 $K \geqslant 0$ (K 是截曲率) 时，M 没有纯粹的点谱. Escobar[Es] 在 M 在一个紧集外是旋转对称的情形证明了这个断言;

(2) 当 M 是完备、单连通且 $-C \leqslant K \leqslant -1$ 时，M 没有特征值;

(3) 当 M 是完备的，$-C \leqslant K \leqslant 0$ 且体积有限时，M 有无穷多特征值.

这些猜测的正确性在 $n = \dim M = 2$ 时都不知道. 已知猜测 (3) 在 M 是对称域的算术子群的商空间时成立.

了解 $\lambda = 0$ 的情形特别有趣. 特别，M 什么时候有满足某些条件的非常值调和函数? 如果有，有多少?

Yau 在 [Y5] 中证明了，在任意完备的非紧流形上，不存在非

常值的 L^p 调和函数，$1 < p < \infty$. 特别，除常数外没有其他 L^2 调和函数. 由于这一点，我们将注意力集中于正的或有界的调和函数上. 这儿我们要讨论的基本问题是给出使 Liouville 定理成立或不成立的M的几何条件.

Yau[Y7] 的一个结果说当 Ricci 曲率非负时，仅有的正调和函数是常数. 这种流形可称为强抛物的.

最近，P. Li 及 Tam[LT] 研究了M在一个紧集外曲率非负的情形. 他们给出了所有有界的或正的调和函数的分类，如果能用 Ricci 曲率非负代替上面的条件就好了. Donnelly 用 Yau 的方法证明了正调和函数的空间是有限维的. 这种流形可以叫做抛物的. 有趣的是去证明当流形一致等价于某个完备的 Ricci 曲率非负的流形时，它是抛物的.

另一个方面，我们想证明很多流形是双曲的，即非抛物的. Anderson[A] 及 Sullivan[S] 对于单连的、曲率介于两个负常数之间的完备流形解出了 Dirichlet 问题.后来，Anderson 及 Schoen [AS] 关于这种流形的正调和函数作出了漂亮的工作. 他们的主要结果是 Martin 边界同无穷远球面 $S(\infty)$ 的 C^a 同胚的存在性，Martin 边界同无穷远球面的合二而一使我们能够对正调和函数开始一个系统的研究. 可以证明M上的每一个正调和函数 u 可以通过下列公式得到，

$$u=\int_{S(\infty)} K(x, Q)d\mu_Q,$$

这儿 μ 是 $S(\infty)$ 上的唯一的正 Borel 测度，$K(x, Q)$ 是 Poisson 核. 这是 Martin 表示公式.

在 Martin 边界上可以定义调和测度. 对这个测度的正则性的研究是个重要的问题. 也许有界域的调和测度的许多经典的事实在这儿会有相类似的结果.

当曲率没有下界时如何建立上述理论还不清楚. 也不知道当曲率只是非正时 Martin 边界是什么样子. 对于对称域，已有一个完整的理论. 能从这个更广的框架来认识对称域就好了.

另一个重要的问题是证明一个非紧的完备流形M是双曲的，若 $\lim_{i\to\infty}\lambda_1(\Omega_i)>0$，这儿 Ω_i 是M的穷竭紧集列.

关于完备流形上的调和函数有很多有趣的问题. 一个函数 f 叫做具有 k 次多项式级的增长，如果 $|f|\leqslant C(1+r)^{k+\varepsilon}$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立，这儿 $r=d(x,p)$，p 是M上一固定点. 一个函数叫线性增长的，若它满足前面的 $k=1$ 的不等式. 对于具有非负 Ricci 曲率的完备黎曼流形，我们希望得到线性增长的调和函数的维数的上界，当M是 Kähler 时，多项式增长的全纯函数构成一个环. 这时，我们想知道什么时候这个环是有限生成的，什么时候可以找到线性增长的母元. 这个问题同 Kähler 几何学中下列问题密切相关：具有正全纯双截曲率的非紧完备 Kähler 流形全纯等价于 $\mathbf{C}^n$.

Siu 和 Yau 及 Mok-Siu-Yau [MSY] 试图用 Hörmander 的 L^2 理论解决这个问题.然而，他们的假设相当强，方法是构造慢速增长的全纯函数. 最近 Li 和 Yau[LY3] 用椭圆理论的论证来构造可以分隔两个点的线性增长的全纯函数. 他们假设了流形的体积的增长是 $2n$ 次多项式的.

另一个方面，在具有强的负曲率的单连通完备 Kähler 流形上造有界全纯函数是一个重要问题. 事实上，我们希望能证明它全纯等价于 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，或至少有界全纯函数可分隔流形上的点. 看上去这个问题同经典的 Corona 问题向高维有界域的可能的推广有密切关系.

§2. Yamabe 方程及共形平坦流形

Yamabe 方程是同 Riemann 流形上一个度量的共形形变（又称保角形变）相关的非线性椭圆型标量方程. 给定标量曲率是 k_0 的 Riemann 度量 g_0. 设 g 是点点共形于 g_0 的度量，则 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$，此处 $u>0$ 是光滑函数. g 的标量曲率 R 由下列方程给出

$$L_0 u = -\gamma_0 \Delta_0 u + R_0 u = R u^a, \tag{1}$$

这儿 Δ_0 是关于 g_0 的 Laplace 算子，$\gamma_0 = \frac{4(n-1)}{n-2}$，$a = \frac{n+2}{n-2}$ 并且 $n = \dim M$。

Yamabe 在 [Ya] 中断言总可以找到方程 (1) 的解 $u > 0$，使得 $R = \text{const}$. 即紧致 Riemann 流形上的任意度量都共形等价于一个常标量曲率的度量，然而，他的证明中有个错误. 这是 Trudinger 发现的. Trudinger [Tr] 还证明了当线性算子 L_0 的最小特征值 λ_1 非正时，方程 (1) 总可以对 $R = \text{const}$ 解出来.

令 Y 是 $L_1^2(M)$ 上由

$$Y = \int_M (\gamma |\nabla_0 u|^2 + R_0 u^2) \Big/ \left(\int_M R u^{a+1}\right)^{\frac{2}{a+1}}$$

定义的泛函，这儿 ∇_0 是关于度量 g_0 的梯度，简单的计算表明方程 (1) 是泛函 Y 的 Euler-Lagrange 方程。

Aubin [Au1] 给出 Y 在 $L_1^2(M)$ 中有极小的充分条件. 它的叙述如下. 固定 $R \equiv 1$ 并且 $\sigma(g_0)$ 是 Y 的极小值，$\Lambda_n = \sigma(\mathring{g})$，这儿 $\mathring{g}$ 是单位球 S^n 上的标准度量，则有:

(a) 对任意度量 g_0，$\sigma(g_0) \leqslant \Lambda_n$;

(b) 如果 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$，则存在使 Y 极小的光滑函数 u.

因为 u 是 (1) 当 $R = \text{const}$ 时的解，Yamabe 的猜测就变成了对于不共形于 S^n 上标准度量的度量是否有 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$. Aubin [Au1] 证明了若 $n \geqslant 6$ 并且 g_0 不是共形平坦时，则 $\sigma(g_0) < \Lambda_n$. Aubin 的证明是局部的. 他构造了一个在支集中球面对称的函数. 因此剩下的情形是 $n = 3, 4, 5$ 或 M 是共形平坦且 $n \geqslant 6$ 这两种.

近来，R. Schoen [Sc] 解决了这两个剩下的情形从而完全解决了 Yamabe 猜测. 他的证明是整体性的并且用到了推广的正质量定理(见 Schoen 和 Yau 的文章)，在 M 共形平坦或 $n = 3$ 的情形，Schoen 对某个适当的叙列 $\{u^\varepsilon\}$ 给出 $Y(u^\varepsilon)$ 的更高阶的估计.

$n=4$ 或 5 的情形需要用到一种复杂的摄动理论并且再一次借助于正质量定理.

对于完备的非紧流形也可以提同样的问题. 最近, Schoen 宣布了一些新结果, 一个特别有意思的结果是, 若 M 的拓扑型与 $S^n-\{p_1, \cdots, p_k\}$ 相同, $k>1$, 则在标准度量的共形等价类中可以找到一个标量曲率是常数的完备度量.

与 Yamabe 猜测有关的另一个课题是 (局部) 共形平坦流形的研究. Kuiper 的一个定理 [Ku] 说对任意的共形平坦的单连通流形 M, 总可以找到M到标准球面的开共形映照, 而且它在 S^n 的共形微分同胚之下是唯一的. 这个映射叫做拓展映射(developing map). 我们用Ω记其象集, $\Lambda=S^n-\Omega$.

Schoen 和 Yau 得到了Λ的 Hausdorff 维数与M的标量曲率的符号的关系的结果. 它们可以叙述如下:

1. 如果M是完备的(可以是紧的)共形平坦流形, 而且标量曲率 $R\geqslant 1$, 则拓展映射是到 S^n 中的共形微分同胚. 因此M被 S^n 中一个开集所共形覆盖. 这个证明关键性地依赖于共形算子的 Green 函数;

2. 如果M是紧致共形平坦流形, 且标量曲率为正, 则 $_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)=0$, 这儿左下标的 k 表示 k 维 Hausdorff 测度;

3. 若M是被 $\Omega\subset S^n$ 共形覆盖的紧流形, 且 $_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)<\infty$, 则 M 在其共形类中有标量曲率 $R\geqslant 0$ 的度量. 据猜测, 若 $R\geqslant 0$, 则 $_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda)<\infty$.

主要的想法是用拓展映射, 把问题化成 S^n 的开集上的 Yamabe 方程的研究. 证明的其余部分是相对地容易的. 利用同样的技巧, Schoen 和 Yau 证明了对于具有正标量曲率的共形平坦流形 M, $\pi_i(M)=0$, $2\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}$. 他们的结果有些对完备流形也成立.

§3. 调和映照

调和映照是几何和分析中的重要对象。它们作为某些函数空间上的能量泛函的临界点自然出现。调和映照反映了流形的许多几何性质。

给了 Riemann 流形 M 和 N，考虑映射空间 $C^r(M, N)$。一个问题是找出这个空间中的好的（即典则的）代表元。对于映照 $f: M \to N$，我们定义它的能量 $E(f) = \int_M |df|^2 dv_N$。一个调和映照就是这个能量的临界点。首要的问题是存在性、唯一性及正则性。

1. 存在性、唯一性及正则性

最初的主要的工作是 J. Eells 和 L. Sampson [ES] 的。他们证明当 M, N 是紧流形且 $K_N \leqslant 0$ 时，在每一个同伦类中都有调和映照。他们通过一个非线性热方程对一个任意的映照变形。通过适当的估计，并过渡到极限，就得到了调和映照。事实上，若 $K_N < 0$ 且秩 $\geqslant 2$，则调和映照在其同伦类中是唯一的 [Hr]。后来，R. Hamilton [Ha] 用 [ES] 中的方法加上一些巧妙的估计，解决了 M 是带边流形时的 Dirichlet 问题。这类证明当去掉曲率非正条件时不再适用。Eells 和 Wood [EW1] 证明了不存在 2 维环面到球面的度数为 1 的调和映照。

我们也可以不在一个同伦类中，而在具有相同的在 π_1 群上的作用的类中找调和映照。我们说两个映照 $f, g: M \to N$ 是 π_1 等价的，如果 $f_* = g_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$。当 M 是 Riemann 面时，L. Lemaire [Lm] 证明了在 π_1 等价类中，存在正则的、使能量极小的调和映照。

这个问题的另一种处理由 Sacks-Uhlenbeck ([SaU]) 及 R. Schoen-S.T. Yau ([ScY1]) 给出。Schoen 和 Yau 考虑函数空间 L_1^2 并证明了对 $u \in L_1^2(M, N)$，u_* 是有意义的并且在弱极限之下不变的。用弱闭集 $\{f \in L_1^2(M, N) | f_* = (f_0)_*\}$，再加上二维极小调和映照的正则性，可以证明在这个类中有光滑的调和映照。

Schoen 和 Yau 的证明还可以通过 f 在 M 的二维骨架上的限制而推广到高维. (White [Wh] 也注意到这一点.) 有理由相信，可以找到能量极小的映射，它在 π_2 上的作用与给定的映射的作用在某种意义上相象.

对于极小的调和映射，R. Schoen 和 K. Uhlenbeck 做了很好的工作 ([ScU1, 2]). 通过精巧地应用比较的映照，他们证明了能量极小的调和映照的奇点集的 Hausdorff 余维至少是 3，用他们的定理还可以重新推出 Sacks 和 Uhlenbeck 的一个定理.

2.非紧流形

非紧流形的调和映照的理论比紧流形的情形要复杂得多. 一个原因是，当我们选取映照的一个极小化叙列时，它们的能量不一定集中在一个有界域中. 另一方面，人们希望通过对流形的拓扑的适当的限制，可以避免上述情形.

对于 L^2 调和映照，即有限能量的弱调和映照，有时可以通过附加一些几何的或拓扑的限制条件而证明存在性. 当 N 是曲率非正的流形时，Schoen 和 Yau[ScY2] 推广了 Eells-Sampson [ES] 和 Hartman [Hr] 的工作. 他们证明了如果 N 是非正截曲率的紧流形，M 完备且 $f: M \to N$ 能量有限时，f 在紧集上与能量有限的调和映照同伦.

后来，[ScY3] 一文通过具体地计算 $N \times N$ 上距离函数 d^2 的 Hessian 而证明了同一个同伦类中的调和映照的集合是连通的 (当 M 紧致时见 [Hr]) 并且可以全测地浸入到 N 中去. 而且，在 $\pi_1(N)$ 无非平凡 Abel 子群且 M 的象不是点也不是圆周时，它是一个点. 这儿我们假设了 M 具有有限体积并且调和映照能量有限. 他们也用调和映照研究了有限群在紧流形上的光滑作用.

3.刚性

当 M 和 N 是维数 $\geqslant 3$ 的负曲率的 Einstein 流形时，自然要问：调和的同伦等价是否一定是等度? 这是基于缺人负曲率的流形的调和映照的唯一性及 Mostow 的刚性定理. 如果这是对的，它将在秩为 1 的对称空间的情形给出 Mostow 刚性定理的另一个证

明.

对于负曲率的流形M和N，问题是：调和的同伦等价是否一定是微分同胚？Schoen-Yau[ScY4] 和 Sampson[Sa1] 在M和N是 Riemann 面时证明了这是对的．如果只假定曲率非正，Calabi 对N是环面的情形造出了一个反例.

通过在微分同胚集合中使能量极小并配合一个平移的推理，Jost-Schoen[JS] 对于同亏格的曲面造出了调和微分同胚，而且他们不用到任何曲率的假设.

当M和N是 Kähler 流形时，调和映照的例子是很多的，例如全纯映照就是调和的．另一方面，Yau 推测当N曲率是负时，调和映照是全纯的．为了解决 Yau 这一猜测，Siu[S2] 证明了当N是强负曲率时且f的秩在某一点至少是 4 时，f或是全纯的，或是反全纯的．N的曲率强负的定义与曲率算子是负的相似．人们希望能弱化这个条件，但如果只假设负的全纯双截曲率，则类似于 Siu 的定理的命题是错的． 这是因为对 $M = B^n/T$（看成CP^n中的正则嵌入子簇)，M的任意超平面截面具有负的全纯双截曲率并且一般不是刚性的.

近来，Jost-Yau[JY1, 2] 考察了同伦等价于 $N = D \times D/T$ (T 可约)的复曲面M上的复结构．令 $f: M \to N$ 是调和的同伦等价，这儿M是 Kähler 的． 通过研究叶状结构 $f^* = \text{const} \cdot 1$ (特别是奇点集)，他们证明了M的万有复迭与 $D \times D$ 全纯等价.

接着，Mok 对于维数任意的而且在 Kähler 度量的范畴中同伦于多圆柱的不可约商空间的那些复流形证明了一个刚性定理．他也考虑了 Jost 和 Yau 研究的叶状结构.

Jost 和 Yau 还把刚性定理推广到拟投影流形去.

对于曲率强正的紧致流形，我们希望能证明：要么它是局部 Hermite 对称的，要么它的复结构是刚性的，Sampson[Sa] 研究了M是 Kähler 且N 是有 Hermite 负曲率，即 $R^N_{i\bar{j}k\bar{l}}u^i v^j \bar{u}^k \bar{v}^l \leqslant 0$ 的情形．基本上照 Siu 那样地应用 Bochner 技巧，他证明了M到N所有调和映照都是全纯的． 利用 Sampson 的结果加上调和映照

的存在性定理，我们可以很容易地得到 Kähler 流形的拓扑型的限制。

另一个有趣的情形是M和N是 Kähler 流形并且N有正截曲率的情形. 是否每个极小调和映照都是全纯的或反全纯的? 这个问题只在 $M = CP^1$ 时有答案. 并且如果我们能在加上N是不可约对称空间的假设后证明这命题，则下列猜测可能是对的: 不可约对称 Kähler 流形只有一个 Kähler 结构. 注意，在可约的 Kähler 流形 $CP^1 \times CP^1$ 上，存在无穷多 Kähler 的复结构.

4.物理中的调和映照

从曲面到 Riemann 流形、特别是对称空间的调和映照的分类是数学物理学家关心的. 例如，著名的旋模型 (chiral model) 就是研究 S^2 到某个对称空间的映照.

最简单的对称空间是实的及复的投影空间. 在 [Cal] 中，Calabi 给出了曲面到实投影空间的迷向调和映照的一个有效的参数化. 在 Calabi 和物理学家的工作的基础上，Eells 和 Wood [EW2] 建立了全迷向调和映照 $\phi: M^2 \to CP^n$ 及序偶 (f, r) 的一一对应，这儿 $f: M^2 \to CP^n$ 是个饱满的 (full) 全纯映照并且 $0 \leqslant r \leqslant n$ 是个整数 (定义见 [Cal] 和 [EW2]). 他们的想法是: 如果 $f: M \to CP^n$ 是全迷向映照，则对某个 r 和 s，$r+s=n$，映照

$$f = [\phi \oplus D''\phi \oplus \cdots \oplus (D'')^{r-1}\phi \oplus D'\phi \oplus \cdots \oplus (D')^s\phi]^{\perp}$$

是饱满的全纯映照，这儿 D' 及 D'' 是协变导数的 $(1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 分量.

后来，Bryant ([Br1], [Br2]) 讨论了曲面到 S^6 及 S^4 的调和映照. 在 Calabi 及 Penrose 的 twistor 构造的启发下，他考虑了一类特殊的共形调和映照，即超极小曲面 (super-minimal surface) (注意，Hopf 已研究过这种曲面的雏型). 他建立了超极小曲面同 CP^3 中的水平曲线的一一对应，后者是相对于 twistor 纤维化: $CP^3 \xrightarrow{T} S^4$ 而言的. 通过构造这种曲线，Bryant 证明了任意 Riemann 曲面可以共形地极小浸入 S^4. 对于一般的四维

流形的情形，参看 [ESa].

近来，K. Uhlenbeck[U3] 讨论了单连通 2 维域到实李群 G_R 的调和映照的空间 H（用物理学家的语言，即 chiral 模型）。她研究了流形 H 的代数结构及其与 Kac-Moody 代数的关系。

调和映照领域的另一个尚未开垦的领地是曲面到 Ricci 平坦的三维 Kähler 流形的调和映照的分类。对这一问题的兴趣是理论物理中的超弦（superstring）的研究引起的。

§4. 极小子流形

微分几何中另一个重要的课题是极小子流形的研究。在这一节中，我们主要考虑紧致三维流形中的极小曲面。极小曲面（除非有相反的声明）总是假定是正则的、嵌入的。

一般说来，如果 M 的拓扑不允许某个曲面在其中收缩到一个点，则不难找到浸入的极小曲面。此外，有时候还可以证明曲面是嵌入的。例如 Meeks 和 Yau[MY] 证明了如果 $\pi_2(M)\neq 0$，则存在嵌入的 S^2 及 RP^2，它们张成作为 $\pi_1(M)$-模的 $\pi_2(M)$。这个定理可用来研究三维流形上的有限群的作用。

用"山径原理"（mountain pass principle）去造极小曲面比较难。如何用 Ljusternik-Schnirelmann 理论去找出许多极小曲面（或具有特殊的拓扑型的）也不清楚。Sacks-Uhlenbeck [SaU] 把摄动的能量泛函与"Morse 理论"结合起来证明了任意 n 维流形 M 包含至少一个浸入的极小的 S^2，如果对某个 k，$\pi_k(M)\neq 0$。Siu 和 Yau 利用了 Sachs-Uhlenbeck 这一工作去解决 Kähler 几何中的 Frankel 猜测、最近，M. Micalif 及 D. Moore[MD] 用类似的推理给出 Riemann 几何中的经典的 Pinching 定理一个证明。事实上，他们需要的 pinching 假设更弱。

Pitts 在他的论文 [Pi] 中引进了"殆极小 varifold"的概念。粗略地说这很接近于局部极小的 varifold 的概念。利用整系数闭链群的同伦群的非平凡性 [A1]，他证明了任意维数 $\leqslant 6$ 的流形中有非空的、紧的、嵌入的光滑极小超曲面。他的想法是应用极小

极大原理于 S^1 到整系数流（currents）的映照上，后者据 Almgren 建立的同构 [A1] 是非平凡的。由于这个造法太一般了，我们得不到这个超曲面的拓扑的任何信息。近来，R. Schoen 和 L. Simon [SS] 推广了 Pitts 的工作。他们证明了任意流形中有极小超曲面，其奇点集的 Hausdorff 余维至少是 7。

对某些三维流形，作者可以对 Pitts 方法造出的极小曲面的亏格做出估计。这个证明是很早之前就有了的。因为它还没有发表，我们在这儿给出证明的完整的大纲。

设 M 表示这个三维流形，R，R_{ij} 及 R_{ijkl} 是其标量、Ricci 及截曲率。令 Σ 是 Pitts 造出的极小曲面；K，A 及 e_3 是 Σ 的 Gauss 曲率、第二基本形及法向量场。由 Pitts 的造法，我们知 Σ 的指数是 1，这个条件等价于算子 L 的第二特征值的非负性，这儿

$$L=-\Delta-(\mathrm{Ric}(e_3)+\|A\|^2),$$

Δ 是曲面 Σ 的 Laplace 算子。换言之

$$\int_\Sigma(\mathrm{Ric}(e_3)+\|A\|^2)f^2dv\leqslant\int_\Sigma\|\nabla f\|^2dv$$

对所有垂直于第一特征函数 u_1 的函数 f 成立。

现在我们用共形面积这个概念（这是共形不变量）来给出第二特征值 λ_2 的依赖于 M 及 Σ 的亏格的上界估计。

设 $F:\Sigma\to S^n$ 是到单位球中的共形浸入，则 F 与任意的共形变换 $g\in\mathrm{Conf}(S^n)$ 的复合也是共形浸入。因为 u_1 是正函数。用 [LY2] 中的论证，可以找到 $g_0\in\mathrm{Conf}(S^n)$，使得 $g_0\circ F\perp u_1$，即

$$\int_\Sigma(g_0\circ F)u_1dv=0.$$

现在考虑新映照 $g_0\circ F$，我们仍用 F 记它，$F=(f_i)$，$\Sigma f_i^2=1$，因为 Σ 指数是 1，

$$\int_\Sigma(\mathrm{Ric}(e_3)+\|A\|^2)f_i^2dv\leqslant\int_\Sigma|\nabla f_i|^2dv$$

并求和，得

$$\int_\Sigma(\mathrm{Ric}(e_3)+\|A\|^2)dv\leqslant\int_\Sigma\sum_i|\nabla f_i|^2dv.$$

因为 F 是共形的，$\int_\Sigma \sum_i |\nabla f_i|^2 dv = 2\mathrm{Area}(F(\Sigma))$.

因此

$$2\inf_F \sup_{g\in \mathrm{Conf}(S^n)} \mathrm{Area}(g\circ F(\Sigma)) \geqslant \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + \|A\|^2)dv.$$

左边的这一项是共形不变量 $V_c(n, \Sigma)$，叫做 n 维共形面积. 它对所有 n 的下确界是 $V_c(\Sigma)$，叫做曲面 Σ 的共形面积.

用 Σ 在 S^2 上的分歧覆盖，可以证明 $V_c(\Sigma) \leqslant 4\left(\frac{g(\Sigma)}{2}+1\right)\pi$，这儿 $g(\Sigma)$ 是 Σ 的亏格 [Gri]. 因此

$$8\left(\frac{g(\Sigma)}{2}+1\right)\pi \geqslant \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + \|A\|^2)dv.$$

另一方面，因为 $\mathrm{Ric}(e_3) + \|A\|^2 = \mathrm{Ric}(e_1) + \mathrm{Ric}(e_2) - 2K$，如果我们假设 M 的 Ricci 曲率非负，则

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(e_3) + \|A\|^2) \geqslant -\int_\Sigma 2K dv = 4\pi(2g(\Sigma) - 2),$$

把上面两个不等式结合起来就得到

$$8\pi\left(\frac{g(\Sigma)}{2}+1\right) \geqslant 4\pi(2g(\Sigma) - 2),$$

因此 $g(\Sigma) \leqslant 4$，这就是所要求的 Σ 的亏格的上界. 事实上，应该能够再进一步改进这个估计，因为 $V_c(M)$ 的估计不是最优的. 能否把上面的推理推广去研究高指数的极小曲面?

人们想要估计极小曲面的亏格的原因是它们包含了关于背景空间 M 的信息. 例如，具有正标量曲率的三维流形 M 的一个嵌入的极小曲面提供了 M 的 Heagard 分裂的一个好的候选者. 而且当 M 是三维同伦球且曲面的亏格小于或等于 2 时，M 实际上就是球. 因此，若我们可以造出一个极小曲面，它正好是一个 Heagard 分裂并且给出其亏格一个好的估计，那末我们就朝着 Poincaré 猜测跨出了一大步.

极小曲面理论中一个重要的问题是流形中多个极小曲面（甚至无穷多个）的存在性. 在 2 维球上，至少存在三条闭的、嵌入的

测地线，椭球面上恰有三条，因此这个估计是最优的.

对于三维球，人们希望证明存在至少四个极小球面. 人们也希望知道，中心在 $\mathbf{R}^4$ 的原点的一个椭球面上，是否仅有的极小 2 维球是与三维坐标面相交得到的那四个.

Smith 和 Simon 用 Pitts 的一个思想证明了任意三维球面中有嵌入的 2 维球. 他考虑映射度为 1 的映射 $F: I \times S^2 \to S^3$，使得在每个片上(两端的除外)，$F(t,\cdot): S^2 \to S^3$ 是个嵌入. 他证明了如果取

$$\min_{F} \max_{t\in[0,1]} \mathrm{Area}(F(t, S^2)),$$

则得到一个嵌入的 S^2. 对于同伦球，是否也有相似的定理?

另一个问题是去了解一个正 Ricci 曲率三维流形中具有给定的亏格 g 的所有极小曲面的空间. 最近，Choi 和 Schoen[CS] 证明对固定的 g 这个空间实际上是紧的. 我们想提到的是甚至对三维球，这个紧性也是新的. 他们的证明是基于 Choi 和 Wang[CW] 关于 Σ_g 的面积的估计. 这个面积的上界则控制了极小曲面叙列的收敛性. 有了这个紧性的定理之后，仍然存在几个有趣的问题. 例如，当 M 无对称性时，是否会存在连续的极小曲面族? 当 M 有对称性时，是否任何这样的连续族都是等距群给出的?

第一特征值的估计总是有意思的，对极小曲面尤其如此. 对于标准的三维球，在极小曲面上坐标函数都是特征值为 2 的特征函数. Yau 猜测 2 就是第一特征值. 为了证明 Yau 的猜测，Choi 和 Wang[CW] 证明了在 Ricci 曲率不小于 2 的三维流形中，极小曲面的第一特征值 λ_1 至少是 1. 化成极小曲面的共形面积，Li 和 Yau 获得了 [LY2] λ_1 的如下的上界

$$\frac{2\mathrm{Conf\ Area}(\Sigma_g)}{\mathrm{Area}(\Sigma_g)} \geqslant \lambda_1(\Sigma_g).$$

把这个不等式推广到高次的特征值并研究极小曲面的高次特征值是个有意思的问题.

设 M 是三维同伦球. 如果 M 不是 S^3，则它含有一个假 (fake) 三维圆盘. 在上面赋一个度量，使它在近边界处是渐近于乘积度

盘．如果在同痕于边界的 S^2 中考虑面积的极小化，则极限的 S^2 将包住一个假圆盘．在这个 S^2 上画一条 Jordan 曲线使得它把 S^2 分成面积相对的两部分． 那么可以期望此 Jordan 曲线在此假圆盘中界定一个嵌入的极小圆盘．如果能做到这一点，则可以再压缩这个 S^2 从而得到 Poincaré 猜测的证明．

最后，极小曲面理论应用到三维拓扑已获得了意外的成功．我相信极小曲面的更透彻的研究将会揭示出三维流形的更多的奥秘．

§5. Kähler 几何

下面我们考虑复几何中的四个基本主题：

1. 复结构及近复结构的存在性．

2. 复流形上的 Kähler 结构和代数结构的存在性．

3. 单值化问题与度量的参数化．

4. 复流形上的解析对象 (object)．例如：解析闭链 (cycles)，全纯向量丛等等．

相应地，我们将本节分成四部分．

1. 复结构和近复结构．

设 M 为偶数维定向微分流形．近复结构 J 的存在等价于向量丛的结构群由 $GL(2n, \mathbf{R})$ 到 $GL(n, \mathbf{C})$ 的过渡．这基本上是一个代数问题并已很好地研究了．

然而，什么时候一个近复结构同伦等价于一个可积的近复结构(即由一个复结构而得的)却是个很困难的问题． 当 $n=1$ 时，每一个 M^2 都容许一个近复结构，且这样的结构是可积的和代数的．对于 $n=2$ ven de Van 给出了几个 M^4，它们有近复结构但没有复结构． 他的方法基于对第一和第二 Chern 类的计算．当 $n\geq 3$ 时，至今还没有这样的例子．特别地，我们不知道是否 S^6 的近复结构容许一个复结构．这个问题已提出很长时间了．

回到 $n=2$ 的情形． 对于一个复曲面，由 Hirzebruch 和 Noether 公式我们有 $3\tau=c_1^2-2c_2$，$c_1^2+c_2=12\tau$，因此 $\chi(M)=$

$3\tau(M)$，这里χ是 Euler 示性数．τ为M的指标． 那么我们有下列问题．设M^4为一紧致近复流形，且满足$\chi(M)=3\tau(M)$并以$\mathbf{R}^4$为拓扑覆盖空间．是否每一$\pi_1(M)$的 Abel 子群都是无限循环群？ M是否容许一个复结构使得M以$\mathbf{C}^2$中的单位球为全纯覆盖空间？也许 Lefschetz 定理对于解决这一问题是有用的．

2. Kähler 结构和代数结构．

设M^n为以J为复结构的n维紧致复流形．首先要问，什么时候J是 Kähler 的，也就是说(M, J)容许一个 Kähler 度量？Harvey-Lawson[HL]给出了 Kähler 条件的一个内蕴的刻划：当且仅当M上没有任何正流 (current)是边缘的(1，1)分量．Hodge 理论给出了许多复流形是 Kähler 流形的必要条件．特别地，它们的偶 Betti 数是正的，奇 Betti 数是偶的．此外当(M, J)是 Kähler 的时，它的有理同伦型由它的有理上同调所决定，可参看 Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan 的文章．

现假设M为一 Kähler 流形，即M具有某 Kähler 复结构．是否M容许一个非 Kähler 的复结构？什么情况下M具有一个唯一的复(或 Kähler) 结构？

当$n=2$时，每一个具有偶第一 Betti 数的紧复曲面是 Kähler 的(这来自 Kodaira 的曲面分类．因为 Miyaoka [M1] 证明了具有偶第一 Betti 数的椭圆曲面是 Kähler 的，Siu[S1] 证明了每一K-3 曲面是 Kähler 的． 由此我们知在 Kodaira 分类的七类曲面中，前五类关于每个复结构均是 Kähler 的．剩下的两类具有奇第一 Betti 数，因而不容许任何 Kähler 度量．特别地可看出，在一 Kähler 曲面M^2上，所有的复结构是 Kähler 的．

当$n\geqslant 3$时，情况更加复杂．Calabi[Ca3] 证明了复环$T^3_{\mathbf{C}}$具有非 Kähler 结构．另一方面，我们知道$T^3_{\mathbf{C}}$上仅有的一个 Kähler 结构是其标准结构．

Yau 提出下述猜测：设$M^n(n>2)$为一具负截面曲率的紧致 Kähler 流形，则存在唯一的 Kähler 复结构．当将负截曲率的条件换为负双截曲率时，这猜测将不成立．

对于一个局部 Hermite 对称空间 M^n，$n \geqslant 2$，Calabi 和 Vessentini[CV] 证明了 $H^1(TM)=0$. Siu[S2] 证明了若 M^n 为一具强负曲率的紧致 Kähler 流形，则 M^n 的 Kähler 结构是唯一的，这部分地肯定了 Yau 的猜测.

现假设M是 Kähler 的且微分同胚于单位球的紧致商空间 D^n/Γ. 先于 Siu 的定理，Yau [Y2] 利用不等式

$$(-1)^n \cdot C_1^{n-2}C_2 \geqslant \frac{(-1)^n n}{2(n+1)} \cdot C_1^n \tag{2}$$

这里 $C_1(M)<0$，证明了M的 Kähler 度量是唯一的. 问题是：什么时候M的复结构是唯一的？当 $n \geqslant 3$ 时，还没有答案. 仅知道的结果是每一个复结构在 Kobayashi 的意义下是双曲的，即不存在任何 $\mathbf{C}$ 到M的非常值全纯映照.

不等式 (2) 也给出了 $\mathbf{CP}^n$ 上 Kähler 结构的唯一性. n 为奇数时，此结果属于 Hirzebruch 和 Kodaira [HK]（同样可见于 Morrow-Kodaira [MK]). 我们注意到对这类刚性问题，调和映照似乎是很有用的. 特别，Siu 关于 $\partial\bar{\partial}$-Bochner-Kodaira 技巧的修改有很好的使用前景(见 Siu[S2] 和 Sampson [Sa]).

关于 Kähler 结构形变到代数结构的问题，我们有著名的 Kodaira 猜测：每一个紧致 Kähler 流形能够变形到一个代数流形. 当 $n=2$ 时这是对的，事实上 Kodaira [Ko] 已经证明了每一紧致 Kähler 曲面可形变为一个代数曲面. 对于 $n \geqslant 3$，Kodaira 猜测尚未解决. 特别地，若 M^n 是一个非代数的紧致 Kähler 流形，TM 为它的全纯切丛，是否 $H^1(TM) \neq 0$？由于一个 $H^{2,0}=0$ 的紧致 Kähler 流形是代数的，相应的问题是：若M是 Kähler 的，是否由 $H^{2,0} \neq 0$ 能推出 $H^1(TM) \neq 0$？（不难构造一个 $H^{2,0}(M)$ 到 $H^1(TM)$ 的映照.)

3. 单值化.

在复一维情形，我们知道每一 Riemann 面都是下列曲面之一：

$\mathbf{CP}^1$：Riemann 球，具有唯一的复结构.

E：一个椭圆曲线，由 C 全纯覆盖.

$\Sigma_{g_1}(g>1)$：一个由单位圆盘 $D\subseteq C$ 全纯覆盖的曲面.

在高维情况，许多结果和分类在推广上面的分类的努力中得到. 人们想知道在什么几何条件下M双全纯同胚于一个高维的 CP^1，E 或 $\Sigma_g(g>1)$ 的类似物. 这对应于流形是椭圆的、抛物的或双曲的. 通常，唯一性是在双正则、双有理或单有理的意义下理解. 在非紧致的情形，人们试图处理无穷远边界及把M紧致化为某一射影代数簇 $\widetilde{M}$ 的一个 Zariski 开集，使得 $M=\widetilde{M}\backslash$(子簇).

A. 椭圆流形

Frankel [Fr] 猜测任何具正双截曲率的紧致 Kähler 流形双全纯同胚于 CP^n；他证明了 $n=2$ 的情形. 后来 Mori 和 Siu-Yau 独立地证明了一般情形. Mori 实际上在切丛是丰富 (ample) 的较弱的假设下证明了 Hartshorne 猜想.

[Y6] 中提出了下述猜测：若M为一具非负双截曲率的单连通的紧致 Kähler 流形，则M等度同胚于一个 Hermite 对称空间和复投影空间(不一定赋以 Fubini-Study 度量).

S. Bando [B1] 证明了 $n=3$ 的情形. Mok 和 Zhong (钟家庆) [MZ] 证明了，若加上M是 Einstein 的条件，则M双全纯等度同胚于一个 Hermite 对称空间.

在 [S3] 中 Siu 给出了二次超曲面的一个曲率刻划. 他证明了若 M^n, $n\geqslant 3$ 为一处处 m-正$\left(m<\frac{n}{2}+1\right)$并在某些点 2-正的紧致 Kähler 流形，则$M$双全纯同胚于 CP^n 或二次超曲面 $Q^n\subseteq C^{n+1}$. "在这里点 $PP\in M^n m$-正意味着 P 点的双截曲率非负且 $\dim N_p(\xi))<m$ $\forall\xi\in T_pM$，$N_p(\xi)=\{y\in T_pM\mid R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}y^i\bar{y}^j\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta=0\}$.

不久前，H.-D Cao 和 B. Chow [CC] 在M具非负曲率算子的假定下证明了此猜测. 最近，Mok 宣告他完全证明了这个猜测.

设 M^n 为一具正 Ricci 曲率的紧致 Kähler 流形 (这等价于 $C_1(M)>0$). 我们有下述问题:

(1) 是否 M^n 是单有理的？即是否存在 $\mathbf{CP}^n$ 到 M^n 的有理映照？

(2) 是否只有有限个(在拓扑的意义下)具正第一 Chern 类的 n 维代数流形？

(3) 是否 $C_1(M)^n \leqslant C_1(\mathbf{CP}^n)^n$？

当 $n=2$ 时，M^2 为一 del Pezzo 曲面，(1)，(2) 和 (3) 是对的。当 $n=3$ 时，M^3 为一 Fano 3 维流形，即一具丰富反典型线丛的 3 维代数流形。Mori 和 Mukai [MM] 给出了具第二 Betti 数 $b_2(M)\geqslant 2$ 的 Fano 3 维流形的一个完全分类。他们实际上证明了在变形等价的意义下有 87 类具 $b_2(M)\geqslant 2$ 的 Fano 3 维流形。且满足 $6\leqslant b_2(M)\leqslant 10$ 的 Fano 3 维流形等度于 $\mathbf{CP}^1\times S_{11-b_2(M)}$，这里 S_d 表 d 次 del Pezzo 曲面。$b_2=1$ 的 Fano 3 维流形称为第一类的 Fano 3 维流形，并已由 Isokovskih [Is] 分类了。利用上述分类，容易验证 (1)，(2) 和 (3) 是对的。但对于 $n\geqslant 4$，(1)，(2) 和 (3) 是否成立尚不知道。

回忆 Gromov [Gr] 的定理：存在一仅依赖于 n 的常数 $C(n)$ 使得 $\sum_{i=0}^{n} b_i(M^n)\leqslant C(n)$ 对任何具非负截曲率的 Riemann 流形都成立。当 M 是 Kähler 的，能否将条件“非负截曲率”换成“正 Ricci 曲率”？人们也想了解具 Kodaira 维数 $K(M)=-\infty$ (即 $H^0(M,K^m)=0,\ \forall m>0$，$K$ 表典则线丛)的代数流形。当 $n=2$ 时，它们是有理曲面或直纹曲面。

B. 抛物流形

设 M^n 为一个可由 $\mathbf{C}^n$ 全纯覆盖的紧致 Kähler 流形。是否它也可由一个复环 $T^n_{\mathbf{C}}$ 覆盖？当 $n=2$ 时，Iitaka 证明这是对的。当 $n\geqslant 3$ 时，还未解决。即使当 $n=2$ 时，Kähler 条件也不可去掉(否则有反例存在)。

设 M^n 为一具正截曲率的非紧致完备的 Kähler 流形，是否 M 双全纯同胚于 $\mathbf{C}^n$？该问题已提出很长时间了。Siu-Yau [SY2] 和 Mok-Siu-Yau [MSY] 证明了下述事实：设 M 为一个完备的非紧

致 Kähler 流形，$p \in M$ 且 $r(x) = \mathrm{dist}(x, p)$. 那么:

(a) 若 $\pi_1(M) = 0$，$-\frac{A}{r^{2+\varepsilon}} \leqslant K_M \leqslant 0$ 对某一 $\varepsilon > 0$ 成立，则M双全纯等度于 $\mathbf{C}^n$.

(b) 若 p 为M的一个 pole 点（即 $\exp_p$ 是微分同胚）$|K_M| \leqslant A/(1 + r^2)^{1+\varepsilon}$，则 M^n 双全纯同胚于 $\mathbf{C}^n$. 若加上 $K_M < 0$，则 M^n 等度同胚于具平坦度量的 $\mathbf{C}^n$.

(c) 若 $K_M \geqslant 0$，$0 \leqslant R \leqslant \frac{A}{r^{2+\varepsilon}}$ 且 $\mathrm{vol}(B(p, r)) \geqslant Cr^{2n}$，则$M$双全纯同胚于 $\mathbf{C}^n$.

这里A和C为任何正常数；K_M 和R分别表示M的截曲率和纯量曲率.

Mok 改进了这些结果，将 $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ 减弱到 $\frac{1}{r^2}$. 更确切地说，他证明了下面的:

(d) 若M具正双截曲率，$0 < R < \frac{A}{r^2}$，且 $\mathrm{vol}(B(p, r)) \geqslant Cr^{2n}$，$A$，$C$ 为正常数，则M双全纯同胚于仿射代数簇 X.

设 M^n 为一 Kodaira 维数为 $K(M) = 0$（即存在 C，使得 $H^0(M, K^m) \leqslant C$，对所有的 $m > 0$ 成立，这里K为典则线丛)的代数流形. 可给出这些流形的分类吗？注意 $C_1(M)$ 为$K(M) = 0$ 的一个特殊情况. 当 $n = 2$ 时，恰有两类代数流形满足$K(M) = 0$，它们是 Abel 子簇的商空间或 K-3 曲面. 当 $n \geqslant 3$ 时，尚未知晓，$n = 3$ 的情形对于物理学中的超弦（superstring）理论将是很重要的.

C. 双曲流形

若M为一具负截面曲率的代数流形，那么M是否能够由 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域Ω所全纯(分支)覆盖？一个较弱的问题是：若M为一具负截曲率的单连通 Kähler 流形，是否存在M上的足够多的有界全纯函数以致可以分离点并给出局部坐标？至今，甚至在 $\widetilde{M}$ 为一紧致流形M的覆盖空间的假设下，也未证明任何非常数的全纯函

数的存在.

B. Wong [Mo2] 证明了若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为一具光滑边界的有界域且为某一紧致流形的覆盖空间，那么 Ω 必为球. P. Yang [Yg] 证明了若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中秩大于1的有界对称域，则不存在任何 Ω 上的 Kähler 度量使其全纯双截曲率介于两个负数之间. 特别地，Ω 不能是任何具负双截曲率的紧致 Kähler 流形的覆盖空间. 因此若一个有界域覆盖一具负曲率的紧致 Kähler 流形的话，那么它必定是相当不光滑的.

最近，Mostow 和 Siu [MS] 通过巧妙地把 2 维球的 Poincaré 度量和 Bergman 度量并到一起而构造了一个具负截曲率的 Kähler 曲面 M. 他们证明 M 的万有覆盖 $\widetilde{M}$ 不是球，其方法是验证对 $\widetilde{M}$ 而言 $C_1^2<3C_2$. 这种流形不微分同胚于一个局部对称空间，还不知道它的万有覆盖是否是有界域. 是否一个具(拓扑地)平凡切丛并为某一紧致代数流形的覆盖空间的非紧致完备 Kähler 流形双全纯同胚于一个域?

对于一个具正典型线丛的代数曲面，是否 $\left|\frac{C_2}{C_1^2}-\frac{1}{3}\right|$ 足够小能推出 M 有一个具负截曲率的 Kähler 度量? 这一点尚不知道.

代数曲面的拓扑是一个很重要的主题. 经 Freedman 和 Donaldson 最近的努力，似乎有理由相信每一单连通的四维光滑流形可表为代数曲面的连接和（可能具不同的定向）. 最近由 Donaldson 得到了关于单连通的代数曲面的不可约性的很强的结果. 显然若要将它表为可微流形的连接和，则只会出现 $\mathbf{CP}^2$ 因子. 或许满足这些不可约条件的单连通的四维流形微分同胚于一个代数曲面.

当基本群无限时，预计代数曲面的拓扑则困难得多. Shafarevich 猜测代数流形的万有覆盖是全纯凸的. 这给了除已知的 Chern 数不等式外的一些拓扑信息.

4. 解析对象.

为了了解复结构，了解与它有关的解析对象是很重要的. 这

里给出两个例子.

A. 全纯映照和向量丛

对于一个复流形 M，自然的全纯向量丛有 TM, TM^*, $\Lambda^k TM$, $\otimes^k TM$ 等等. 其中最重要的是典则线丛 $\Lambda^n TM^*$.

用吹大 (blowing up) 点或子流形可得到附加的解析对象. 联系拓扑不变量和解析不变量的 Riemann-Roch 定理对于从给定的拓扑信息或复信息中构造解析对象或不变量是一重要的工具.

Yang-Mills 理论在构造 Kähler 流形上的全纯向量丛和其它对象中通常是很有用的. Taubes [T1] 利用 Yang-Mills 方程的反自对偶 (anti-self-dual) 解来构造 Kähler 曲面 M^2 上的秩为 2 的全纯向量丛. 是否可以用这个理论来证明本文作者的定理:"若 M^2 是单连通的, 且它的 cup 积是正定的, 则 M^2 双全纯同胚于 $\mathbf{CP}^2$" 呢?

Taubes [T2] 在两个 Chern 数之间的一个不等式成立的假设下也构造了 Kähler 曲面上的全纯向量丛 (也可见于 Donaldson [D1] 和 [D2]). 至今为止, 上面的方法仅用于 2 维的情形. 在高维情形, 还没有一个好的方法来构造全纯向量丛. Taubes 的想法可推广使用于构造高维流形上的全纯向量丛. 目前还不清楚有多大的一类全纯向量丛可以用这样的方式来构造.

B. 解析闭链

解析闭链简单地说就是解析子簇的形式和. 设 M^n 为一代数流形, $V\subset M$ 为一余维是 p 的解析子簇, 则 V 的基本上同调类 η_V 属于 $H^{p,p}(M)\cap H^{2p}(M, \mathbf{Z})$. $\alpha\in H^{2p}(M, \mathbf{Q})$ 是解析的如果它能表示为余维为 p 的子簇的基本类的有理系数的线性组合, 即 $\alpha=\sum_{i=1}^{k} b_i\eta_{V_i}$, 这里 $b_i\in\mathbf{Q}$ 且 V_i 是 M 的子簇. 显然, 每一 $H^{2p}(M, \mathbf{Q})$ 中的解析元属于 $H^{2p}(M, \mathbf{Q})\cap H^{p,p}(M)$. 反过来, 我们有 Hodge 猜想: 每一 $\alpha\in H^{2p}(M, \mathbf{Q})\cap H^{p,p}(M)$ 是解析的. 当 $p=1$ 时, 这是成立的, 称为关于 (1, 1) 类的 Lefschetz 定理, $p\geqslant 2$ 尚无结果.

在 Kähler 流形 M^n 中每一个解析子簇都是体积极小的. 这可直接由 Wirtinger 和 Stokes 公式得到. 反过来,在适当的条件下,体积极小子流形成为子簇. 例如, Siu-Yan [SY1] 证明了若 $f:\mathbf{CP}^1 \to M^n$ 是能量极小的,且M的双截曲率是正的,则 f 是全纯的或反全纯的.

Lawson 和 Simons 证明了 $\mathbf{CP}^n$ 中每一个稳定的流 (current) 都是代数子簇. 他们的方法如下: 设 g_t 为 $\mathbf{CP}^N$ 中的单参数投影变换群,设

$$B(X, X) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{Vol}\, g_t(M))|_{t=0}, \quad 这里\ X = \frac{dg_t}{dt},$$

他们证明了B的迹是负的,除非M是一个子簇.

Lawson-Simons 的方法给出了一个解决 Hodge 猜想的途径. 给定一个嵌入 $f: M^n \to \mathbf{CP}^N$ 和一个元素 $\beta \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbf{Q})$, 定义一个体积函数: $\mathrm{Vol}: PGL(N+1, \mathbf{C}) \to \mathbf{R}$, $g \longmapsto \inf_C\{\mathrm{Vol}_g(C) | C$ 是α的代表$\}$. 这里α为β的 Poincaré 对偶且 $\mathrm{Vol}_g(C)$为对应于度量$(g\circ f)^* ds_0^2$的体积,而 ds_0^2 表 $\mathbf{CP}^N$ 上的 Fubini-Study 度量. 若存在全纯的代表α的 C, 则 $\mathrm{Vol}_g(\alpha) = \mathrm{Vol}_g(C)$ 不依赖于g的选择. 因此 Vol 为常函数并达到它的极小值. 另一方面,若 Vol 有一极小值, 则 Lawson-Simons 的方法证明了存在一全纯的代表α的 C. 因此, 如果能够证明 Vol 达到极小值, 则 Hodge 猜测就证明了.

Siu [S2] 得到了下面的结果: 设M为一具强负曲率的紧致 Kähler 流形. 那么任何 $H_{2k}(M, \mathbf{Z})$ 中的元, $K > 2$, 若能表为一个紧致 Kähler 流形的连续象, 则它可表为一个解析子簇. 他利用了 Bochnor 型公式于 $\partial f \wedge \partial \bar{f}$ 来得到调和映照的复解析性. 然而似乎很难确定什么样的闭链能够表示为 Kähler 流形的连续象.

§6. 复流形上的典则度量

给定一个复流形 M, 人们可以找M上的"典则"度量以构造复

结构的不变量．对典则度量的一个很自然的要求是它们的全体可参数化为一有限维的空间且在双全纯变换群下是不变的．

1. Bergman, Kobayashi-Royden 和 Caratheodory 度量．

Bergman 度量首先作为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域上一个自然度量而导出．后来，该定义被推广到其典型线丛K容许充分多的截面的复流形上．对于 $\mathbf{C}^n$ 中的域 D，让 $H^2(D)$ 表D上的平方可积的全纯函数空间．选择该空间的一组正交基 $\{\phi_i\}$．那么 Bergman 核定义为$K(z, w)=\sum_i \phi_i(z)\bar{\phi}_i(w)$． 这定义不依赖于正交基的选择．且$K$关于$z$和$\bar{w}$是全纯的．

我们现在可定义 Bergman 度量为

$$ds^2=\Sigma \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(z, z) \cdot dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

Bergman 度量的自然性不难从 Bergman 核的定义中看出．设 D_1 和 D_2 为 $\mathbf{C}^n$ 中的两个区域，且 $K_1(z, w)$ 和 $K_2(z', w')$ 分别为它们的 Bergman 核．若 $F: D_1 \to D_2$ 为一个双全纯同胚，则K_1和K_2有关系式

$$K_1(z, w)=K_2(F(z), F(w)) \det\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \overline{\det\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)}.$$

若M的典型线丛K有充分多的整体的、平方可积的截面，我们可以选一个正交基$\{\phi_i\}$，给出一个M到$\mathbf{CP}^k$的嵌入．拉回（pull-back）度量 $F^*(ds^2)$ 即为M的 Bergman 度量．当M是复区域时这一定义与前面的 Bergman 度量的定义是相同的，因为D上的任何全纯函数可看成是K的一个截面．

直观地说：对 Bergman 度量的全面理解能够为我们给出一个关于域的自同构的几何的清晰的图象．它将给出许多区域的不变量．近几年基于 Fefferman 的工作 [Fe] 有了许多进展．Fefferman 着眼于 $K(z, z)$ 在区域边界的渐近性质．粗略地说他证明了沿着对角线 Bergman 核有下述展式

$$K(z, z)=\phi(z)/\Psi^{n+1}(z)+\tilde{\phi}(z) \log \Psi(z),$$

这里 $\phi, \tilde{\phi} \in C^{\infty}(D)$，$\phi|_{\delta D}=0$，且$\Psi$为区域$D$的定义函数.

且在边界附近我们有

$$K(z, w)=\phi(z, w)/\Psi^{n+1}(z, w)+\tilde{\phi}(z, w)\log\Psi(z, w),$$

这里 $\phi(z, w)$, $\tilde{\phi}(z, w)$ 和 $\Psi(z, w)$ 分别为 ϕ, $\tilde{\phi}$ 及Ψ满足某些条件的延拓.

人们想更多地了解当Ω不光滑时 Bergman 核和度量的边界性质，度量的曲率性质及其它有关的几何性质. 设Ω为一流形且ds^2_Ω为 Bergman 度量. 若Ω有一个真的自同构的离散群，我们可考虑商空间Ω/Γ并把 Bergman 度量 $ds^2_{\Omega/\Gamma}$ 拉回到Ω. Kazhdan 证明了若Ω的离散自同构群Γ有一 filtration $\Gamma\supsetneqq\Gamma_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq\Gamma_n\supseteq\cdots$，满足$[\Gamma_i, \Gamma_{i+1}]<\infty$ 且 $\bigcap\limits_i \Gamma_i=(1)$，则 Bergman 度量 $ds_i^2=ds^2_{\Omega/\Gamma_i}$ 的拉回 (pullback) 将在Ω上收敛于Ω的 Bergman 度量 ds^2_Ω.

另一有趣的方向是考虑典型线丛的幂的整体截面. 对于r充分大考虑 $H^0(M, K^r)$，选择一个基给出一个映照 $\phi_r: M\to \mathbf{P}(H^0(M, K^r))$. 取 $\mathbf{P}(H^0(M, K^r))$的 Fubini-Study 度量在M上的限制的 $1/r$ 倍，即得M上的一列度量. 人们想知道，当r趋于无穷时，是否有一个极限度量存在. 若这一度量存在，则它将是"典则"的且很有可能是 Kähler-Einstein 的.

对于复流形Ω，有两个其它的内在的伪度量，Kobayashi-Royden 度量和 Caratheodory 度量. 设Δ是$\mathbf{C}$中的 Poincaré 圆盘. 记 $\Delta(\Omega)$ 为Ω到Δ的全纯映照集，$\Omega(\Delta)$ 为Δ到Ω的全纯映照集. 固定Δ上的 Poincaré 距离. Caratheodory 度量定义为 $F_\Omega: T\Omega\to\mathbf{R}^+$，这里$F_\Omega(z, z)=\sup\{|f_*(z)|: f\in\Delta(\Omega), f(z)=0\}$，Kobayashi-Royden 度量定义为

$$F_k: T\Omega\to\mathbf{R}^+,$$

这里 $F_k(z, \xi)=\inf\{|u|: f\in\Omega(\Delta), f(0)=z, f_*(u)=\xi\}$.

明显地，这两个内在度量在全纯映照下距离是递减的，而在双全纯映照下距离不变.

B. Wong [Wo1] 证明了 Caratheodory 度量的全纯截曲率小于或等于 -4，而当度量非平凡时 Kobayashi 度量的全纯截曲率

不小于 −4 (对于 Bergman 度量已知道全纯截曲率不大于 −4). 然而这两个度量的一个弱点是它们在切空间上既非双线性的也非光滑的 (F 一般只是上半连续的).

在某些特殊的情况下,对于这两个度量有较好的了解.例如一个具强负全纯截曲率的流形总有一个非平凡的 Kobayashi-Royden 度量.这一问题的主要定理是 Royden 的,他证明了 Kobayashi-Royden 度量实际上是 Teichmuller 度量. 奇怪的是 Teichmuller 度量具有常数的全纯截曲率. 可以对具有常全纯截曲率的 Finsler 度量的复流形进行分类吗?

Lempert [Le1], [Le2] 证明了在 $\mathbf{C}^n$ 中的凸区域上 Kobayashi 和 Caratheodory 度量实际上是相同的. 利用一个极值映照的存在性,他构造了许多有界全纯函数. 他的理论只在凸区域上起作用,然而怎么才能将他的思想推广或使用这两个度量去构造更一般流形上的有界全纯函数则是很有趣的.

另一个有趣的事实(由 B. Wong 证明的 [Wo2]) 是,若一个 $\mathbf{C}^n$ 中的光滑、有界区域是一个闭流形的覆盖空间,那么它必然是单位球. 这部分地证明了猜测: 一个有界凸区域 (不要求是光滑的)若为某一闭流形的覆盖空间,那么它是对称的. 他的证明需要用到 Kobayashi 和 Caratheodory 度量的边界估计.

一般地,我们希望比较Bergman,Kobayashi-Royden, Caratheodory 度量和下节所讨论的 Kähler-Einstein 度量. 我们知道 Caratheodory 度量是三个中最小的度量. 这可以由 Kähler 流形上的一般的 Schwarz 引理得出 [Y4]. Yau (参看后来 Chan-Cheng-Lu 的改进形式) 证明了若M为一 Ricci 曲率有常数下界的完备的 Kähler 流形, N为一全纯截曲率有负常数上界的 Hermitian 流形, $f: M \to N$ 为一全纯映照,则 $d(f(p), f(p_1)) \leqslant Cd(p_1, p_1)$, C 只依赖于 M 和N的曲率. 当N只是一个 Finsler 空间时是否也是对的? 若是对的,那么人们可希望 Teichimuller 度量一致等价于 Kähler-Einstein 度量.

2. 紧致 Kähler 流形上的 Kähler-Einstein 度量.

设 M 为一个紧致 Kähler 流形，则 M 上的一个 Kähler-Einstein 度量存在的一个必要条件为：

(*) 存在一个 Kähler 类 Ω 使得第一 Chern 类 $C_1(M)$ 上同调于 Ω 乘以一实常数。

这条件等价于：

(*)′ 第一 Chern 类满足 $C_1(M)>0$，$C_1(M)=0$ 或 $C_1(M)<0$。

本文的作者 [Y1],[Y2] 证明了当 $C_1(M)=0$ 或 $C_1(M)<0$ 时(后者也可见于 Aubin [Au3]) 每一 Kähler 类有一个唯一的 Kähler-Einstein 度量．当 $C_1(M)>0$ 时，Kähler-Einstein 度量在自同构群下不变．然而，存在性一般是不成立的，因而人们希望加上一些条件以保证存在性．

我们现在讨论属于 Futaki [Fu1] 的、关于 $C_1(M)>0$ 时 Kähler-Einstein 度量存在性的障碍 (obstruction) 理论同时也考虑"极值度量"的概念(属于 Calabi [Ca2])．在紧致 Kähler 流形 M 上固定一个 Kähler 类 $\Omega=[\omega]\in H^{1,1}(M)$ 并用 H_Ω 记属于 Kähler 类 Ω 的所有 Kähler 度量的空间．定义泛函：

$$F:H_\Omega\to \mathbf{R},\quad (g)\to\int_M R^2,$$

这里 R 表度量 g 的纯量曲率．Calabi 称该泛函的一个临界点为一个极值度量．任何 Kähler-Einstein 度量在它的 Kähler 类中极小化 $\int_M R^2$，因而是一个极值度量．这可由 Schwarz 不等式和 $\int_M R$ 等于 $C_1(M)\cup\omega^{n-1}$ 在 M 的基本类上的取值得到，这里 ω 是 g 的 Kähler 形式．

Calabi 证明了对一个极值度量 g，梯度 (gradient) 向量场 $X=\Sigma g^{ij}\dfrac{\partial R}{\partial\bar z^j}\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 是全纯的．他也证明了 M 的自同构群的一个分解定理(类似于 Matsushima 和 Lichnerowicz 于常纯量曲率的分解定理)．特别地，他证明了 X 产生出 Aut (M) 的一个紧子群．

Levine 给出了一个 Aut(M) 不具任何紧致连通子群的紧致曲面 M^2 的例子；因而 M^2 没有任何 Kähler-Einstein 度量.

对于 Aut(M) 非可约的其它例子，可参看 Sakane [Sk1], [Sk2] Ishikawa-Sakane [IS] 和 Yau [Y3]. 由 Calabi 或 Matsushima-Lichnerowicz 的定理，这些例子都不容许 Kähler-Einstein 度量. Futaki [Fu1] 构造了 Aut(M) 是可约的的例子，我们将在以后讨论它们. 然而至今所有的具正第一 Chern 类而不容许 Kähler-Einstein 度量的 Kähler 流形的例子都有非平凡的全纯向量场，很自然地要问：若M不存在任何非零的全纯向量场且M的切丛是稳定的，我们能极小化泛函 F 吗？关于稳定性假设的出发点将在以后讨论. 当然若上面问题的答案是肯定的，那么(*)也将是 Kähler-Einstein 度量存在的一个充分条件.

事实上，设 $C_1(M)=C[\omega]$ 且 g 为一极值度量. 由 $X=\Sigma g^{i\bar{j}}\frac{\partial R}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^i}$ 是全纯的，得 $X=0$, R 为常数且 g 的 Ricci 形式是代表 $C_1(M)$ 的一个调和形式. 从一个上同调类的调和形式的唯一性得 $R_{i\bar{j}}=Cg_{i\bar{j}}$; 因而 g 为 Kähler-Einstein 度量. Calabi [Ca2] 证明了每一极值度量 g 是泛函 F 的非退化局部极小点. 度量 g 又具有与M的复结构相容的最大可能的对称性. 若 C_Ω 记 H_Ω 中的极值度量的集合，它微分同胚于一个有限维欧氏空间. 并且若一个 C_Ω 中的度量具常纯量曲率，则每一个 C_Ω 中的度量皆具常纯量曲率. 人们预料 F 的临界点必是整体极小点，形成一个连通集且M上保持 Ω 的自同构在 C_Ω 上是可递的.

现在考虑 Futaki 的关于 $C_1(M)>0$ 的紧致 Kähler 流形 M 的 Kähler-Einstein 度量的存在性的障碍. 设 $\eta(M)$ 表M的全纯向量场的 Lie 代数，ω 为代表 $C_1(M)$ 的一个 Kähler 形式，γ_ω 为它的 Ricci 形式，也代表 $C_1(M)$, 则 $\gamma_\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$, 因此 $\gamma_\omega-\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}G$, G 为一光滑函数. 定义一个特征，

$f: \eta(M) \to \mathbf{C}, X \to \int_M (XG) \cdot \omega^n$. Futaki 证明了 f 不依赖于 $C_1(M)$ 的表示 ω 的选择.因而整数 $\delta_M = \dim(\eta(M)/\mathrm{Ker}(f))$ 仅依赖于 M 的复结构.

若 M 有一个 Kähler-Einstein 度量,则 $\delta_M = 0$; Futaki 猜测它的逆也是对的. 若 Calabi 泛函 F 达到极小,那么这是对的. 由 $\gamma_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G$ 得 $R = n + \Delta G$, 则 $f(X) = \int (XG)\omega^n = \int (R^a G_a)\omega^n = \int |\Delta G|^2 \omega^n$, 因而 $\delta_M = 0$ 意味着 G 为常数,即 g 是一个 Kähler-Einstein 度量.

利用阻碍 δ_M, Futaki 给出了一个 $C_1(M) > 0$, $\mathrm{Aut}(M)$ 可约, 且 $\delta_M = 1$ 的紧致 Kähler 流形的例子. 因而在这些例子上不存在 Kähler-Einstein 度量. 设 H_n 表 $\mathbf{CP}^n$ 的超平面丛, $\pi_n: H_n \to \mathbf{CP}^n$ 为投影 ($n = 1$, 2). 若设 $M^5 = \mathbf{P}(E)$, 这里 $E = \pi_1^*(H_1) + \pi_2^*(H_2)$ 看成是 $\mathbf{CP}^2$ 上的丛,那么 M 就是所需的例子.下面是最低维的例子:若 $H \subset \mathbf{CP}^3$ 为超平面且 $C \subset H$ 为一二次曲线,那么将 $\mathbf{CP}^3$ 沿 C 及 H 外的一点的吹大(blown up) 就得到这样的 M.

Futaki 的思想是构造使 Ricci 形式成为调和形式的障碍.对于代表高阶 Chern 类的曲率形式成为调和形式的障碍见 Bando [B2]. 对于与特征 f 有关的问题见 Futaki [Fu2] 和 Futaki-Morita [FM].

3. Hermite 流形和稳定向量丛.

我们将讨论紧致复流形上不一定是 Kähler 的典则度量. 对于一般的 Hermite 流形, 由于 Hermite 联络有挠, 因而是非 Riemann 的, 很难找到典则度量. 所以人们企图给 M 加上附加条件. 设 g 为 M 上的一个 Hermite 度量, ω 为它的 Kähler 形式. 一个自然的假定是:

(1) $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$.

它较 Kähler 条件弱, 人们希望给 g 加 (1) 外的其它条件使

得度量更典则.受到超对称（supersymmetry）理论的启发，Hull和 Witten [HW] 提出了ω的下列条件：局部地可将ω表为$\partial\theta+\bar{\partial}\bar{\theta}$，这里$\theta$为一(0，1)形式．若$\omega$是 Kähler 的，它总能写成 $\partial\bar{\partial}f$.

事实上,上述条件等价于 $\partial\bar{\partial}\omega=0$.显然我们只须由 $\partial\bar{\partial}\omega=0$ 导出ω有上面的表达式即可．由$\bar{\partial}\omega$是闭的，那么它是局部正合的．比较类型，可找到一个(0，2)形式Ω和一个(1，1)形式ω'使得：$\bar{\partial}\omega=\partial\Omega+\bar{\partial}\omega'$，$\bar{\partial}\Omega=0$，$\partial\omega'=0$．注意到 $\omega=\bar{\omega}$，我们可证 $\omega-\omega'-\bar{\omega}'-\Omega-\bar{\Omega}$ 为闭形式．因此，它是局部正合的，可找到一个(0，1)形式θ使得 $\omega-\omega'-\bar{\omega}'=\partial\theta+\bar{\partial}\bar{\theta}$.由 $\partial\omega'=0$，ω' 是局部∂-正合的，ω即是所需的形式.

最近,Todorov 观察到任何紧致复流形有一个满足 $\partial\bar{\partial}\omega=0$ 的 Hermite 度量，因此似乎对任何紧致复流形来说研究所有 $\partial\bar{\partial}\omega=0$ 的(1，1)形式ω关于 $\partial\theta+\bar{\partial}\bar{\theta}$，$\theta$为整体定义的(1，0)形式的子群的商将是一个有趣的问题.

现设V为具性质 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1})=0$ 的紧致复流形M上的一个全纯向量丛．我们可以定义丛V对于ω的度（degree）为

$$\deg_\omega V=\int_M \Xi_1(V)\wedge\omega^{n-1},$$

这里 $\Xi_1(V)$ 表丛V的 Ricci 形式．由 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1})=0$ 知此定义不依赖于V上的度量的选择.

在[UY]中 Uhlenbeck 和 Yau 证明了:

(2) 设V为一紧致 Kähler 流形M上的全纯向量丛．若V是稳定的,即 $\dfrac{\deg_\omega V'}{\operatorname{rank}V'}<\dfrac{\deg_\omega V}{\operatorname{rank}V}$ 对所有的满足 $0<\operatorname{rank}(V')<\operatorname{rank}(V)$，$V'\subset V$的凝聚层$V'$成立,则$V$有一个 Hermite-Einstein 度量,它在不计常数因子的意义下是唯一的.

反过来,V上的 Hermite-Einstein 度量的存在则隐含着不计M的一个有限覆盖,V是稳定丛的直接和．这是由 Kobayashi 和 Lübke [Lu] 证明的．很有可能M是 Kähler 的条件可由(1)代

替。还应提到对于代数曲面，上面的定理是由 Donaldson 证明的。

我们现在叙述 (2) 的一些推论．首先，稳定全纯向量丛的对称张量积也是稳定的．其次，若 V 是稳定的，$r = \mathrm{rank}(V)$，则

(3) $\int_M (2r, C_2(V) - (r-1)C_1^2(V)) \wedge \omega^{n-2} \geq 0$，等式成立当且仅当 V 是 M 上(或 M 的某有限覆盖)线丛的直接和（当 $n = 2$ 时，不包括等式情形的讨论，该结果是属于 Bogomolov 的）．因此，若 $C_1^2(V) = 0$，那么 $\int_M C_2(V) \wedge \omega^{n-2} \geq 0$ 且等式成立当且仅当 V 是平坦的并在模去一个常量的意义下是唯一的．这些结果事实上推广了 Riemann 曲面时的结论．特别地，设 V 为 Riemann 曲面 Σ_g 上的全纯向量丛，则 V 是稳定的且 $C_1(V) = 0$ 当且仅当 V 上存在有具零曲率的 Hermite 度量，即当且仅当有一个 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的酉表示(详见 Narashimhan 和 Seshadri [NS])。

现在来考虑稳定向量丛的模 (moduli) 空间．设 $M_g(r,d)$ 为 Riemann 曲面 Σ_g 上给定的秩 r 和度 d 的稳定向量丛的一个完备族．能够证明 $C_1(M_g) > 0$ 吗？特别地，能够构造 M_g 上具正 Ricci 曲率的一个 Kähler 度量吗？ Cho [Co] 证明了 $M_g(r,d)$ 上存在 Kähler 度量其全纯截曲率为非负．然而，既使由全纯截曲率的正性也不能推出 Ricci 曲率的正性．例如：设 H 是 $\mathbf{CP}^1$ 的超平面丛，(1) 为平凡线丛，则 Hirzebruch 曲面 $M_d = \mathbf{P}(H^d + (1))$ 有具正的全纯截曲率的 Kähler 度量．另一方面，当 $d \geq 3$ 时，M_d 不具正的第一 Chern 类。

4. Chern 数不等式．

1976 年，本文作者证明了 Calabi 猜想，并在具丰富或平凡的典则线丛的代数流形上证明下述 Chern 数不等式：

$$(-1)^n C_2 C_1^{n-2} \geq \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_1^n, \qquad (*)$$

这里等式成立当且仅当 M 以球为覆盖流形，即对某一 $\Gamma \subset SU(n,1)$，$M = B/\Gamma$。大约同一时候，Miyaoka [M3] 推广了 Bogomolov 的方法，得到在曲面的 Kodaira 维数非负的较弱的情况下证

明了 $n=2$ 时的同一不等式．然而他并没有表明等式成立时的情形．

通过研究带奇点的曲面，Cheng 和 Yan [CY2] 证明了一般型曲面的不等式（＊）（等式成立当且仅当 M^2 以球为覆盖空间）．[CY2] 中的方法也可推广到高维的情况．可以由此而刻划双全纯同胚于 B^n/Γ（$\Gamma\subset SU(2,1)$ 允许有不动点）的曲面 M．注意由于 Γ 可以有不动点，M 一般是一个簇（variety）．

研究满足某些 Chern 数不等式的流形也是有趣的．Hirzebruch, Deligne, Mostow 等曾经研究过满足不等式（＊）的曲面．[Y2] 的一个推论是 CP^n 上 Kähler 结构的下述刚性定理：CP^n 上的唯一 Kähler 结构是标准结构，且 CP^2 上的唯一复结构是标准的．当 n 是奇数时，此结果是 Hirzebruch 和 Kodaira [HK] 的．

现在我们给出当 M 的典则线丛为丰富（ample）时不等式（＊）证明的线索．此时，存在一个 K 上的 Kähler-Einstein 度量．对于 Kähler-Einstein 度量（＊）左边的 Chern 积分可以由曲率张量的平方模表出，由于 Ricci 张量是仅有的曲率部分，能够表为 Ricci 张量的行列式的右边被左边项所控制．若（＊）的等式成立，则两边的被积函数相等．后者可导出是等价于 M 具常全纯截曲率．因而（＊）中等式成立当且仅当 M 以球为覆盖流形．

当其典则线丛不是某些丰富线丛的乘积时的代数流形不存在 Kähler-Einstein 度量．然而，仍然可以研究具有几近丰富（almost ample）的典则线丛的代数流形上的不等式（＊）．[Y1] 中证明了存在一个 Kähler-Einstein 度量，它在一个除子上退化，而在该除子上其典型线丛是平凡的．类似地人们可以用某种方式将度量吹大（blow up）．这被 Cheng 和 Yan [CY2] 用于证明一般类型曲面的不等式（＊），这种曲面满足：

$$C_1(M)\leqslant 0 \text{ 且在} M \text{的一个子簇外} <0. \quad (**)$$

Kodaira 维数 $K(M)$ 定义为：

$$K(M)=\begin{cases}-\infty, & \text{若 } N(M)=0,\\ \max\dim\{\phi_{mk}\}(M), & \text{若 } N(M)\neq 0,\end{cases}$$

这里 $N(M)=\{m>0|H^0(M,K^m)=0\}$, ϕ_{mk} 为多典则(pluri-conomical) 映照. 容易看出 $K(M)\leqslant M$ 的代数维数$\leqslant n$, 若 $K(M)=n$, 则M称为一般型的流形.

在 $n=2$ 时,曲面可由它们的 Kodaira 维数双亚纯地分类. $K(M)=-\infty$, 0 或1 的情形已经熟知了. $K(M)=2$ (即M为一般类型的曲面) 当且仅当M满足(* *). 设M为一个一般类型的三维流形,且K为典则线丛除子, Kawatama 证明若 $K\cdot C\leqslant 0$ 对每一代数曲线 $C\subseteq M$ 成立,则M满足(* *).

极有可能(* *)总隐含(*): 即若 M^n 为一具几近丰富典则线丛的代数流形,则不等式(*)成立. 这在 $n\geqslant 3$ 时还不清楚. 人们也想知道在一般型的流形和不等式(* *)之间有什么关系. 在这一方面, Siu [S3] 有下面的定理 [S5]. 首先回忆 Siegel 的定理:复流形 M^n 上的亚纯函数域关于 C 的超越次数小于或等于 n. 当等式成立时M称为 Moishezon 流形.一个 Moishezon 流形总是可以由一个代数流形通过有限次吹大和缩约(blow up and down)而得到, 因而双有理于一个投射代数流形. Moishezon 流形上总存在一全纯向量从L使得 $C_1(L)\geqslant 0$ 并在一子簇外 $C_1(L)>0$. Siu [S5] 证明了在 $C_1(L)$ 非负且在某一点为正的较强的假设下其逆也是对的. 因此一个满足(* *)的流形是 Moishezon. 现在还不知道是否 CP^n, $n\geqslant 3$, 有一非标准的 Moishezon 结构.

5. 非紧致流形上的 Kähler-Einstein 度量.

现在讨论完备非紧致流形上的 Kähler-Einstein 度量. 设 g 是一个 M^n 上的完备的 Kähler-Einstein 度量, 即 $R_{i\bar{j}}=Cg_{i\bar{j}}$, C 为常数. 若 $C>0$, 则 Myer 定理指出 M 是紧致的.因此 $C\leqslant 0$ 则 $C_1(M)\leqslant 0$. 在该节我们讨论 $C_1(M)<0$ 的情形, 从而把 $C_1(M)=0$ 留到下一节.

问题是刻划带有完备 Kähler-Einstein 度量 $g_{i\bar{j}}$ 满足 $R_{i\bar{j}}=-g_{i\bar{j}}$ 的非紧致流形.特别地,希望给M加上一些条件以保证 Kähler-Einstein 度量的存在性和唯一性. 首先, 唯一性总是成立的. 也就是说若M和N为满足 $R=-1$ 的完备的 Kähler-Einstein 流

形且 $F: M \to N$ 为双全纯同胚，则 F 是等度同构. 为了证明这点设 g, dv 和 g', dv' 分别表 M 和 N 的 Kähler-Einstein 度量和体积形式. 若设 $\rho = \log(F^*dv'/dv)$, 则 $\partial\bar{\partial}\rho = -f^*\text{Ric}' + \text{Ric} = F^*g' - g$. 取迹，我们有 $\Delta\rho = -n + n \cdot e^{\rho/n}$, 因此由极大值原理得 $\rho \leqslant 0$ 和 $F^*dv' \leqslant dv$. 用 F^{-1} 代替 F，我们有 $F^*dv' \geqslant dv$, F 是等度同胚.

唯一性对纯量曲率等于 -1 的几近完备的 Kähler-Einstein 度量也成立. 这里，M 上的一个度量 ds^2 称为几近完备的如果我们能将 M 表为区域 Ω_α 的递增和且有 Ω_α 上的完备度量 ds^2_α 使得 ds^2_α 在 M 的紧子集上收敛于 ds^2. 详见 Cheng-Yau [CY1].

我们现在讨论具负纯量曲率的 Kähler-Einstein 度量的存在性. 当然，这种度量的存在将给 M 的复结构一些限制条件. 例如 Eiseman [Ei] 证明了若 M 有一纯量曲率小于负常数的 Hermite 度量，那么在 Eiseman 意义下的伪测度实际上是一个测度，也就是说 M 是测度双曲的.

在 [CY1] 中，Cheng 和 Yau 证明了一大类非紧致流形上 Kähler-Einstein 度量的存在. 确切地说，他们证明了下列定理：设 M^n 是一个 Hermite 流形，它的 Ricci 张量定义了一个曲率和协变导数有界的 Kähler 度量，则 M 有一个一致等价于上述度量的 Kähler-Einstein 度量.

若 M 有一具强负的 Ricci 曲率的 Hermite 度量且是相对紧致、光滑、拟凸的开子流形的递增和，那么在模去一个常数的意义下 M 有一个唯一的几近完备的 Kähler-Einstein 度量. 且若 M 是完备的，则这一度量也是完备的.

特别地在任何 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域上都存在完备的Kähler-Einstein 度量，只要它是具 C^2 边界的域的交. 在这一陈述中，$\mathbf{C}^n$ 可代之以 Ricci 曲率具负常数上界的 Hermite 流形.

Mok 和 Yau [MkY] 证明了 $\mathbf{C}^n$ 中的任何有界拟凸域都有一个完备的 Kähler-Einstein 度量. 这是仅知的在任一有界全纯域上的完备的"典则"度量.

现在讨论当 M 的体积有限时的情况. 这时 M 的"无穷远点集"很小(而 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域的无穷远点集相当大). 我们有下面的猜测: 若曲率为负且 M 具有限的拓扑型,则 M 可紧致化,也就是存在某一紧致 Kähler 流形 $\overline{M}$ 使得 $M=\overline{M}\backslash$(子簇). 在某些情形, $\overline{M}$ 实际上是代数的,因此 M 是拟射影的.

对一个有限体积的局部 Hermite 对称空间 M, Baily 和 Borel [BB]、Satako [St] 和 Mumford 得到了它们的一定程度具体的紧致化. 对这些流形 Kähler-Einstein 度量存在. Siu 和 Yan [SY3] 证明了一个具有限体积和曲率界于两个负常数之间的完备流形是拟射影的.

若上面的猜测是对的,那么研究有限体积(且有有界的曲率协变微分)的 Kähler 流形,人们只须考虑 $\overline{M}\backslash(D_1\cup\cdots\cup D_k)$, 这里 $\overline{M}$ 是紧致 Kähler 流形且 $D_1,\cdots,D_k$ 为连通除子. 若我们有适当的刻划 D_i 以及描述 D_i 如何与 D_j 相交的代数数据,那么可以有希望构造 M 上的 Kähler-Einstein 度量. 在 $n=2$ 的情形这是已知的. 例如, 设 $C\subset\overline{M}^2$ 为椭圆曲线且 $C\cdot C<0$. 若 S 是从 $[C]$ 的一个截面,且 $C=\{S=0\}$, 那么 $dv_{\overline{M}}/|S|^2(\log|S|^2)^3$ 就是一个以 C 为尖点 (cusps) 的 $\overline{M}/C$ 上完备的渐近 Kähler-Einstein 度量.

设 D 为一紧致 Kähler 流形上的一个除子, 在 $\overline{M}$ 上 $C_1(K+[D])\geqslant 0$, 在 $\overline{M}\backslash D$ 上 $C_1(K+[D])>0$, 且 $(K+[D])-\epsilon[D]|_D>0$, 则 $\overline{M}\backslash D$ 有一具有限体积的 Kähler-Einstein 度量. 且度量的曲率和它的协变导数有界.还不知道是否完备的 Kähler-Einstein 度量具有界的曲率.

对于拟射影流形 $M=\overline{M}\backslash D$, Kähler-Einstein 度量总是具有限体积且可定义对数 Chern 类 $\overline{C}_1(M,D)$. Kähler-Einstein 度量的存在性蕴含下列关于对数 Chern 类 $\overline{C}_1$ 和 $\overline{C}_2$ 的不等式.

$$(-1)^n\overline{C}_1^{n-2}\overline{C}_2\geqslant\frac{(-1)^n}{2(n+1)}\overline{C}_1^2. \qquad (*')$$

一个特别有意义的事实是若拟投影流形 $\overline{M}\backslash D$ 以 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球为

覆盖空间，则(*')中等式成立.

一个复流形称为测度双曲的若 Kobayashi 测度是处处正的.对于完备的 Kähler-Einstein 流形,下面的不等式成立.

$$C_1 dv_{\text{Kobayashi}} \geqslant dv_{\text{Kähler-Einstein}} \geqslant C_2 dv_{\text{Caratheodory}},$$

这里 C_1, C_2 为两个普适正常数. 我们有下列问题：若 M 的 Caratheodory 度量是完备的,那么 M 有一个完备的 Kähler-Einstein 度量吗?

6. 非紧致流形上的 Ricci 平坦度量.

现在讨论完备非紧致流形 M 上的 Ricci 平坦度量. 首先，在这种情况下,唯一性是不知道的.即使是紧致流形 Kähler-Einstein 度量也只在每一 Kähler 类中是唯一的. 设 g 和 g' 是 M 上的两个 Ricci 平坦 Kähler 度量，若它们满足 $g_{i\bar{j}} - g'_{i\bar{j}} = \partial\bar{\partial}F$, F 有界，那么 $g_{i\bar{j}} = g'_{i\bar{j}}$. 在紧致的情况,上述条件表示 g 和 g' 属于同一 Kähler 类. 由于不会存在太多的 Ricci 平坦度量,也许可以把 F 有界的条件去掉.

在任何情况下,唯一性问题远远没有解决.甚至 $M = \mathbf{C}^n$ 时，Calabi 提出下面的未解决的问题：若 $u:\mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ 为一严格的多次调和函数，$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) = 1$，那么如果 Kähler 度量 $ds_u^2 = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 是完备的，它是否有零曲率? 注意 ds_u^2 一般来说是不完备的.例如 Fatou 和 Bieberbach(参看 Bochner 和 Martin 的书 [BM], p45) 给出了一个双全纯的 $\mathbf{C}^2$ 到 Ω 的映照 (这里 $\Omega \subset \mathbf{C}^2$ 是开集,且 $\mathbf{C}^2 \backslash \Omega$ 包含一个开集)使得 F 的 Jacobi 行列式恒等于 1. 设 $u = |z_1|^2 + |z_2|^2$, 则 $ds^2_{u\cdot F} = F^* ds_u^2 = F^* ds_0^2$ 是非完备的.

有许多的双全纯的 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ 其 Jacobi 行列式等于 1，例如对任何整函数 f, 令 $F(z, w) = (z + f(w), w)$. 对于上述的 u, $u \circ F$ 仍然严格多次调和且 $ds^2_{u\cdot F}$ 是完备的且 Ricci 平坦的. 所以,直观看来 $\mathrm{Aut}(M)$ 越大,问题就越困难.

现在讨论存在性. 正象负纯量曲率的情况一样,完备的 Ricci

平坦的 Kähler 度量的存在将给 M 的复结构加上某些限制．例如：由 Schwarz 引理 [Y4]，我们知道不存在 M 到一具负常数为全纯截曲率上界的 Hermite 流形的非平凡的全纯映照． 作为一个推论，若存在 $\bar{M}$ 到一亏格大于 1 的代数曲线的非平凡的全纯映照，那么 $M \subseteq \bar{M}$ 不可能有任何具非负 Ricci 曲率的完备的 Kähler 度量．

我们猜测：若 M 有一个完备的 Ricci 平坦的 Kähler 度量，那么 $M = \bar{M}\backslash$(除子)，这里 $\bar{M}$ 为紧致 Kähler 流形．这意味着 M 的无穷远点集不能太大． 现假设 $M^2 = \bar{M}\backslash$(除子)，dv 为 M 上的一个 Ricci 平坦体积形式．想确定 M，经万有覆盖，不妨设M是单连通的．局部地，$dv = (\sqrt{-1})^2 K dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2$，$K$ 为正实值函数． 由 $\mathrm{Ric}(dv) = 0$，我们有 $\partial\bar{\partial}(\log K) = 0$ 且K可局部地写成 $|h|^2$，h 为全纯函数．由单值性方法能得到一个全纯 2-形式 $\eta = h dz^1 \wedge dz^2$，$h$ 无处为零，且 $\eta \wedge \bar{\eta} = dv$．因此 $\eta^{-1} = h^{-1} dz^1 \wedge dz^2$ 可看成是反典则丛 K^{-1} 的整体截面．

直观地说 h 可能在 M 的无穷远附近趋于∞，η^{-1} 可能延拓到 $\bar{M}$ 上，也就是说存在一个非平凡的截面 $S \in H^0(\bar{M}, K^{-1})$．这将意味着$K$是平凡的或 $H^0(\bar{M}, K^m) = 0$，$\forall m > 0$，因此 $\bar{M}^2$ 的 Kodaira 维数为$-\infty$或 0． 这是因为若 $t \in H^0(\bar{M}, K^m)$，则 $t \cdot S^m$ 为 $\bar{M}$ 上的全纯函数，因此为常数，但K非平凡时由于 S 在某点为 0，得 $t \cdot S^m = 0$，所以 $t = 0$ 除非K在 $\bar{M}$ 上是平凡的．

由 M 是 Kähler 的和单连通的，$\bar{M}$ 的极小模 (model) 是一个 Kähler 曲面且 $K = 0$ 或$-\infty$，当$K = 0$时，它是K-3 曲面或 Euriques 曲面．当 $K = -\infty$ 时，它是一个有理曲面或亏格为零的直纹曲面．$\bar{M}^2$ 为极小模在有限点上的吹大 (blow up)，且 $M = \bar{M}\backslash\{S = 0\}$，$0 \neq S \in H^0(\bar{M}, K^{-1})$．反过来，若 $M = \bar{M}\backslash\{S = 0\}$，$S \in H^0(\bar{M}, K^{-1})$，$\bar{M}$ 如上，那么 M 将有一个 Ricci 平坦的完备的 Kähler 度量．高维情形将更为复杂．

物理学曾研究了下述问题：具适当的局部渐近性质的 Ricci 平坦度量是否是唯一的？当度量渐近平坦时就是这样的情况．人

们也想知道当度量局部渐近于一个锥(cone)时的情形. 或许假定度量是 Kähler 时问题要容易一些.

Ricci 平坦的度量的存在有许多应用. 例如：利用 Ricci 平坦度量，Siu [S1] 证明了任何 $C_1(M)=0$ 且 $H^1(M,\mathbf{R})=0$ 的曲面 M^2 是 Kähler 的. 从 Todorov [To] 也可见到高维的情况. 人们也提出下面的问题：设 M^{2n} 为单连通的紧致复流形，$n\geq 2$，若有非奇异的 2 形式 $\omega\in H^{2,0}(M)$，那么 M 是 Kähler 的吗？

附录一的参考文献

[A1] F. J. Almgren, Jr., The homotopy groups of the integral cycle groups, *Topology*, 1(1962), 257—299.

[A] M. T. Anderson, The dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 701—722.

[AS] M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. of Math.*, 121(1985), 429—461.

[Au1] T. Aubin, Equations differentielles non linéaire et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures et Appl.*, 55(1976), 269—296.

[Au2] ———, *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Au3] ———, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. A. S.*, 283A(1976), 119.

[BB] W. L. Baily, Jr. and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symetric domains, *Ann. Math.*, 84(1966), 442—528.

[B1] S. Bando, On the classification of the three-dimensional compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature, *J. Diff. Geom.*, 19(1984), 283—297.

[B2] ———, An obstruction for Chern class forms to be harmonic, preprint.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, et E. Mazet, *Le Spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math No. 194, Springer-Verlag, 1972.

[BM] Bochner and Martin, Several complex variables.

[Br1] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into 4-sphere, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 455—473.

[Br2] ———, Submanifolds and special structures on the octonians, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 185—232.

[Ca1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Enclidean spheres, *J. Diff. Geom.*, 1(1967), 111—125.

[Ca2] ——————, Extremal Kähler metric, I. *Seminar in Diff. Geom.*, 1982 (edited by Yau), pp. 259—290; II. *Diff. Geo. and Complex Analysis*, 1985 (edited by I. Charel and H. M. Farkas; dedicated to H. E. Rauch).

[Ca3] ——————, Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds. *Trans. AMS*, 87(1958), 407—438.

[CV] E. Calabi and E. Vesentini, On compact local symmetric Kähler manifolds, *Ann. Math.*, 71(1960), 472—507.

[CC] H. D. Cao and B. Chow, Compact Kähler manifolds with nonnegative curvature operator, *Inv. Math.*, 83(1986), 553—556.

[Ch1] S. Y. Cheng, Eigenvalues comparison theorems and its applications, *Math Zeit.*, 143(1975), 289—293.

[Ch2] ——————, Eigenfunctions and nodal sets. *Comm. Math. Helv.*, 51(1976), 43—55.

[CY1] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of complete Kähler-Einstein metric on noncompact complex manifolds and regularity of Fefferman's equation. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 32(1980), 507—544.

[CY2] ——————, Inequality between Chern numbers of Singular Kähler surfaces and characterization of orbit space of discrete group of SU(2,1), preprint.

[Co] K. Cho. Positivity of the curvature of Weil-Petetson metric on the moduli space of stable vector bundles, preprint.

[CS] H. I. Choi and R. Schoen, The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature, *Invent. Math.*, 81(1985), 387—394.

[CW] H. I. Choi and A. N. Wang, A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 559—562.

[Cr] D. Christodoulou, A mathematical theory of gravitation collapse.

[D1] S. K. Donaldson, A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, *J. Diff. Geom.*, 18(1983).

[D2] ——————, Inequality between Chern numbers of Singular Kähler "Anti-self dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London. Math. Soc..

[D3] ——————, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 269—316.

[D4] ——————, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[ESa] J. Eells and S. Salaman, Twistor construction of harmonic maps of surfaces into four manifolds, preprint.

[ES] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, 86(1964), 1009—1060.

[EW1] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, *Topology*, **15**(1976), 263—266.

[EW2] ——————, Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, *Adv. Math.*, **49**(1983), 217—263.

[Es] H. Escobar, Spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds, *Comm. in Part. Diff. Equat.*, **11**(1) (1986), 63—85.

[Fe] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domain, *Invent. Math.*, **26**(1974), 1—65.

[Fr] T. T. Frankel, Manifolds with positive curvature, *Pacific J. Math.*, **11**(1961), 165—174.

[Fu1] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics, *Invent. Math.*, **73**(1983), 437—443.

[Fu2] ——————, On a character of the automorphism group of a compact complex manifold, preprint.

[FM] A. Futaki and S. Morita, Invariant polynomial characterization to compact complex manifold and compact group actions, preprint.

[G] D. Gieseker, Global moduli for surfaces of general type, *Invent. Math.*, **43** (1977), 233.

[GW] C. S. Gordon and E. N. Wilson, Isospectral deformations of compact solvmanifolds, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 241—256.

[GH] P. A. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, New York, 1978.

[Gr] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comm. Math. Helv.*, **56** (1981), 179—195.

[Ha] S. Hamilton, *Harmonic Maps of Manifolds with Boundary*, Lecture Notes of Math. No. 471, Springer-Verlag, 1975.

[HM] Harris and D. Mumford, On the Kodaira dimensions of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **67**(1982), 23.

[Hr] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, *Canad. J. Math.*, **19**(1967), 693—687.

[HL] Harvey and H. B. Lawson, An intrinsic characterization of Kähler manifolds, *Invent. Math.*, **74**(1983), 169—198.

[HK] F. Hirzebruch and I. Kodaira, On the complex projective spaces, *J. Math. Pures & Appl.*, **36**(1957), 201—266.

[Ho] H. Horikawa, Algebraic surfaces of general type with small C_1^2, *I. Ann. Math.*, **104**(1976), 357—387.

[Ii] S. J. Iitaka, *Math. Soc. Japan.*, **24**(1972), 384—396.

[IS] Ishikawa and Sakane, On complex projective bundles over a Kähler C-space, *Osaka J. Math.*, **16**(1979), 121—132.

[Is] Isokovskih, Fano 3-folds, I, II, *Math USSR Izv.*, **11**(1977) no. 3, 485—

527; 12(1978) no. 3, 469—506.

[Iv] V. Ya. Ivrii, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, *Funct. Analy. Appl.*, **14**(2) (1980), 98—105.

[Ja] H. Jacobwitz, Local isometric embeddings of surfaces into Euclidean four space, *Indiana University Math. J.*, **21**(1971), 249—254.

[Jo] J. Jost, Univalency of harmonic maps between surfaces, *J. Reine. Angew. Math.*, **324**(1981), 141—153.

[JS] J Jost and R. Schoen, On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces, preprint.

[JY1] J. Jost and S.-T. Yau, Harmonic mappings and Kähler manifolds, *Math. Ann.*, **262**(1983), 145—166.

[JY2] ————, A strong rigidity theorem for a certain class of compact complex surfaces, *Math. Ann.*, **271**(1985), 143—152.

[Ky] S Kobayashi, Hyperbolic Manifold and Holomorphic Mappings.

[Ko] K. Kodaira, On the structure of compact analytic surface, I, *Amer. J. Math.*, 86(1969), 751—798.

[Ku] N H. Kuiper. On conformally flat spaces in the large, *Ann. Math.*, 50(1949), 916—924.

[LM] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, Clifford bundles, immersions of manifolds and the vector field problem, *J. Diff. Geom.*, **15**(1980), 237—267.

[LS] H. B. Lawson and J. Simons, On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry, *Ann. Math.*, 98(1973), 427—450.

[Lm] L. Lemaire, Applications harmoniques de surfaces riemanniennes, *J. Diff. Geom.*, 13(1978), 51—78.

[Le1] L. Lempert, Le métrique de Kobayashi et la répresentation des domains sur la boule, *Bulletin de la Soc. Math de France*, **109**(1981), 427—472.

[Le2] ————, Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains, *Analysis Mathematics*, 8(1982), 257.

[LY1] P. Li and S. T. Yau, Eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *AMS Symposium on Geometry of the Laplace Operator*, XXXVI, Hawaii (1979), 205—240.

[LY2] ————, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent. Math.*, 69(1982), 269—291.

[Ln1] C. S. Lin, The local isometric embedding in R^3 of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegtive curvature, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 213—230.

[Ln2] ————, The local isometric embedding in R^3 of two-dimensional

Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, preprint.

[Lü] M. Lübke, Stability of Einstein-Hermitian vector bundles, *Man. Math.*, **42** (1983), 245—257.

[LuS] L. Lusternik and L. Schnerelmann, Sur le problème de trois géodesiques fermées sur les surfaces de genre 0, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **189**(1929), 269—271.

[MY] W. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, *Ann. Math.*, **112**(1980), 441—484.

[Mi] J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifolds, *Proc. Nat. Sci. USA.*, **51**(1964), 542.

[M1] Y. Miyaoka, Kähler metrics on elliptic surfaces, *Proc. Japan Acad.*, **50** (1974), 533—536.

[M2] ——————, On the Chern numbers of surfaces of general type, *Invent. Math.*, **42**(1977), 225—237.

[M3] ——————, The maximal number of quotients singularities on surfaces with given numerical invariants, *Math. Ann.*, **268**(1984), 159—171.

[Mk1] N. M. Mok, Embedding complete Kähler manifolds into affine algebraic varieties, *Bull. de Math. Soc. de France*, **112**(1984), Fasc. 2.

[MSY] N. M. Mok, Y. T. Siu, and S. T. Yau, The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds. *Compositio Math.*, 44(1981) (1—3), 183—218.

[MkY] N. M. Mok and S. T. Yau, Completeness of the Kähler-Einstein metric on bounded Riemann domains and the characterization of domains of holomorphy by curvature conditions. Sympos. on Math. Heritage of Henri Poincaré. (Indiana Univ. 1980). *Proc. Sympos. Pure Math.* **39**, Part 1, AMS (1983), 41—59.

[MZ] N. M. Mok and J. Q. Zhong, Curvature characteristics of compact Hermitian symmetric spaces, to appear in *J. Diff. Geom.*.

[MD] D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, preprint.

[Mo1] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.*, **110** (1979), 593—606.

[Mo2] ——————, Threefolds whose canonical bundles are numerically effective, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **77**(1980), 3125—3126.

[MM] S-Mukai, Mori, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geqslant 2$, *Man. Math.*, **36** (1981), 147—162.

[Mr] J. Morrow, A survey of some results on complete Kähler manifolds, *Global Analysis*, Papers in Honor of K. Kodaira.

[MK] J. Morrow and K. Kodaira, *Complex Manifolds*, Holt, Rinehart, Winston,

Inc., 1971.

[MS] G. D. Mostow and Y. T. Siu, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, *Ann. Math.*, **112**(1980), 321—360.

[NS] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, *Ann Math.*, **82**(1965), 540—567.

[PP] H. Pinkham and U. Persson, Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle. *Ann. Math.*, **113**(1981), 45—66.

[Pi] J. T. Pitts, Existence and regularity of minimal surfaces in Riemannian manifolds, Mimeograph (1979).

[Pg] A. V. Pogorelov, An example of a two-dimensional Riemannian metric not admitting a local realization in E_3, *Doklady Akad. Nauk. USSR*, **198**(1971), 42—43.

[Po] Pólya, On the eigenvalues of a vibrating membrane, *London Math. Soc. Ser.* **3** **11**(1961), 414—433.

[SaU] Sacks-Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-sphere, *Ann Math.*, **713**(1981), 1—24.

[Sk1] Sakane, On compact Einstein-Kähler manifolds with aboundant holomorphic transformations, Manifolds and Lie groups, Papers in Honor of Matsushima, progress in Math. Boston (1981), pp. 337—358.

[Sk2] ——————, On nonsingular hyperplane sections of a hermitian symmetric space, preprint.

[Sa] J. H. Sampson, Applications of harmonic maps to Kähler geometry, preprint.

[St] J. Satake, On compactifications of the quotient spaces of arithmetically defined discontinuous groups, *Ann. Math.*, **72**(1980), 555—580.

[Sc] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 479—496.

[SS] R. Schoen and L. Simon, Regularity of stable minimal hypersurfaces.

[ScU1] R. Schoen and K. Uhlenbeck, A regularity theory for harmonic maps, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982) ,307—335.

[ScU2] ——————, Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 253—268.

[ScU3] ——————, Approximation theorem for Sobolev mappings, preprint.

[ScY1] R. Schoen and S. T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, *Ann. Math.*, **110**(1979), 127—142.

[ScY2] ——————, Compact group actions and the topology of manifolds with nonpositive curvature, *Topology*, **18**(1979), 361—380.

[ScY3] ——————, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature, *Comm. Math. Helv.*, **39**(1981),

333—341.

[ScY4] ————, On the univalent harmonic maps between surfaces, *Invent. Math.*, **44**(1978), 265—278.

[SWYY] I. M. Singer, B. Wong, S. T. Yau, and Stephen S. T. Yau, An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Series IV, v. XII, n 2(1985), 319—333.

[S1] Y. T. Siu, Every K-3 surface is Kähler, *Invent. Math.*, **73**(1983), 139.

[S2] ————, The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. Math.*, **112**(1980), 73—111.

[S3] ————, Curvature characteristics of hyperquadrics, *Duke Math. J.*, 47(1980), 641—654.

[S4] ————, A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces, *Man. Math.*, 35(1981), 311—321.

[S5] ————, A vanishing theorem for semipositive line bundles over non-Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.*, 19(1984), 431—452.

[SY1] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifold of positive bisectional curvature, *Invent. Math.*, 59(1980), 189—204.

[SY2] ————, Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, *Ann. of Math.*, **105**(1977), 225—264.

[SY3] ————, Compactification of negatively curved Kähler manifolds of finite volume, *Seminar in Diff. Geom.* (edited by S. T. Yau), 1982.

[Su] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 723—732

[To] A. N. Todorov, Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces, *Invent. Math.*, **61**(1980), 251—265.

[Tr] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemann structures on compact manifolds, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa.*, **3**(1968), 265—274.

[U1] K. Uhlenbeck, Connections with L^p bounds on curvature, *Comm. Math. Phys.*, 83(1982), 31—42.

[U2] ————, Removable signularities in Yang-Mills fields, *Comm. Math. Phys.*, 83(1982), 11—29.

[U3] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups, preprint.

[UY] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections on stable vector bundles, preprint.

[UCSD] *Proceedings of the UCSD conference* at La Jolla, 1985, to appear.

[V1] Ven de Van, On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, *Nat. Acad. Proc.*, 55(1956), 1624—1627.

[V2] ————, In the Chern numbers of surface of general type, *Invent. Math.*, 36(1976), 285—293.

[We] H. Weyl, Das asymptotiesche Verteilungsgesetz der Eigenveerte linearer partieller Differential gleichungen, *Math. Ann.*, 71(1911), 441—469.

[Wh] B. White, Homotopy classes in Sobelev spaces of mappings, preprint.

[Wo1] B. Wong, On the holomorphic sectional curvature of differentiable Kobayashi metric and Caratheodory metric, *Trans. A. M. S.*.

[Wo2] ——————, Characterization of the unit ball by its automorphism group, *Invent. Math.*, 41(1977), 253—257.

[Ya] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J.*, 12(1960), 21—37.

[Yg] P. Yang, On Kähler manifolds with negative holomorphic bisectional curvature, *Duke Math. J.*, 43(1976), 871—874.

[Y1] S. T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 74(1977), No. 5, 1798—1799.

[Y2] ——————, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 31(1978), 339—411.

[Y3] ——————, On the curvature of compact Hermitian manifolds, *Invent. Math.*, 25(1974), 213—239.

[Y4] ——————, A general Schwartz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, 100(1978), 197—203.

[Y5] ——————, Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, *Indiana Math. J.*, 25(1976), 659—670.

[Y6] ——————, *Problem Section*, Seminar on Diff. Geom., edited by S. T. Yau, Princeton Univ. Press, 1982.

[Y7] ——————, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(1975), 201—228.

[ZY] J. Q. Zhong and H. C. Yang, On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, *Scientia, Sinica*, vol. XXVII, No 12(1984), 1265—1273.

附录二 问 题 集[1)]

丘 成 桐

在普林斯顿研究所的几何年的最后一段时间里，许多同行要求给出一个关于未解决的问题的综合报告，在与 Bourguignon, Calabi, Cheng, Kazdau, Li, Schoen, Simon, Treibergs 和 Uhlenbeck 讨论后，我给出了一个六十个问题的清单并作了两次报告。后来，又补充成这个问题集。

我要强调此问题集并非包括所有的问题。问题的选择在很大程度上受到作者个人兴趣的影响，除去少数例外，我并不想提出其它领域中那些与微分几何有密切的关系或者可能采用微分几何的方法来解决的问题。

问题的难度从"初等的"到"高深的"都有。然而，"高深的"问题可能由一个刚入门的学生在短短的几个月时间内给予解决，而"初等的"问题则可能在很长的一段时间内解决不了。我希望这个问题集能够给刚入门的学生一个关于这个方向的简明的概述。

如果不是全部的话，大多数问题是众所周知的。如果一个问题有确定的参考文献或明确是由某个人提出的，那么这将被提到。否则读者可认为此问题是熟知的。

最后，在此对那些看过初稿并提出补正、进一步的讨论及参考文献的数学家们表示感谢。他们是：F. J. Almgren, Jr., M. Berger, A. Borel, E. Calabi, J. Cheeger, M. Gromov 和 H. B. Lawson，在此也对 James Mechraz 在整理这些问题和参考文献

1) 本文是根据丘成桐以前的一个问题集（Yau, S. T., Problem Section, Seminar on Differential Geometry, Ann. Math. Stud. Vol. 102, Princeton, Princeton Press, 1982），并整理综合了最近几年的新结果重新编成的。

中给予我的帮助表示感谢。

I. 曲率及流形上的拓扑

A. 截面曲率

1. (Hopf 猜测) $S^2 \times S^2$ 是否容许一个具有正的截面曲率的度量?

仅有的进展是 Bourguignon 和其他人 [BDS] 关于 Berger [Br1] 的一个结果的改进，他们证明了在 $S^2 \times S^2$ 的乘积度量的一个邻域上不存在具有正截曲率的度量。

一般地，我们还没有任何紧致、具非负截曲率的单连通流形不容许一个具严格正截曲率的度量。是否一个秩大于1的紧致单连通对称空间容许一个具正曲率的度量。最终，我们将能够把具正曲率的4维流形分类(此刻，我们只有 S^4 和 CP^2 两个例子)。

2. 在怪 (exotic) 球面上是否有具正曲率的度量?

Gromoll 和 Meyer [GM1] 在一个 Milnor 7 维球上找到了一个具非负曲率的度量，它在一个具较大余维的子集外是严格正曲率。在 [H1] 中 N. Hitchin 证明了在“很怪” (very exotic) 的球面上甚至不容许一个具正的纯量曲率的度量。

3. 设 M 为一具非负截曲率的 N 维流形。是否 M 的第 i 个 Betti 数不大于 N 维环 T^N 的第 i 个 Betti 数?

最近，Gromov [Gr5] 证明了第 i 个 Betti 数具有仅依赖于 i 和 N 的上界。因此若 M 是许多 CP^2 的连接和，M 不容许一个具非负截曲率的度量。

4. 设 M 为具正曲率的紧致流形，是否 M 容许一个光滑的、有效的 S^1 作用?

这个问题产生于所有已知的具正曲率的流形的例子都具有许多对称性。

5. 是否有一具非负 Ricci 曲率的紧致单连通流形而它不容许具非负截曲率的度量?

答案似乎是“是”，且可以试试 N 个 CP^2 的连接和。

Gromoll 和 Meyer [GM2] 构造了一些具正 Ricci 曲率和负 Euler 示性数的紧流形. 因此, 或者这些流形不容许具非负截曲率的度量,或者 Hopf 猜想是不成立的(见问题 8).

6. 所有的具正曲率的流形上的向量丛容许一个具非负截曲率的完备度量吗?

这是理解 Cheeger 和 Gromoll [CG2] 的定理"每一完备的非负曲率的流形微分同胚于全测地的紧致非负曲率的子流形的向量丛"的逆的一个尝试. J. Nash [Na] 在关于 Ricci 曲率的类似情况下做了些工作. A. Rigas [Ri] 也在这方面做了些工作.

7. (Chern) 设 M 为一紧致、正曲率流形, 是否 $\pi_1(M)$ 的每一 Abel 子群是循环的?

这是由 S. S. Chern 在 Kyoto 微分几何会议上提出的. 他的猜想基于 Preissmann [P] 的定理和空间形式问题的解 (见 Wolf [W]). 猜想在曲率为负或为正常数的情况下是成立的. 也许对于一个非负曲率的紧流形, $\pi_1(M)$ 中的 Abel 子群的秩由流形的曲率张量的秩所控制,如果我们能适当地定义后者的话.最近 G. Carlsson [Car] 证明若一个 Abel 群自由地作用于 K 个球面的乘积,那么 Abel 群的秩不大于 K.

8. (Hopf) 试证一个具正截曲率的偶数维紧流形的 Euler 示性数为正.

一个值得注意的进展是由 Geroch [G] 提供的一个六维开流形的例子, 它有一具正曲率的 (非完备) 度量和一负的 Gauss-Bonnet-Chern 被积函数. 关于该猜想的详细情况可见 Chern [Ch1].

9. 刻划可作为某一具负曲率的紧致流形的基本群的群.

由 Cartan-Hadamard 定理我们知道该流形是一个 $K(\pi, 1)$, 这给出了该群的条件,例如该群必须是无挠的. Preissmann [P] 定理断定每一 Abel 群是循环的, Milnor [M1] 证明它必有指数增长.

事实上,利用 Margulis [Ma] 的一个结果, 我们可以证明一

个循环子群的共轭类的数目至少是指数增长的. Eberlein [E] 也证明了该群包含一个非平凡的自由子群. Mumford [Mu] 构造了一个具第一 Betti 数零的代数曲面,以球为覆盖空间. 显然所有该流形的有限覆盖具第一 Betti 数零. 我们能把所有的具负曲率的紧致 Kähler 代数曲面分类吗? Margulis 的方法将给出更多的结果.

若 M 是维数大于 2 的不可约局部对称空间, A. Borel [Bor] 的一个定理(也可作为 Mostow 的强刚性定理的一个结论)告诉我们基本群的外 (outer) 自同构群是有限的. 不知是否同一命题对于一般的具负曲率的流形也对. 注意 Mostow 和 Siu [MS] 的例子是一个负曲率流形,不同伦于任何局部对称空间. Millson [Mil] 和 Vinberg [Vi] 构造了具非零第一 Betti 数的双曲流形的例子.

10. 作为前面问题的继续,设 M^{2N} 为具负曲率的紧致流形, 是否 $(-1)^N\chi(M)>0$?

这是 Hopf 猜想的一部分, $N=2$ 时已经解决 (见 Chern [Ch2]). Singer 建议着眼于 M 的万有覆盖来解决这个问题. 他指出若万有覆盖的 L^2 调和形式除了中间维数的都为零,那么我们可以应用覆盖的指数定理(见 Atiyah [At1]) 来证明此命题.

Anderson [An1] 构造了截曲率介于两个负常数之间的单连通流形的例子, 它们的 L^2-调和 P-形式的维数是无限的. 然而他的例子不能等度同胚于一个紧致流形的万有覆盖.

11. Cohn-Vossen 不等式说明了一个完备曲面的全曲率被它的 Euler 数所控制. Finn [Fi] 和 Huber [Hu] 用几何量研究了它们的差.问题是如何将这不等式推广到高维情况. 若 M 为一具有限体积和有界曲率的完备流形,什么时候 Euler 数等于 Gauss-Bonnet-Chern 积分? 若 M 是局部对称的, Harder [Ha] 证明了这是对的. 当曲率介于两个负常数间, 可以证明这是对的. 在一次私人谈话中, Gromov 说只要假设曲率是非正, 度量是实解析的, 则 Gauss-Bonnet-Chern 积分就是一个整数且为它的 Euler 数.

若 M 是完备的且具非负曲率，Poor [Po]，R. Walter [Wa] 及 Greene 和 Wu (定理 9 [GWu]) 证明了 Cohn-Vossen 不等式当 $\dim M = 4$ 时是成立的。等式成立的几何条件是什么？当 $\dim M = 2n, n > 2$ 时将会是什么情况？

Cheeger 和 Gromov [CGr1, 2] 在满足 $|K| \leqslant C$，体积有界，且某一正规 (normal) 覆盖的单射半径下方有界的完备非紧流形上得到了 Gauss-Bonnet 定理。

12. 设 M_1，M_2 为具负曲率的紧致流形，若 $\pi_1(M_1)=\pi_1(M_2)$，试证 M_1 微分同胚于 M_2。

Cheeger, Gromov [Gr1], Farrell 和 Hsiang [FH] 取得了一些进展。Cheeger 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 M 的第二 Stiefel 丛。Gromov 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 M 的单位切向量丛。Farrell-Hsiang 证明了 $\pi_1(M)$ 决定了 $M \times R^3$。Farrell-Hsiang 只假设其中一个流形具负曲率。

13. 设 M_1 和 M_2 为具负曲率的紧致 Einstein 流形。设 $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ 且 $\dim M_1 \geqslant 3$。是否 M_1 等距同胚于 M_2？

若这两个流形均是局部对称的，这就是 Mostow 的刚性定理。

14. 设 M 为一 N 维紧致流形，我们能否找到一个仅依赖于 N 的正常数 δ_N 使得 M 微分同胚于一个具负的常曲率的流形只要当 M 的曲率介于 $-1-\delta_N$ 和 -1 之间？

Gromov 和 Thurston [GT] 证明了当 $N \geqslant 4$ 时这是不可能的。

设 M 为一非空间形式(即具常曲率)的具负曲率的紧致局部对称空间。设 ds^2 为一截曲率介于 -4 和 -1 之间的度量。是否 ds^2 是一个局部对称度量？

当 $\dim M = 4$ 时，这可容易地从 Euler 和 Pontrjagin 数的曲率表示的简单应用获得。

在正曲率的情况，我们也可提出类似的问题。

15. 对 $p.l.$ 流形建立合理的曲率概念，以使得可以得到适当的 pinching 型定理及用曲率表达示性类的公式。

例如，我们希望得到对于正弯曲流形(即在上述意义下有正曲率)的某种类型的 $p.l.$ 逼近。

在这一方面，Banchoff 关于 $p.l.$ 流形的 Gauss-Bonnet 公式，Regge 对于纯量曲率的建议以及 Cheeger 对于多个曲率不变量的研究（Cheeger [C3], [C4]）等项工作都是有意义的进展。

16. 关于具负曲率的紧致流形的 Poutrjagin 类和 Stiefel-Whitney 类我们能说些什么？例如，这样一个流形的有限覆盖是否是旋的（spin）？

17. 证明一个平坦流形的 Stiefel-Whitney 数为零。

这个问题已被 Hamrick 和 Royster [HR] 证实了！

18. 设 M 为一完备的、截曲率 $K \geqslant 0$ 的非紧流形，若在某点 x, $K(x) > 0$，试证 M 微分同胚于 R^N。

这个猜想提出于 [CG2]. 进一步，一个处处曲率为正但可能除去一低维点集为零的度量能否形变到具正曲率？（见 Gromoll-Mayer [GM1]）。

19. 设 Ω 为一定义在紧致流形 M 上的代表某一 Pontryagin 类的闭的 $4k$ 形式. 我们能否找一个 M 上的度量使得 Ω 可按 Chern [Ch3] 的意义用曲率形式加以表示？若有其它的拓扑障碍，它们是什么？很明显这种障碍应该存在. 问题是必须找到一个充分条件.

关于 Chern 类我们能够提出同样的问题. 对第一陈类，这是由 Calabi 提出并由 [Y] 所解决的. 这个问题的解决将给出对曲率张量的深刻理解.

本节补充

a）证明每一具负截曲率的 3 维流形容许一个具常负截曲率的度量.

这是 Thurston 猜想的一个推论，该猜想称每一 3 维流形可分解为几何片（geometric pieces）.

b）证明具正曲率算子的紧致流形容许一个具正常数截曲率的度量.

当 dim = 4 时,这已被 R Hamilton 所证明. 最近, J. D. Moore [Mr] 和 M. Micallef 证明, 一个单连通的紧致流形, 如果对应于迷向2-平面 (isotropic 2-planes) 的曲率为正, 则流形同胚于球面. 迷向2-平面的曲率为正这一条件较截曲率的逐点 $\frac{1}{4}$-pinching 条件以及正曲率算子的条件都要弱.

能否证明在上述条件下, M 实际上微分同胚于球面?

B. Ricci 曲率

20. 什么是紧致流形的对称张量 T_{ij} 所需满足的充分必要条件以使得能够找到一个度量 g_{ij} 满足: $R_{ij} - R \cdot 2g_{ij} = T_{ij}$? 这里 R_{ij} 和 R 分别为 g_{ij} 的 Ricci 张量和纯量曲率. (在这里可允许 T_{ij} 依赖于 g_{ij} 及其一阶导数.) 若 g_{ij} 是 4 维流形上的 Lorentz 度量,这刚好是 Einstein 场方程. 若 M 有边界, 则需加上什么样的边界条件?

21. 如 M 为一具正的 Ricci 曲率的完备流形, 那么 M 是否可变形为带边界的紧致流形?

22. 刻划具正 Ricci 曲率的完备流形的基本群的结构.

若流形是紧的, Cheeger-Gromoll [CGl] 的分裂 (splitting) 定理提供了一个相当满意的回答.

非紧的情况更为复杂.最近, P. Nabonnand [Nab] 在 Bérard-Bergery 的指导下提供了一个具正 Ricci 曲率的非紧致、完备 4 维流形的例子,它的基本群是无限循环群.

在 3 维情形, Schoen 和 Yau [SY1] 证明了这样的流形与 R^3 是微分同胚的. 或许能够证明这流形的基本群总是一多循环群 (polycyclic) 的有限扩张.

23. 构造一个 K-3 曲面上的显式度量, 使其 Ricci 曲率为零. 它的存在性已由 Yau [Y1] 证明. 是否存在 Ricci 曲率为零的 4 维流形不以环面及 K-3 曲面为覆盖空间? 一个简单的未决问题是,是否这样的流形微分同胚于 S^4 或 $S^2 \times S^2$.

24. 是否每一维数 $\geqslant 3$ 的流形容许一个具负 Ricci 曲率的度

量？

在 Gao [Ga] 及 Gao 和 Yau [GY] 中证明了每一紧致三维流形都容许一个具负 Ricci 曲率的度量. 或许每一维数 $\geqslant 3$ 的流形都容许具负 Ricci 曲率的度量存在.

研究具非正 Ricci 曲率的 Kähler 流形的性质仍将是有趣的. 希望能证明 $S^2 \times S^2$ 不容许这样一个度量. 这将表明 $S^2 \times S^2$ 的复结构正好是 Hirzebruch 曲面所给出的. 有许多具负 Ricci 曲率的单连通的 Kähler 流形的例子 [Y1].

25. 分类具负的 Ricci 曲率的 4 维紧致 Einstein 流形. S^4 是否容许这样一个度量?

Thorpe-Hitchin 不等式 [H2] 给出了这些流形的 Euler 数和指标的某种关系.

26. 寻找常数 $c_N < C_N$ 使得对每一 N, 若流形的 Ricci 曲率满足 $c_N\delta_{ij} \leqslant R_{ij} \leqslant C_N\delta_{ij}$, 则流形容许一个 Einstein 度量.

C. 纯量曲率

27. 分类具非负纯量曲率的完备 3 维流形.

这在广义相对论中是引人注意的问题, 因为"宇宙"倾向于具有这样一个度量. 事实上, 在合理的物理假设下 Schoen 和 Yau [SY2] 证明了宇宙中这样一个度量总是存在的.

Schoen-Yau [SY3] 也证明了这种流形的基本群不包含同构于亏格 $\geqslant 1$ 的紧致曲面的基本群的子群. 在紧流形的情况,这在 [SY4] 中得到了证明.对于维数大于 3 的情形 Schoen-Yau [SY5] 和 Gromov-Lawson [GL] 对此问题进行了讨论.

28. 分类所有具正纯量曲率的 4 维紧致 Einstein 流形.

29. 证明一个具非负纯量曲率的紧致流形是一个 $K(\pi, 1)$ 当且仅当它是平坦的.

当 $\dim M = 4$ 时, 这已由 Schoen 和 Yau [SY9] 证明了.

30. 证明一个具正纯量曲率的紧致单连通的 3 维流形拓扑同胚于球面. Meeks-Simon-Yau [MSY] 证明了两个 3 维伪球面 (fake three-spheres) 的连接和不容许具正 Ricci 曲率的度量.

后来，R. Hamilton [Hm1] 证明了一个具正 Ricci 曲率的紧致 3 维流形微分同胚于一个空间形式。

31. 分类 R^{N+1} 中具常纯量曲率的紧致超曲面。它们是否等度同胚于 S^N? 若它们是凸的，那么答案是对的，这是由 Cheng-Yau [CY1] 证明了的。

32. (Yamabe) 证明紧致流形的任一度量都能共形形变到一个具常纯量曲率的度量。 Yamabe [Yam] 发表了一个证明，但 N. Trudinger [Tr] 在 Yamabe 死后发现了一个错误。然而，正如由 Trudinger 所整理的（也可见 Eliasson [EL]）Yamabe 原来的证明可用于一大类度量。

Aubin [Au] 在 $S \geqslant 6$ 的情况下证明了更大的一类的情形。

最近，R. Schoen [Sc2] 解决了剩下的情况，因而完全解决了 Yamabe 猜想！ 他的方法是整体的并利用了推广的正质量定理 [SY8]。

现在我们想了解 Yamabe 问题在完备的非紧流形上的情况。当流形为 S^n 减去一个 Hausdorff 维数小于 $\frac{n}{2}-1$ 的闭子集时，Schoen 问是否存在一个具常正纯量曲率的完备共形平坦度量。他能够在该集为多于 1 的有限个点的情况下解决这一问题。

II. 曲率与复结构

33. 设 M 为具非负双截曲率的紧致 Kähler 流形，试证 M 双全纯同胚于局部对称的 Kähler 流形，至少当 Ricci 曲率正的情况。

若双截曲率是严格正的，M 双全纯同胚于 CP^N。 这是已被 Mori [Mo] 和 Siu-Yau [SiY1] 证明了的 Frankel 猜想。

当 $n=3$ 时，Bando [Bn] 证明了是对的。 Mok 和 Zhong [MZ] 证明了对任意的 n，若 M 是 Kähler-Einstein 的，则 M 是 Hermite 对称空间。

最近，Cao 和 Chow [CC] 在曲率算子非负的较强的假设下证明了这一猜想。刚刚前不久，Mok [Mk] 证明了整个猜想。

人们会问：此定理如果仅仅假定 M 的切丛在代数几何的意义下是半正、反典则线丛是正的假定下是否仍然成立？

34. 设 M 为一具正双截曲率的完备、非紧的 Kähler 流形，试证 M 双全纯同胚于 $\mathbf{C}^N$.

我们甚至不知道它是否是 Stein 的，当截曲率是正的，Greene 和 Wu [GWu] 证明了 M 是 Stein 的. 关于使流形为 $\mathbf{C}^N$ 的几何条件可见 Siu-Yau [SiY2].

当仅仅假设双截曲率非负时，人们猜测 M 为一以 $\mathbf{C}^n$ 为纤维的紧致 Hermite 对称空间上的全纯向量丛.

也可以给出此问题的代数几何的陈述.

人们也可回想到下面的问题：每一齐性 Kähler 流形为一以齐性有界域为底，以平坦的齐性 Kähler 流形和一个单连通紧致齐性 Kähler 流形的乘积为纤维的全纯纤维丛.

35. 设 M 为具负的双截曲率的完备、单连通的 Kähler 流形，试证 M 是 Stein 的.

甚至还不知道 M 是否非紧.具负切丛的紧致曲面是什么？它们是非单连通吗？B. Wong 指出可把高维的问题化为曲面的情况.

36. 若 M 是完备、具有限体积和有界曲率的 Kähler 流形，那么它是否是某个射影流形的 Zariski 开集？ 若 M 具负双截曲率，M 是否具有有限的自同构群？

最近，Siu 和 Yau [SiY3] 证明了当截曲率界于两个负常数时，第一个问题的回答是肯定的.

关于第二个问题见 [LY2], [Ko].

37. 设 M 为一具负截曲率的紧致 Kähler 流形，试证若 $\dim_{\mathbf{C}} M > 1$，则 M 是刚性的，即 M 只有一个复结构.

当 M 被复 2 维球所覆盖时，Yau [Y1] 利用 Kähler-Einstein 度量及 Mostow 的定理证明了这一猜想. 在 M "强负"的假设下，Siu [Si] 证明了猜想的更一般的情况.

38. 设 M 为一截曲率 $\leqslant -1$ 的单连通、完备的 Kähler 流形，

试证 M 上存在有界的全纯函数.

最好能够证明存在 M 到 $\mathbf{C}^N$ 中的有界域上的分支浸入.

在 Riemann 流形上相应的问题是寻找有界调和函数. Anderson [An] 和 Sullivan [Su3] 证明了截曲率界于两个负常数间的单连通、完备的 Riemann 流形上，调和函数在无穷远处的 Dirichlet 问题可解，且是唯一的. 而 Anderson 和 Schoen [AnS] 则进一步证明 Martin 边界和无穷远边界有一自然的等价.

39. 设 M 具正的第一 Chern 类，M 不容许任何全纯向量场，试证 M 容许一个 Kähler-Einstein 度量，这一猜想是由 Calabi 提出的 [Ca1].

一个有关的进展是 Levine [Lev] 给出了一个不容许任何 Calabi [Ca4] 意义下的极值度量的紧致 Kähler 流形.

40. 设 M 为具 Ricci 曲率 0 的完备 Kähler 流形，试证 M 为一紧致 Kähler 流形的 Zariski 开集. 如果这是对的，我们将可以用代数方法将这些流形分类.

41. 将所有的具零纯量曲率的紧致 2 维 Kähler 曲面分类 ([Y2]).

42. 设 M 为一个紧致单连通的辛流形. M 是否容许一个 Kähler 度量? M. Berger 说在 1955 年 Serre 给他举出了一个反例，其中 $\pi_1(M)\neq 0$. 见 [Bs].

对流形上的任一辛结构，可定义一个近复结构. 反过来，对任一近复结构，人们或许可以找到一个相应的辛结构. 是否近复结构在相差一个微分同胚的共轭意义下确定辛结构? 甚至对于 $\mathbf{CP}^N$，人们还不知道这后一问题的答案. 虽然 Moser [Mos] 证明了辛结构的单参数族的所有元素在微分同胚下是相互共轭的.

近来的工作可见 Gromov [Gr6] 和 Dozer 的文章.

43. 设 Ω 为 $\mathbf{C}^N$ 中的有界拟凸域，Cheng 和 Yau [CY2] 证明了 Ω 上存在典则的 Kähler-Einstein 度量. 在一般的条件，如 $\partial\Omega\in C^2$ 下，此度量是完备的. 是否此度量总是完备的?

最近 Mok-Yau [MoY] 证明了一个有界域具完备的 Kähler-

Einstein 度量当且仅当它是拟凸的。这样，就需要进一步研究此度量的边界性质。

44. 研究 Teichmüler 空间上由 Cheng-Yau [CY2] 所构造的 Kähler-Einstein 度量，它和 Bergman 度量之间有什么关系？一般地，若一个区域不全纯同胚于区域的乘积且覆盖某一紧致 Kähler 流形，那么 Kähler-Einstein 度量是否等于 Bergman 度量？

利用 [Y4] 中的 Schwarz 引理，可以证明完备的 Kähler-Einstein 度量总是强于 Caratheodory 度量。它也将强于 Teichmuler 度量(必须将 Schwarz 引理推广到 Finsler 度量)。

45. 设 M 为一复维数 N 的紧致 Kähler-Einslein 流形，且具负的纯量曲率，Yau [Y1] 证明了 $(-1)^N \frac{2(N+1)}{N} C_1^{N-2}C_2 \geqslant (-1)^N C_1^N$。$M$ 上还有其它这类 Chern 数不等式吗？当 $N=4$ 时，Bourguignon 问是否 $C_4(M)$ 是正的。

46. (Calabi) 设 u 为 $\mathbf{C}^N$ 上的实值函数使得 $\det \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 1$ 且 $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz^i d\bar{z}^j$ 定义了一个完备度量。证明这度量是平坦的(见 [CA2])。

这个问题的困难在于 $\mathbf{C}^N$ 的自同构群太大。

47. 设 M 为具正的全纯截曲率或正的 Ricci 曲率的紧致 Kähler 流形，试证 M 是有理连通的，即 M 的任两点可由一串有理曲线来连接。

48. 设 M 为一具负截曲率的紧致 Kähler 流形，试证 M 以 $\mathbf{C}^N$ 的有界域为覆盖空间。人们也许能证明一个较弱的命题：M 的万有覆盖有众多的有界全纯函数（见 Mostow-Siu [MS] 的例子)。

49. 设 M_t 为一 Kähler 流形的全纯簇，设 ds_t^2 为 M_t 的典则 Kähler-Einstein 度量，在簇 M_t 的退化点处 ds_t^2 有什么性质？

II 的补充

a) 我们能给出什么拓扑假设使我们可以断言，一个给定的 4

维可微分流形是否容许一个复结构？(特别地，我们能否拓扑地刻划那些以球为覆盖的复曲面？这样的曲面必须以欧氏空间为拓扑覆盖，且 $3C_2(M) = C_1^2(M) > 0$. 这些条件是充分的吗？)若存在两个复结构，我们是否总能够将其中一个形变为另一个？

是否每一个单连通的 4 维紧致流形都能写成代数曲面和同伦球面的连接和 (connected sum)?

b) (Kodaira) 证明每一紧致 Kähler 流形可形变为一个代数流形。特别地，是否 $H^{2,0} \neq 0$ 意味着 $H^1(M, C) \neq 0$?

c) 研究超弦 (superstrings) 的物理学家们想构造一个第一 Chern 类为 0, Euler 示性数为 ± 6, 8 的 3 维 Kähler 流形。

这种流形的某些例子可见 Yau [Y5].

III. 子流形

50. 证明 R^3 中的紧致曲面是刚性的，即我们不能找到 R^3 中曲面的连续族使得它们互相间是等距同胚的，或者是仅相差一个刚性运动。

这是一个古老的问题. 若我们考虑多面体曲面，R. Connelly [Co] 给出了一个反例. Sullivan 问是否包围在这些曲面的体积(带符号的)在等度形变下是不变的.

在光滑的情况，Cohn-Vossen 证明了凸曲面的刚性. L. Nirenberg [Nir] 作了推广 Cohn-Vossen 的结果的尝试，考虑满足 $\int K^+ = 4\pi$ 的曲面. 他在不存在多于一个闭渐近 (asymptotic) 线的假设下推广了 Cohn-Vossen 的结果. 关于实解析情况的结果首先由 A. D. Alexandrov [Al] 得到.

51. 设 M 为某一给定的紧致曲面到 R^3 中的全体浸入所构成的空间. 试证 M 中包含那些"无穷小刚性"浸入的子空间在 M 中处于一般位置 (generic). 我们能描述它的补集吗？同样，可以在旋转曲面的范畴中研究同样的问题.

52. Nash 嵌入定理保证了每一流形都能等度嵌入某一欧氏空间，但它没有给予我们这一嵌入的几何性质。例如，我们希望证明

一个具有界 Ricci 曲率和正内射半径的完备流形能够嵌入到较高维的欧氏空间中使得平均曲率是有界的.

53. 我们能够推广 Weyl 的嵌入问题到高维的情况吗?

我们需要证明一个具正截曲率的紧致 N 维流形可等度浸入到 $\frac{N(N+1)}{2}$ 维欧氏空间中.

一个困难是对于这种浸入的不唯一性缺乏了解. P. Griffiths 最近得到关于这个问题的一些新的结果 [BGY].

54. 给定一 2 维流形上的一点 p 的一个邻域的光滑度量,我们能否找到 p 的一个能够等度嵌入 R^3 的邻域?

当度量是 C^ω 或具严格正或负的曲率时, 结论是众所周知的. 而在光滑范畴的反例可见于 Pogorelov [Pg].

C. S. Lin [Ln1, 2] 证明了当 $\nabla K(p) \neq 0$ 和度量是 C^6 的,以及当 $K \geqslant 0$ 在 p 点的某一邻域成立且度量是 C^{10} 时,这是可能的.

55. 我们称一个流形到 R^N 的等度嵌入是椭圆的,如果对应于每一法线的第二基本形式至少有两个同号的非零特征值 (见 Tanaka [Ta]). 设有两个给定紧流形的椭圆等度嵌入. 它们是否是相互可迭合的 (congruent)? Cohn-Vossen 的刚性定理在高维情况下的正确推广是什么? 若 M 是具有限面积的 R^3 的完备浸入曲面且若 K 有界并非正,那 M 是否是刚性的?

56. 著名的 Efimov 定理 [Ef] 说在 R^3 中没有任何曲率 $\leqslant -1$ 的完备曲面. 我们要问是否在 R^N 中存在一个 Ricci 曲率小于-1 的完备超曲面? 见 [Y3] 和 [R].

我们也试图推广 Hilbert 定理. 是否 N 维双曲空间形式能够等度嵌入到 R^{2N-1}?

Xavier [X2] 证明了一个非初等的 (non-elementary) 的 N 维完备双曲流形不能等度浸入到 R^{2N-1} 中.

另一个问题是 R^3 中 $K=-1$ 的曲面的奇点性质 (见 Hopf [Ho]). 类似于零平均曲率方程的极小流形, 我们能否给出一个 $K=-1$ 嵌入方程的弱解的较好的定义? 或许在标架丛中考虑

是有益的.

57. 寻找一个完备的、负曲率的曲面能够等度地嵌入到 R^3 的非平凡的充分条件. 这样的条件也许是曲率下降的速度. 与此有关的是给定 Gauss 曲率的 Dirichlet 问题.

58. 回顾一个 Weingarten 曲面是一个其平均曲率 H 和高斯曲率 K 满足一定的函数关系 $\phi(K, H)=0$ 的曲面, 这里 ϕ 为定义于平面上的非奇异函数. 我们想知道是否在紧致曲面中旋转椭圆面可刻划为 $\lambda_1=C\lambda_2^3$, 这里 λ_i 是主曲率, C 是常数. 一般地, Voss 能证明一个亏格为零的实解析 Weingarten 紧曲面是一个旋转曲面(见Hopf [Ho]). 什么是高亏格的紧致、实解析 Weingarten 曲面? 它们必须具亏格 1 且为一个管状曲面或旋转曲面吗?

Wente [We] 的 Hopf 猜想的反例 (见问题 63) 是亏格为 1 的解析 Weingarten 曲面, 既不是管曲面也不是旋转曲面.

Hopf 证明了对于一个亏格为零的闭的实解析 Weingarten 曲面, $\frac{dk_2}{dk_1}$ (这里 k_1, k_2 为主曲率) 在脐点处只能取 0, -1, $(2k+1)^{\pm1}$, $k\geq 1$ 及∞. 这命题对于亏格为零的紧致光滑 Weingarten 曲面是否也对?

另一个问题是给出一个 R^3 中由代数多项式所确定的紧致曲面的内蕴刻划. 我们怎样用度量的不变量来表示多项式的次数?

59. 设 h 为 R^3 上的实值函数. 寻找合理的 h 的条件以保证我们能找到 R^3 中具指定亏格同时平均曲率(或曲率)为 h 的闭曲面.

F. Almgren 提出了下列见解:

对于"适当的" h 我们能够在 R^3 的有界开集 A 的集合中求下列泛函的极大

$$F(A)=\int_A h d\mathfrak{L}^3-(\partial A \text{ 的面积})$$

来得到具平均曲率 h 的 R^3 中的紧致光滑子流形 ∂A.

h 将是一个适当的函数, 例如, 当它是连续的、有界的, $\mathfrak{L}^3$ 是可和的且 $\sup F>0$. 然而 h 与极值曲面 ∂A 的亏格之间的关系还不清楚.

事实上，这个问题是一类极小分割问题的一个特殊情况。这类问题可见于 [Alm2] 及 Sir W. Thomson (Lord Kelvin) [Th] 的工作。在 h 的适当的限制下，Bakel'man [Ba] 和 Treibergs-Wei [TW] 对于亏格为零的闭曲面找到了这个问题的解。

60. (Willmore [Wi]) 设 M 为嵌入到 R^3 中的紧致 2 维环面。设 H 为平均曲率。是否 $\int_M H^2 \geqslant 2\pi^2$ 且等式成立意味着 M 可以从圆环面经 Mobius 变换后得到？最近，Li-Yau [LiY2] 定义了一个曲面上的共形结构的共形面积的概念。他们证明了 $\int_M H^2$ 不小于这个面积。利用这一点，他们证明了 $\int_{RP^2} H^2 \geqslant 6\pi$ 及 $\int_M H^2 \geqslant 2\pi^2$ 若 M 共形等价于方环面 (square torus)。

61. (Alexandrov [Al2]) 设 S 为 R^3 中凸体的边界曲面。若 S 的内在半径以 1 为界，那么 S 的最大可能面积是什么？

62. (Milnor [Ko]) 设 Σ 为浸入到 R^3 中的完备非紧曲面，λ_1，λ_2 为它的主曲率。试证在 Σ 上 $|\lambda_1 - \lambda_2|$ 没有大于零的下界或 K 变号或 $K = 0$。

63. (Hopf) 试证一个具常平均曲率的闭曲面 Σ 到 R^3 中的浸入等度同构于 S^2。

Hopf 证明了在这种情况下 Σ 拓扑同胚于 S^2。Alexandrov [Al] 在 Σ 是嵌入的假设下给出了证明(见 Hopf [Ho])，Reilly [R] 给出了另一证明。

最近，H. Wente 证明了 Hopf 猜想是不对的！特别地，他证明了有具常平均曲率的环面在 R^3 中的浸入。

64. 证明 Caratheodory 猜想：R^3 中的每一个闭的凸曲面都至少有两个脐点。在实解析的情况 Bol [Bl] 和 Hamburger [Ham] 给出了证明，但后来有人提出了怀疑——见 Klotz [K] 的更正。

65. 我们能定义一个具非正曲率的紧致 C^∞-流形 M 的秩使得当 M 是局部对称空间时该定义与原有的相同吗？设 M 中有一个全测地的平坦的浸入 2 维平面。我们能找到 M 中的一个浸入全测

地环面吗?(见 Gromoll 和 Wolf [GW], Lawson 和 Yau [LY2].)若 M 的"秩"大于 1，人们期望 M 有强的度量刚性. 我们该怎样描述这个刚性?

第一个问题已被 Ballman, Brin, Eberlein 和 Spatzier [BBE], [BBS] 证明是对的.

66. (Kuiper) 设 M 为由 RP^2 附上一个柄得到的曲面. M 能够浸入 R^3 后具"两片"性质,即每一与曲面相割的平面都把它正好分成两部分吗?

见 Kuiper 在 Chern 纪念论文集中的概述.

IV. 谱

67. (Kac) 设 Ω_1 和 Ω_2 是 R^2 中的两个光滑区域，它们的 Laplace 算子作用于 Ω_1 和 Ω_2 的具零边界条件的函数有相同的特征值(计算重数). 那么 Ω_1 是否与 Ω_2 等度同胚?

这是一个古老的问题. 对于闭流形,我们可提出类似问题.然而,答案是否定的. Milnor [M2] 和 Vigneras [V] 给出了反例，后者给出了具负曲率的 2 维反例.

Urakawa [Ur] 证明了存在 $R^n(n \geqslant 4)$ 的两个(非凸)区域，关于 Dirichlet 问题和 Neumann 问题都具有同样的谱，但不等度同胚.

68. 在问题 67 中,假设 Ω_1 和 Ω_2 的谱在除去有限个外都相同，那么这两个谱是否是相同的? 当这个例外集是零密度的 (density zero) 无限集时我们可问类似的问题.

69. 设 $g(t)$ 为一紧致流形上具同一 Laplace 的谱的单参数度量族. 试证 $g(t)$ 是相互等度的.

Guillemin 和 Kazhden [GK] 证明了当流形为具负曲率的曲面或当维数大于 2 的但满足适当的负 Pinching 条件时这是对的.

Gordon 和 Wilson [GWi] 找到了一紧致流形上具同一谱的非平凡的连续度量族. 另外，所有已知的具同谱的流形是局部等

度同胚的.

70. 设 Ω 是 R^2 中的有界域，λ_i 为 Laplace 作用于边值为零的函数的谱(从此以后都计算重数在内). 试证:

$$\lambda_i \geqslant \frac{4\pi i}{\text{Area}(\Omega)}.$$

这是由 Polya [Pol] 提出的，并证明了 Ω 能够铺砌 (tile) R^2 的情况. 我们也可以对 Neumann 问题提出类似的问题 (把不等号换一个方向).

Weyl 的渐近公式告诉我们 $\lambda_i \sim \frac{4\pi i}{\text{Area}(\Omega)}$. Li 和 Yau[LiY3] 证明了

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \geqslant \frac{2\pi K^2}{\text{Area}(\Omega)},$$

因此在上面渐近公式的意义下这是精确的. 这说明在平均的意义下 Polya 猜想是对的.

71. 设 M 为一 2 维紧致闭曲面. 我们能否找到一个万有常数 C 使得

$$\frac{\lambda_i}{i} \leqslant \frac{C(g+1)}{\text{Area}(M)},$$

这里 g 为 M 的亏格. 若 M 微分同胚于 S^2, 是否 $\lambda_i(M)$ 不大于 $\lambda_i(S^2)$? 这里 S^2 取使其曲率为 $\frac{4\pi}{\text{Area}(M)}$ 的度量.

当 $i=1$ 时,已经知道这是对的. Hersch [He] 证明了 M 与 S^2 微分同胚的情况. Yang 和 Yau [YY] 证明了 M 可定向, $g>0$ 的情况. 最近, P. Li 和 Yau [LiY4] 对于不可定向曲面找到了类似的界.

72. 研究曲率负且有界，体积有限的完备流形的离散谱,什么时候它是非空的? 它的渐近性质是什么?与闭测地线有什么关系?

设 $M=\{(x,y)\in R^2 | y>0\}/\Gamma$, 这里 Γ 为 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的一个 Congruent 子群,有一个老的猜想是 λ_1 至少是 $\frac{1}{4}$. Selberg

[Se] 证明了 $\lambda_1 \geqslant \frac{3}{16}$.

研究具有限体积的一般完备流形的连续谱也是很重要的. 我们希望对于这些流形能得到某种类型的对于椭圆算子的 L^2 指标定理.

73. 2 维和 3 维的具负曲率的紧致流形的谱的性质是有很大区别的. 例如, R. Schoen [Scl] 证明了对于满足 $-1 \leqslant K_M \leqslant -a^2$, $a \in (0, 1)$ 的紧致 3 维流形 M, $\lambda_1 \geqslant \frac{C}{\mathrm{Vol}(M)^2}$, 这里 C 为一个仅依赖于 λ 的常数.这对于某些曲面是不对的(见 Schoen-Wolpert-Yau [SWY]).

若 M 是 3 维双曲空间,是否 $\lambda_1 \mathrm{Vol}(M)^2$ 是上方有界的?

74. 设 M 为一个紧致曲面, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ 为 M 的谱, $\{\phi_i\}$ 为对应的特征函数.对每一个 i, $\{x \mid \phi_i(x) = 0\}$ 为一个 1 维的可求长的单纯复形.设 L_i 为它的长度,不难证明 $\liminf\limits_{i \to \infty} \sqrt{\lambda_i}^{-1}(L_i)$ 有仅依赖于 M 的面积的正下界 (这是由 Bruning [B] 独立地得到的).

要寻找 $\limsup\limits_{i \to \infty} \sqrt{\lambda_i}^{-1}(Li)$ 的上界似乎更为困难.

75. S. Y. Cheng [Cn] 证明了对于一个紧致曲面, λ_i 的重数有一个仅依赖于曲面的亏格的上界. 我们能够将这推广到高维的情况吗? 如果没有什么修改, 这看来是不对的. 正确的描述是什么呢? 对于一个给定亏格 g 的紧致曲面, 我们能给出一个显式的度量使其达到 λ_i 的最高重数吗?

76. 设 M 为一个紧致流形, f_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为 M 上的 Laplace 的特征函数. 试证 f_i 的稳定点数随 i 增加.

77. 设 Ω 为 R^2 中的有界域. 记 $\lambda_1(\Omega)$ 和 $\lambda_2(\Omega)$ 为 Laplace 算子作用于边界值为零的函数第一和第二特征值. 证明

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \leqslant \frac{\lambda_2(D)}{\lambda_1(D)},$$

这里 D 是 R^2 中的圆盘,且等式成立意味着 Ω 为一个圆盘.

这将意味着我们由知道鼓的两个音调可决定该鼓是否是圆的。详见 [PPW].

78. 设 Ω 为 R^2 中的有界凸域。设 f_2 为零边界条件的 Laplace 算子的第二特征函数。证明 f_2 的结点线 (nodal line) 不能包围一个 Ω 中的紧致子域。

最近，C. S. Lin 证明了若凸区域有一个对称 (symmetry) 这是对的。

一般地，我们想知道结点线的性质。这一猜测已提出很长一段时间了。

79. 设 M 为一无边紧致流形。那么我们可以定义作用于微分形式的 Laplace 算子的特征值。我们如何用可计算的几何量来估计第一个非零特征值呢？ 见 Li [Li], Li-Yau [LiY1] 和 Gromov [Gr3] 的工作，在那里 λ_n 的估计依赖于 M 的直径及 Ricci 曲率的一个下界。也可见于 Uhlenbrock [U] 的文章。

对于具非负 Ricci 曲率的流形，λ_1 的精确的下界见 Zhong-Yang [ZY].

80. (Schiffer 猜想或 Pompieu 问题) 设 Ω 为 R^2 中的一个光滑的有界域。设 f 为一满足 Neumann 边界条件的 Laplace 算子的特征函数。若 f 在边界上为常数，试证 Ω 为一个圆盘。

这问题与下面经典的问题有关。

给定 R^2 上的一个函数 f 及一个有界域 Ω，若我们知道所有 f 在 Ω 经欧氏运动后的象域上的积分值，我们能给出 f 吗？

最近的工作可见 Bernstein 和 Yang 的文章。

IV 的补充。

a) 估计特征值间的差是一个有意思的问题。 I. Singer, B. Wong, S. T. Yau 和 S. S.-T. Yau[SWYY] 证明对于 R^n 中凸区域 Ω 的 Dirichlet 问题有

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{4d^2},$$

这里 d 为 Ω 的直径。

我们能否将此不等式改进为

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{3\pi^2}{d^2},$$

使得等式在区间上成立?

b) 在2维球面上，$\lambda_1(S^2)$ 的重数至多是3(见 [Cn]). 在此情况下能否给出 $\lambda_4 - \lambda_1$ 的下界估计?

c) 对紧致 Riemann 流形 M (∂M 可能非空集)，Weyl 公式给出了 λ_i 的渐近展开式的第一项. 了解渐近展开的低次项是一个基本的问题.

Ivrii [Iv] 和 Melrose [Me] 在这方面独立地取得了进展. 他们表明，一般地，我们能够对具非空边界流形的第二项进行计算.

d) 设 $\{\lambda_i\}$ $i = 1, 2, \cdots$ 为一正实数的递增序列. 什么时候 $\{\lambda_i\}$ 能成为某一紧致 Riemann 流形的特征值? 一个明显的条件是 $\{\lambda_i\}$ 满足 Weyl 的渐近公式. 由维数计算(局部地，一个度量是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个变量的函数)必有无限多 λ_i 之间的关系.

e) 设 Ω 为 R^n 中的一个凸区域，φ 为第一特征函数. Brascamp 和 Lieb [BrL] 证明了 $\log\varphi$ 为一凹函数. 我们能够将此推广到 Riemann 流形的区域吗?

也可见 Korevaar [Kor] 及 Caffarelli 和 Spruck [CSp] 的工作.

f) 若 M 是一个完备的非紧致流形，那么谱一般不是离散的. 什么时候 Laplace 算子有相应的特征函数属于 $L^2(M)$ 的特征值?

我们希望下面是对的.

(i) 当 M 是完备的，$K \geqslant 0$ 时，M 没有一个纯点谱.

Escobar [Es] 证明当 M 在一个紧集之外是旋转对称时这是对的.

(ii) M 没有特征值，如果 M 是完备单连通的且 $-C \leqslant K \leqslant -1$.

(iii) M 有无限多的特征值，如果 M 是完备的，具有限体积，

$-C \leqslant K \leqslant 0$.

这些甚至在 M 是曲面时也未解决。当 M 是对称域（在算术子群下)的商空间时，(iii) 是对的.

g）证明一个完备非紧流形 M 是双曲的，如果 $\lim_{i\to\infty} \lambda_1(\Omega_i) > 0$，这里 $\{\Omega_i\}$ 为 M 的一个紧致域的穷竭（exhaustion）序列.

V. 与测地线有关的问题

81. 试证每一个紧致流形都有无穷多闭测地线.

这是一个古老的问题，Klingenberg 广泛地研究了这个问题并得到许多深刻的结果. 当 $\pi_1(M)$ 有限时见他的书 [Kl].

Ballman, Thorbergsson 和 Ziller [BTZ] 在不同的几何和拓扑条件下研究了闭测地线的存在性. Hingston [Hi] 证明了同伦秩为 1 的对称空间上的短测地线的存在性，其中度量接近于标准的度量.

82. 设 M 是没有共轭点的紧致流形，若 M 同伦等价于环面，试证 M 是平坦的.

这是由 E. Hopf 提出的猜想并且他证明了 2 维的情况. L. Green [Ge] 证明了 M 的总曲率必须非正，且只有 M 平坦时为零. 可以相信没有共轭点的紧致流形的基本群是指数增长的除非流形是平坦的.

83. 试证除 S^N 以外的秩为 1 的其他对称空间的 Blaschke 猜想. 对于球面这是通过 Green, Weinstein、Berger、Kazdan 和 Yang 的努力所得到的(确切的历史见 [Bs]).

84. 证明紧致调和流形是对称的.

一个流形称为调和的，如果小半径的测地球面具常平均曲率.

85. 设 M 为具有限基本群的紧致流形. 能否在其上找到非双曲的闭测地线 (non-hyperbolic closed geodesic)? 详见 [Kl] 和 Ballman-Thorbergsson-Ziller 的文章 [BTZ]. 在 [BTZ] 中证明了，如 M 是非单连通的，且具非负 Ricci 曲率，那么 M 上存在一个非双曲的闭测地线.

86. 若 M 微分同胚于 N 维球面，试给出嵌入的闭测地线个数的下界估计.众所周知，当 $N=2$ 时，Lusternik-Schnirelmann 证明了三个不同的嵌入闭测地线的存在性（[LS]）. 关于这一问题的情况见 [Kl].

87. 将 Loewner 和 Pu 的不等式推广到高维情况。二维环面时的 Loewner 不等式为

$$\frac{A}{l^2} \geqslant C,$$

这里 l 为最短的非同伦平凡的闭路的长度，C 是一个普适常数.这方面的发展，参看 Berger [Br2]，[Br3] 和 Gromov 的工作 [Gr4]，[Gr7].

VI. 极小子流形

88. 试证任何 3 维流形必有无限多个浸入极小曲面. Sacks 和 Uhlenbeck [SU] 证明了在任何不以可缩空间为覆盖的紧致流形上的极小球面的存在性. Sacks-Uhlenbeck 和 Schoen-Yau [SY4] 独立地证明了任何不可压缩曲面能够形变为极小曲面. 若背景 (ambient) 流形是 3 维的，Osserman 证明了它们是浸入的. 在大多数情况下，由 Meeks 和 Yau [MY] 的结果及 Freedman, Hass 和 Scott 最近的工作知它们实际上是嵌入的. Meeks-Simon-Yau 的工作也表明了，从 3 维紧致流形的任何紧致曲面出发，我们能够在它的合痕类 (isotopyclass) 中极小化它的面积.

对于一个一般的 3 维流形 Pitts [Pi] 证明了这样一个极小曲面的存在性. 但是无法从他的方法了解这个曲面的亏格.

89. 试证在任何与 S^3 微分同胚的流形中有四个不同的极小嵌入球面. 在这方面我们应该研究 Sacks 和 Uhlenbeck [SU] 的工作.

J. Li [LJ] 证明了在具接近于标准度量的度量的 S^3 中有四个不同的极小嵌入 2 维球面.

90. 是否每一紧致可微分的流形都能极小嵌入到 S^N，对某一

N?

最近 W. Y. Hsiang 和 W. T. Hsiang [HH] 研究了某些怪球 (exotic) 到 S^N 的极小嵌入问题.

91. 单位球 (unit ball) 中是否存在 $\mathbf{R}^3$ 的完备极小曲面?

这是由 Calabi [Ca3] 提出的. Jorge 和 Xavier [JX] 曾给出一个界于两个平面之间的完备极小曲面的例子. P. Jones [J] 证明了存在一个 $\mathbf{C}^3$ 的完备复子流形(因而是极小的),在单位球之中.

92. $\mathbf{R}^3$ 中完备、嵌入的极小曲面(具有限亏格)是什么?

仅知的例子是悬链面 (catenoid) 和螺旋面 (helicoid). 或许能够证明在拓扑的意义下,任何这样的曲面都是标准嵌入的.最近, Hoffman 和 Meeks [HM] 证明, $\mathbf{R}^3$ 中存在一个完备的极小嵌入曲面,它共形于一个移动三个点的方环面.

93. 证明每一 $\mathbf{R}^3$ 中正则、光滑的 Jordan 曲线只能作为有限个稳定极小曲面的边界.

如果 Jordan 曲线是实解析的, Tomi [To] 证明了它只能作为有限个局部极小圆盘的边界, Tomi 的方法是相当一般的. 把他的方法推广到边界光滑情形的基本困难在于证明当边界光滑正则时,稳定正则曲面在边界上不存在分枝点. 迄今为止,这点尚未克服.

在极小曲面有最小面积这一强的意义下, Hardt-Simon [HS] 证明了边界分枝点的不存在性, 因而也就证明了这种情况下的有限性.

在对边界作适当的扰动后有各种唯一性定理. 它们属于 Böhme, Morgan, Tomi, Tromba 及其他等人.

94. 给定一个简单,光滑、正则 Jordan 曲线, 能否找到以它为边界的非平凡的极小圆盘的连续族?

有一个经典的例子属于 P. Levy [Le] 和 Courant [Cou]: 一个可求长的、除去一点外处处光滑的 Jordan 曲线, 它是不可数个极小圆盘的边(这一例子的证明依赖于 Kruskal [Kr] 的"跻原

理". 桥原理的一个更严格的证明是分别由 Almgren-Solomon [AS] 和 Meeks-Yau [MY] 独立地给出的). Morgan [Mor] 找到了一个边界由 4 个不交的圆周组成的极小曲面连续族的例子.

95. 设 σ 为一 S^3 中光滑的 Jordan 曲线, 为 R^4 的单位球中某一嵌入圆盘的边界. 试证在 S^3 中有一个与 σ 合痕 (isotopic) 的曲线 σ' 为 R^4 的单位球的一个极小嵌入圆盘的边. 这一问题的应用将证明一个薄片结 (sliced knot) 是一个带状结 (ribbon knot).

96. S^3 中给定亏格的极小曲面组成的空间的结构是什么? Lawson [L1] 证明除 RP^2 外, 任何闭曲面都能极小嵌入到 S^3 中. 用这一方法能够实现何种共形结构? Choi 和 Schoen [CS] 证明, 曲面到具正 Ricci 曲率的紧致 3 维流形上的极小嵌入的集合是紧致的. 因此共形结构的集是紧致的. 若用 S^N 代替 S^3, $N > 3$, 会有什么变化呢? 用 Penrose 的扭 (twistor) 结构, R. Bryant 证明了每一个紧致曲面能够共形浸入到 S^4 中.

97. (Lawson) S^3 中仅有的极小嵌入环面是 Clifford 环面吗?

S^3 中有许多不是 Clifford 环面的极小环面, 但它们不是嵌入.

由 Montiel 和 Ros [MR] 的工作, 这将有赖于证明 S^3 中的嵌入极小曲面的第一特征值等于 2 (见问题 100).

98. (Lawson) 设 M 为 S^3 的极小嵌入曲面, 试证 S^3 由 M 分开的两个区域具有相同的体积.

这是 Gauss-Bounet 定理的精巧的形式. 实际上, 若 $M^{2N-1}\subseteq S^{2N}$ 为紧致连通超曲面使得第二基本形式的所有奇次初等对称函数都为零, 那么一般的 Gauss-Bounet 定理即证明 $S^{2N}-M^{2N-1}$ 的两个分支有相等的体积只要它们有相同的 Euler 示性数. 对于 S^3 中的极小曲面, 这两部分总是微分同胚的 (参见 Lawson [L3]).

在 $S^N(N>3)$ 的一般情况下, 这猜想是不对的. 例如 C. L. Terng 证明了 $S^P((P/N)^{\frac{1}{2}})XS^{N-P}(((N-P)/N)^{\frac{1}{2}})$ 不能将 S^{N+1} 分成两个体积相等的部分除非 $P=N-P$.

99. (Chern) 是否 S^{N+1} 中微分同胚于 S^N 的嵌入极小超曲面是全测地球面?

一个肯定的回答甚至在假定超曲面所张成的锥在 R^{N+2} 中是稳定的这一特殊情况下也是有意义的. 这可能意味着作为拓扑流形的面积极小的超曲面是光滑的. 在锥的稳定性的假设下，这一猜想在 $N=2, 3, 4, 5$ 时是对的，见 [Sim]. 余维大于 1 的情况这一猜想是不对的，见 [LO].

最近，W. Y. Hsiang [Hs] 证明了上面猜想是不对的!

100. 是否 S^{N+1} 的嵌入极小超曲面的 Laplace-Betrami 算子的第一特征值为 N?

即使在 $N=2$ 的情形这也是未知的，一个肯定的回答将意味着 S^3 的嵌入极小曲面的面积有一仅依赖于亏格的上界. 这是 Yang-Yau [YY] 定理的一个推论.

Choi 和 Wang [CW] 最近证明 S^{N+1} 的极小嵌入超曲面的第一特征值至少是 $\frac{N}{2}$.

101. S^N 中是否存在具负曲率的极小闭曲面?

102. 作为 Bernstein 定理的推广，Schoen 和 Fischer-Cobrie [F-CS] 及 do Carmo 和 Peng [DP] 证明 R^3 中任何完备的稳定极小曲面是线性的. 我们能够将此命题推广到 $R^N(N\leqslant 8)$ 中的完备稳定超曲面吗?

103. 若 u 为 R^N 的极小曲面方程的整体解，那么 u 是多项式增长的吗?

我们应该读一下 Bombieri 和 Giusti [BG] 的文章. Bombieri 也提出它或许与 S^N 中的极小超曲面的第一特征值有关. 也可见于 Allard 和 Almgren [AA].

L. Simon (未发表)证明了在某些技术性的假设下，一个极小图 (graph) 有多项式增长.

104. 给出 R^8 中 7 维面积极小锥的拓扑分类.

Lawson 证明了这些锥的微分同胚类的空间是有限的且明确的界应该能够得到. 例如，仅从稳定性假定出发 Simon [Sim] 推导出对应于这样的锥的极小超曲面 $M^6\subseteq S^7$ 的第二基本形式的

一个明确的 L^2 估计. 类似地 L^p 模的界 ($p=2,\cdots,n$) 将给出 Betti 数和的一个先验估计.

105. (Chern) 考虑 S^N 中的所有具常纯量曲率的紧致极小超曲面的集合. 把纯量曲率看作这一集合的函数，是否这函数的象是离散的正数集?

Simon [Sim], Chern-do Carmo-Kobayashi [CDK], Lawson [L2] 和 Yau [Y3] 都作了些工作.最近 Terng 和 Peng [TP] 在这问题上有所突破.

106. 设 M 为曲率 -1 的紧致 3 维流形,Σ 为亏格为 g 的曲面使得存在某一连续的 $f:\Sigma\to M$ 满足 $f_*:\pi_1(\Sigma)\to\pi_1(M)$ 为单射. 我们知道 ([SY4], [SU]) 这样的映照能够形变为一个极小浸入. 是否对大多数的 M，这种浸入是唯一的?

107. 设 M 为 R^3 中完备、极小曲面. Osserman [O1] 证明 M 的 Gauss 映照的象在 S^2 上的余集不含正容度的集合,并且猜想象的余集不超过 4 个点. 最近, Xavier [X1] 证明了不超过 11 个点. 基于 Xavier 的方法 Bombieri 改进到 7 个点，能否改进到 4 个点呢? 能否将此推广到 3 维极小超曲面?

对于 $\mathbf{R}^N$ 中的面积极小超曲面的情况可见 Solomon [So].

108. 设 H 为流形 M 中的面积极小超曲面. 试证经对 M 的度量作一扰动,H 的奇性可以去掉,并保持 H 所代表的 $N-1$ 维同调类. 与此相关的问题见 B. White [Wh].

是否一个余维为 1 的面积极小流的支集具有 p. 1. 结构? 对于一个高余维的极小流，其支集不一定是实解析子簇 (见 Milani [Mi]). 这个问题的目前状况见 Almgre [Alm2].

109. 设 Ω 为 R^N 的 K 维、紧致、极小子流形. 试证明等周 (isoperimetric) 不等式:

$$\mathrm{Vol}(\Omega)^{K-1}\leqslant C_K\mathrm{Vol}(\partial\Omega)^K,$$

这里

$$C_K=\frac{\mathrm{Vol}(B(1))^{K-1}}{\mathrm{Vol}(\partial B(1))^K},$$

$B(1)$ 表 R^K 中的单位球. 当 $K=N$, 即 Ω 为 R^N 中的区域时是正确的.

当 C_K 取比上面大的值时是对的(见 [FF], [Alm1], [All], [MiS] 和 [BDG]).

Almgren [Alm3] 证明当 Ω 为 R^N 的面积极小子流形时具上面常数 C_K 的不等式是成立的.

若 $K=2$, Ω 单连通,这是一个经典的结果,属于 Carleman (见 Osserman [O2]). 当 $K=2$, Ω 双连通、这也是对的, 属于 Ossevman 和 Schiffer [OS] 及 J. Feinberg [F]. Li, Schoen 和 Yau [LSY] 将此结果推广到 $\partial\Omega$ 是弱, 连通的或至多包含两个分支的情形.

一个途径是证明, 不等式的极值情况可以实现为 Stationary integral varifold, 后者或可证明是--平坦 k 圆盘. 而 B. White [Wh] 曾研究过, 平坦 k 圆盘在邻近的非参数曲面中确实是极值的.

110. 设 Σ 为一紧致曲面且 $f:\Sigma\to M$ 是到 3 维流形中的极小浸入使得 f 在所有同伦于 f 的映照中具极小面积(如 Σ 有边界,我们只考虑 $\partial\Sigma$ 为嵌入且 $f(\partial\Sigma)$ 不变). 若 Σ 是 S^2 或平面区域, Meeks-Yau [MY] 证明了 f 是一个嵌入. 当 Σ 有较高的亏格时, Freedman-Hass-Scott 证明了若 f 同伦于一个嵌入则 f 是嵌入.没有后一假设, f 不一定是嵌入.我们相信 f 倾向于使自交集的复杂性最小. 估计 f 的三重点数是拓扑学者的基本兴趣所在.

最近, Gulliver 和 Scott [GS] 证明最小面积曲面不一定有最小的三重点个数.

111. 设 $f:M_1\to M_2$ 为两个具负曲率的紧致流形间的微分同胚. 若 h 为同伦于 f 的调和映照, 是否 h 是单值的? $n=2$ 的情况已由 [SY6] 和 [Sa] 证明.

对于 $n>2$, 若不给 M_1, M_2 加条件, Calabi 已举出了反例(在 Calabi 的例子中 M_2 是一个环).

112. 证明 $\pi_i(S^N)$ 可由调和映照来表示. 若将 S^N 换成具有限

基本群的紧致流形，情况又是如何？

我们可参考 R. T. Smith [S].

113.(仿射几何)

(a) (Chern) 给出仿射几何的 Bernstein 定理：任何仿射空间上的凸图(graph)，如是一个仿射极大超曲面，则必为一个抛物面 (paraboloid).

(b) 分类3维紧致仿射平坦流形．一般地，尚不知道是否任何紧致仿射平坦流形具零 Euler 数 (见 Milnor [M3], Kostant-Sullivan [KS], Sullivan [Su1], [Su2], 及 Wood [Wo1]).

VII. 广义相对论和 Yang-Mills 方程

114. 这是一个按 Penrose 的撰词称为"宇宙审查" (cosmic censorship) 的问题.

设 M 为一具度量 g_{ij} 和对称张量 h_{ij} 的3维流形．设 M 是一满足真空 Einstein 场方程的4维渐近平坦时空的3维类空超曲面．假定 g_{ij} 和 h_{ij} 满足它们分别作为诱导度量和第二基本形所必须满足的相容条件.在研究 M 上具 Cauchy 初值 g_{ij} 和 h_{ij} 的真空场方程的整体解时，我们希望了解所得解的奇点性质．或许这是广义相对论中最重要的待解决问题.

是否一般地一个奇点将有一个"地平线"(horizon)？是否没有"赤裸"的奇点？

关于这一问题的背景，请见 Hawking 和 Ellis 的书 [HE].

还请注意 Christodoulou 的重要工作 [Cr1, 2, 3, 4]，他研究了当时空有一 SO(3) 等度同胚群，具一无质量纯量场时的 Einstein 方程的整体初值问题．他证明当终结 Bondi 质量 M_1 非零时，一个质量为 M_1 的黑洞被无穷远处的真空形式 (vacuum forms) 所包围．他还决定了度量递减的速率及纯量场在"地平线"上的状态.

Christodoulou 和 Klainerman [Cr5]最近宣布证明了 Minkowski 空间的稳定性.

115. Cheeger 和 Gromoll 的分裂定理说，若一个非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形包含一条测地直线 γ，那么 M 可以等度地分解为 $R\times N$，其中第一个因子由 γ 代表。

在时空的研究中，证明下列事实将是有意义的：一个测地完备的 4 维 Lorentz 流形，如果在类时方向上 Ricci 曲率非负，而此类时方向又包含一绝对极大类时测地线，则流形可分解为测地线和类空超曲面的乘积。

Beem, Ehrlich, Markvorson 和 Galloway [BEMG] 在较强的条件下证明了这一事实。他们假定 M 是一整体双曲的时空且在类时方向上截曲率非负。他们并未假定 M 是测地完备的。他们的证明用到了 S. Harris 的三角比较定理。

也可见 Galloway [Gal] 和 Bartnik [Barz]。那里他们假设了一个"无地平线"的条件。

116. 证明一个静态恒星模型（static stellar model）等度同胚于一个球面。关于模型具一致密度时见 Lindbloom [Lin].

S. Hawking 证明一个静态黑洞是轴对称的。但他的证明部分基于物理的考虑。

从 Israel, Hawking, Carter 和 Robinson 的工作我们知道一个稳定的、旋转的黑洞必是 Kerr 黑洞(见 [Ro])。对于负荷的(charged) 稳定黑洞，我们能给出类似的命题吗? 若度量是 Riemann 度量，那么也有类似的问题。Lapedes 指出 Robinson 的方法已无法适用，而 Israel 的方法在静态情况下仍可应用。

Masood-ul-Alam 和 Bunting [ABu] 证明，带有任意个数黑洞的真空 Einstein 方程的静态解或是 Schwarzschild 解或是 Minkowski 空间。这是 Israel 和 Robinson [Rob] 早期结果的推广。

Bunting [Bu] 和 P. Mazur [Ma] 证明，一个稳定的负荷黑洞是 Kerr-Newman 解。关于静态恒星模型的球对称性见 Masood-ul-Alam [Ala]，亦可见 Lindbloom [Lind].

117. 证明 S^4 上任何 Yang-Mills 场是自共轭或反自共轭的。见 Bourguignon 和 Lawson 的文章 [BL].

Atiyah, Drinfield, Hitchin 和 Manin [AHDM] 已将自共轭解和反自共轭解作了分类.

118. 证明具有固定的 Pontryagin 数的 S^4 上的自共轭场的模空间 (moduli space) 是连通的. 证明 $\mathbf{R}^4$ 上 L^2 可积规范场的 Pontryagin 数是整数.

问题 117 和 118 都是著名的，请参见 Atiyah 的精彩文章 [At2].

当 P 为 S^4 上以 $SU(2)$ 或 $SU(3)$ 为结构群、正阶数 (degree) 的主丛时，Taubes [T3] 证明了自共轭连络的模空间是连通的.

119. 物理学家们有一个渐近平坦流形的概念 (例如见 [SY7]). 其定义严重地依赖于坐标系的选取，而不是内蕴的. 如果我们用曲率的适当递降来代替这个定义，能得到等价的条件吗?

这已由 Bartnik [Bar1] 基本上解决了. 他将质量定义为

$$m(g)=\frac{1}{16\pi}\int_{S_\infty}(g_{ij,j}-g_{jj,i})ds^i,$$

有可能其中无穷远坐标的假设可由曲率的递降和无穷远处的连通性来代替.

120. 给定一个渐近平坦空间，能否对总角动量给出一个较好的定义? 它与总质量的关系是什么? (见 [Pe].)

类空无穷远处的角动量物理学家已有了充分的了解 (见 Ashlekhar [Ash] 和 J. York [Yo]). 然而在零位无穷远 (null infinity)，如何定义角动量却是一个问题，见 Christodulou 和 Klainerman 在这方面的工作.

关于 Yang-Mills 场的补充.

a) 设 P 为以 $SU(2)$ 为结构群的紧致 4 维流形上的主丛，何时存在一个不可约的自共轭连络?

当 M 的相交形式 (intersection form) 是正定时，Taubes [T1] 证明上述存在性的充分必要条件是 $C_2(p)<0$. 在另一篇文章中，Taubes [T2] 找到了当 M 的相交形式非定时的必要条件.

b) 设 M 为具正定相交形式的单连通紧致光滑可定向的 4 维流形，通过研究自共轭连络的模空间，Donaldson [D1] 证明相交形式(在整数环上)等价于 $(1)\oplus\cdots\oplus(1)$. 结合 Freedman 的工作，这导出了 $\mathbf{R}^4$ 上怪 (exotic) 微分结构的存在.

代替 $SU(2)$，考虑 $SU(3)$-主丛，Fintushel 和 Stern [FS] 对具正定相交形式的 4 维流形证明了某些附加的非光滑性结果.

最近，Donaldson [D4] 去掉了他的定理中 M 的单连通条件. Donaldson [D3] 也证明了当 M^4 是单连通的和旋 (spin) 的，它的相交形式有 1 或 2 个负部，那么相交形式与标准形式等价. 在 [D4] 中他将此结果推广到 $H_1(M,\mathbf{Z})$ 无 2-挠 (2-torsion) 的情况.

c) Uhlenbeck 和 Yau [UY] 证明紧致 Kähler 流形上每一个(单) 稳定全纯向量丛都容许一个唯一的 Hermite-Yang-Mills 连络.

d) (Thom 猜测)证明若 $\Sigma\subseteq\mathbf{CP}^2$ 为一同调于 n 次代数曲线的嵌入曲面，则

$$\text{亏格}\,(\Sigma)\geqslant\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

e) (11/8 猜测)设 M 是紧致光滑的 4 维旋流形，则

$$\left|\frac{b_{+}+b_{-}}{b_{+}-b_{-}}\right|=\left|\frac{\omega\text{ 的秩}}{\omega\text{ 的号差}}\right|\geqslant\frac{11}{8},$$

这里 ω 为 M 的相交形式.

当 M 是单连通的，这等价于猜想：M 同胚于 $K3$ 曲面和 $S^2\times S^2$ 的连接和 (connected sum).

附录二的参考文献

[Ala] M. Masood-ul-Alam, On spherical symmetry of static perfect fluid space-times and the positive mass theorem, CMA, The Australian National University, Research report CMA-R-86.

[ABu] M. Masood-ul-Alam and G. Bunting, Non-existence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time, *Gen. Rel. Grav.*, to

appear.
[Al] A. D. Alexandrov, On a class of closed surfaces, *Recuil Math.* (Moscou). 4 (1938), 69—77.
[Al2] ————, Die innere geometrie des convexen flachen, Akad. Verlag, Berlin, 1955.
[Al3] ————, Uniqueness theorems for surfaces in the large, Vestnik Leningrad, **11**(1956), AMS Translation, **21**(1962), 341—353.
[All] W. K. Allard, On the first variation of a varifold, *Ann. Math.*, **95**(1972), 417—491.
[AA] W. K. Allard and F. Almgren, On the radial behavior of minimal surfaces and the uniqueness of their tangent cones, *Ann. Math.*, (1981).
[Alm1] F. Almgren, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Ann. Math.*, **84**(1966), 277—292.
[Alm2] ————, Multiple valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of mass minimizing integral currents, preprint.
[Alm3] ————, Optimal isoperimetric inequalities, *Bull. of A. M. S.* 13, Number 2(1985), 123—126.
[AS] F. Almgren and B. Solomon, How to connect minimal surfaces by bridges, preprint.
[An1] M. Anderson, L^2 harmonic forms and a conjecture of Dodziuk-Singer, preprint.
[An2] ————, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 701—721.
[AnS] M. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. of Math.*, **121**(1985), 429—461.
[At1] M. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Société Mathématique de France, Asterisque*, **32**, **33**(1976), 43—72.
[At2] ————, Geometrical aspects of group theories, *Proc. International Congress Math.*, Helsinki, (1973), 881—885.
[AHDM] M. Atiyah, N. Hitchin, U. Drinfeld, and Yu. Manin, Construction of instantons, *Physics Letters*, **65A**(1978), 185—187.
[Au] T. Aubin, The scalar curvature, in *Differential Geometry and Relativity*, Holland, 1976, 5—18.
[ASz] L. Auslander and R. H. Szczarba, Characteristic classes of compact solvmanifolds, *Ann. Math.*, **76**(1962), 1—8.
[Ba] I. Ja. Bakel'man, these proceedings.
[Ba] I. Bakelman, Applications of the Monge-Ampère operators to the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations, *Ann. of Math. Studies*, **102** (S. T. Yau ed.), 239—258.
[BBE] W. Ballman, M. Brin, and P. Eberlein, Structure of manifolds of nonposi-

tive curvature, I, *Ann. of Math.*, **122**(1985), 171—203.

[BBS] W. Ballman, M. Brin, and R. Spatzier, Structure of manifolds of nonpositive curvature, II, *Ann. of Math.*, **122**(1985), 205—235.

[BTZ] W. Ballman, G. Thorbergsson, and W. Ziller, Closed geodesics on positively curved manifolds, *Ann. of Math.*, **116**(1982), 213—247.

[Bn] S. Bando, On the classification of the three dimensional compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 283—297.

[Bar1] R. Bartnik, The mass of an asymptotically flat manifold, CMA-R33-85, Australian National University, Canberra, to appear in *Comm. Pure Appl. Math.*

[Bar2] R. Bartnik, in preparation.

[BEMG] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, S. Markvorsen, and G. J. Galloway Decomposition theorems for Lorentzian manifolds with nonpositive curvature, *J. Diff. Geom.*, **22**(1985), 29—42.

[B-B] L. Bérard-Bergery, to appear.

[Br1] M. Berger, Trois remarques sur les varietés riemanniennes à courbure positive, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér A-B **263**(1966), A76—A78.

[Br2] ——————, Du Coté de chez Pu, *École Norm. Sup.*, (4) **5**(1972).

[Br3] ——————, Isosystolic and isembolic inequalities, preprint.

[Bs] A. Besse, *Manifolds All of Whose Geodesics are Closed*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[Bl] G. Bol, Über Mabelpunkte auf einer Eifläche, *Math. Zeit.*, **49**(1943/44), 389—410.

[Bo] E. Bombieri, to appear.

[BDG] E. Bombieri, E. DiGiorgi, and E. Guisti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Inv. Math.*, **7**(1969), 243—268.

[BG] E. Bombieri and E. Guisti, Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces, *Inv. Math.*, **15**(1972), 24—46.

[Bor] A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semisimple Lie groups, *Proc. Bombay Colloquium on Alg. Geometry*, 1968, 43—73.

[BDS] J. P. Bourguignon, A. Deschamps, and P. Sentenac, Conjecture de H. Hopf sur les produits de varietés, *École Norm. Sup.*, (4) **5**(1972), fasc. 2.

[BL] J. P. Bourguignon and B. Lawson, this volume.

[BrL] Brascamp and Lieb, *Journal of Functional Analysis*, **22**(1976), 366—389.

[B] J. Bruning, Über knoten von eigenfunktionen des Laplace-Beltrami operators, *Math. Z.*, **158**(1978), 15—21.

[By] R. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 455—474.

[BGY] R. Bryant, P. A. Griffiths, and D. Yang, Characteristics and existence of isometric embeddings.

[Bu] G. Bunting, Harmonic maps and uniqueness of the Kerr-Newman black hole, Centre for Mathematical Analysis, The Australian National University, Research report CMA-R34-84.

[CSp] L. A. Caffarelli and J. Spruck, Convexity properties of solutions to some classical variational problems, *Comm. Part. Diff. Eq.*, **7**(1982), 1337—137

[Ca1] E. Calabi, The space of Kähler metrics, *Proc. Internat. Congress Math.*, Amsterdam, **2**(1954), 206—207.

[Ca2] ————, Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, *Proc. AMS Symposium on Global Analysis*, XV, 223—230.

[Ca3] ————, see page 170 of *Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry*, Kyoto, 1965, Nippon Hyoronsha Co., Tokyo, 1966.

[Ca4] ————, Extremal Kähler metrics, *Sem. on Diff. Geom.* (S. T. Yau, ed), Princeton University Press Princeton, 1982, 259—290.

[CC] H. D. Cao and B. Chow, Compact Kähler manifolds with nonnegative curvature operator, *Invent. Math.*, **83**(1986), 553—556.

[Car] G. Carlsson, On the rank of Abelian groups acting freely on $(S^n)^k$, *Invent. Math.*, **69**(1982), 393—400.

[C1] J. Cheeger, Some examples of manifolds of nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.*, **8**(1972), 623—628.

[C2] ————, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Am. J. Math.*, **92**(1970), 61—74.

[C3] ————, On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **76**(1979), 2103—2106.

[C4] ————, On the Hodge theory of Riemannian pseudo-manifolds, in *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 91—146.

[CG1] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, **6**(1971), 119—128.

[CG2] ————, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. Math.*, **96**(1972), 413—443.

[CMS] J. Cheeger, W. Müller and R. Schroder, On the curvature of piecewise flat spaces, *Comm. Math. Phys.*, **92**(1984), 405—454.

[CGr1] J. Cheeger and M. Gromov, On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, Rauch Memorial Volume, I. Chavel and H. M. Farkas Eds., Springer, Berlin, 1985, 115—154.

[CGr2] ————, Bounds on the von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 1—34.

[Cn] S. Y. Cheng, Eigenfunctions and nodal sets, *Comm. Math. Helv.*, **51**(1976),

43—55.

[CY1] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.*, **225**(1977), 195—204.

[CY2] ——————, On the existence of complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, to appear.

[Ch1] S. S. Chern, On the curvature integral in a Riemannian manifold, *Ann. Math.* **46**(1945), 964—971.

[Ch2] ——————, The geometry of G-structures, *Bull. Am. Math. Soc.*, **72** (1966), 167—219.

[Ch3] ——————, On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20**(1955), 117—126.

[CDK] S. S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, Minimal submanifolds on the sphere with second fundamental form of constant length, in *Functional Analysis and Related Essays*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 59—75

[CS] H. I. Choi and R. Schoen, The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature, *Invent. Math.*, 81(1985), 387—394.

[CW] H. I. Choi and A. N. Wang, A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 559—562.

[Cr1] D. Christodoulou, The problem of a self-gravitating scalar field, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr2] ——————, Global existence of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations in the large, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr3] ——————, The structure and uniqueness of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr4] ——————, A mathematical theory of gravitational collapse, *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[Cr5] ——————, in preparation.

[Co] R. Connelly, An immersed polyhedra which flexes, *Indiana Univ. J. Math.*, 25(1976), 965—972.

[Cou] R. Courant, *Dirichlet's Principle*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950, pp. 119—122.

[DP] M. do Carmo and C. K. Peng, Stable complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ are planes, *Bull. Am. Math. Soc.*, **1**(1979), 903—905.

[D1] S K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 269—316.

[D2] ——————, Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London Math. Soc., **50**(1985),

1—26.

[D3] ——————, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[D4] ——————, The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[E] P. Eberlein, Some properties of the fundamental group of a Fuchsian manifolds, *Inv. Math.*, **19**(1973), 5—13.

[EF] M. V. Efimov, Hyperbolic problems in the theory of surfaces, *Proc. Inter. Congress of Mathematicians*, Moscow (1966), AMS Translation, **70**(1968), 26—38.

[El] H. Eliasson, On variations of metrics, *Math. Scand.*, **29**(1971), 317—327.

[ES] J. Escobar, Spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds, *Comm. Partial Diff. Equat.*, **11**(1986), 63—85.

[FH] T. Farrell and W. C. Hsiang, to appear.

[FF] H Federer and W. Fleming, Normal and integral currents. *Ann. Math.*, **72**(1960), 458—520.

[F] J. Feinberg, The isoperimetric inequality of doubly-connected minimal surfaces in R^N, *J. d'Analyse Math.*, **32**(1977), 249—278.

[Fi] R. Finn, On a class of conformal metrics, with applications to differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, **40**(1965), 1—30.

[FS] R. Fintushel and R. Stern, SO(3)-connections and the topology of 4 manifolds, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 523—539.

[F-CS] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**(1980), 199—211.

[Fr] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 357—454.

[FHS] M. Freedman, J. Hass and P. Scoff, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Invent, Math.*, **71**(1983), 609—642.

[Ga] L. Z. Gao, The construction of negatively Ricci curved manifolds, *Math. Ann.*, **271**(1985), 185—208.

[GY] L. Z. Gao and S. T. Yau, The existence of negatively Ricci curved metrics on three manifolds, *Invent. Math.*, to appear.

[G] R. Geroch, Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand, *Proc. Am. Math. Soc.*, **54**(1976), 267—270.

[GWi] C. S. Gordon and E. N. Wilson, Isospectral deformations of compact solvmanifolds, *J. Diff. Geom.*, **19**(1984), 241—256.

[Ge] L. Green, A theorem of E. Hopf, *Michigan Math. J.*, **5**(1958), 31—34.

[GWu] R. Greene and H. Wu, C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature, *Acta Math.*, **137**(1976), 209—245.

[GM1] D. Gromoll and W. Meyer, An exotic sphere with nonnegative sectional curvature, *Ann. Math.*, 100(1974), 401—406.

[GM2] ——————, Examples of complete manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, 21(1985), 195—211.

[GW] D. Gromoll and J. Wolf, Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature, *Bull. Am. Math. Soc.*, 77(1971).

[Gr1] M. Gromov, Three remarks on geodesic dynamics and the fundamental groups, unpublished.

[Gr2] ——————, Manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.*, 13(1978), 223—230.

[Gr3] ——————, Paul Levy's isoperimetric inequality, I. H. E. S. preprint, 1980.

[Gr4] ——————, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathematique 1, edited by J. Lafontaine and P. Panou, Cedic-Nathan.

[Gr5] ——————, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comment. Math. Helvetici*, 56(1981), 179—195.

[Gr6] ——————, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, 82(1985), 307—347.

[Gr7] ——————, Filling Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 1—147.

[GL] M. Gromov and B. Lawson, The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature, *Ann. Math.*, 111(1980), 423—434.

[GT] M. Gromov and W. Thurston, Pinching constants for hyperbolic manifolds, preprint.

[GK] V. Guillemin and D. Kazhdan, Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 153—180.

[GS] R. Gulliver and P. Scott, Least area surfaces can have excess triple points, MSRI preprint, August, 1985.

[Ham] H. Hamburger, Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung I, *Ann. Math.*, 41(1940), 63—68, II, III, *Acta Math.*, 73(1941), 174—332.

[Hm1] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 255—306.

[Hm2] ——————, Four-manifolds with positive curvature operator, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[HR] G. C. Hamrick and D. C. Royster, Flat Riemannian manifolds are boundaries, *Inv. Math.*, 66(1982), 405—414.

[Ha] G. Harder, A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. *École Norm. Sup.*, 9(1971), 409—455.

[HS] R. Hardt and L. Simon. Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem, *Ann. Math.*, 110(1979), 439—486.

[HL] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., A constellation of minimal varieties defined over the group G_2, to appear.

[HE] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1973.

[He] J. Hersch, Sur la fréquence fondementale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principé de maximum, *Z. Angw. Math. Phys.*, Vol. XI, Fasc., 5(1960), 387—413.

[Hi] N. Hingston, Equivariant Morse theory and closed geodesics, *J. Diff. Geom.*, 19(1984), 85—116.

[H1] N. Hitchin, Harmonic spinors, *Advances in Math.*, 14(1974), 1—55.

[H2] ————, Compact four-dimensional Einstein manifolds, *J. Diff. Geom.*, 9(1974), 435—441.

[HM] D. A. Hoffman and W. Meeks, III, A complete embedded minimal surface in $\mathbf{R}^3$ with genus one and three ends, *J. Diff. Geom.*, 21(1985), 109—127.

[Ho] H. Hopf, *Lectures on Differential Geometry in the Large,* mimeographed lecture notes, Stanford University, 1956—57.

[Hs] W. Y. Hsiang, Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces, I., *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 337—356.

[HH] W. T. Hsiang and W. Y. Hsiang, On the construction of construction of constant mean curvature imbeddings of exotic and/or knotted spheres into the unit sphere. III, *Invent. Math.*.

[Hu] A. Huber, Konforme and metricsche kreise auf vollständigen flächen, *Comment. Math. Helv.*, 47(1972), 409—420.

[Iv] V. Ya. Ivrii, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operators on manifolds with boundary, *Funct. Anal. Appl.*, 14(1980), 98—105.

[J] P. W. Jones, A complete bounded complex submanifold of $\mathbf{C}^3$, preprint.

[JX] L. P. M. Jorge and F. Xavier, A complete minimal surface in $\mathbf{R}^3$ between two parallel planes, *Ann. Math.*, 112(1980), 203—206.

[Kl] W. Klingenberg, *Lectures on Closed Geodesics,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[K] T. Klotz, On G. Bol's proof of Caratheodory's conjecture, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 12(1959), 277—311.

[KO] T. Klotz and R. Osserman, Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature, *Comm. Math Helv.*, 41(1966—67), 313—318.

[Ko] S. Kobayashi, in *Differential Geometry and Relativity,* Cahan and Flato, eds., Holland, 1976.

[Kor] N. J. Korevaar, Convexity properties of solutions to elliptic P. D. E.'s, pre-

print.

[KS] B. Kostant and D. Sullivan, The Euler characteristic of an affine space form is zero, *Bull. AMS.*, **81**(1975), 937—938.

[Kr] M. Kruskal, The bridge theorem for minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7(1954), 297—316.

[L1] H. B. Lawson, Jr., Complete minimal surfaces in S^3, *Ann. Math.*, **92**(1970), 335—374.

[L2] ————, Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. Math.*, 89(1969), 187—197.

[L3] ————, The unknottedness of minimal embeddings, *Inv. Math.*, **11** (1970), 183—187.

[LO] H. B. Lawson, Jr. and R. Osserman, Non-existence, nonuniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system, *Acta Math.*, **139**(1977), 1—17.

[LY1] H. B. Lawson, Jr. and S. T. Yau, Scalar curvature, non-abelian group actions, and the degree of symmetry of exotic spheres, *Comm. Math. Helv.*, **49** (1974), 232—244.

[LY2] ————, Compact manifolds of non-positive curvature, *J. Diff. Geom.*, 7(1972), 211—228.

[Lev] M. Levine, A remark on extremal Kähler metrics, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 73—77.

[Le] P Levy, *Lecons d'analyse fonctionelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[LJ] J. Li, On the existence of four distinct embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with a metric near the standard one, preprint at UCSD.

[Li] P Li, A lower bound for the first eigenvalue of the Laplacian on a compact manifold, *Indiana U. Math. J.*, 28(1979), 1013—1019.

[LSY] P. Li, R. Schoen, and S. T. Yau, On the isoperimetric inequality for minimal surfaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 11(1984), 237—244.

[LT] P. Li and L. F. Tam, Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set.

[LiY1] P. Li and S. T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 205—239.

[LiY2] ————, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent. Math.*, 69(1982), 269—291.

[LiY3] ————, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Comm. Math. Phys.*, 88(1983), 309—318.

[LiY4] ————, An upper estimate of the first eigenvalue of a compact nonorientable surface in terms of the area, *Invent. Math.*, to appear.

[Ln1] C. S. Lin, The local isometric embedding in R^3 of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.*, **21**(1985), 213—230.

[Ln2] ——————, The local isometric embedding in R^3 of twodimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, to appear.

[Lind] L. Lindbloom, Some properties of static general relativistic stellar models, *J. Math. Phys.*, 21(1980), 1455—1459.

[Lin] L. Lindbloom, Static, uniform density stellar models must be spherical, preprint.

[LS] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dansles Problèmes Variationnels*, Hermann and Co., Paris, 1934.

[Ma] R. A. Margulis, On connections between metric and topological properties of manifolds of non-positive curvature, *Proc. Sixth Topological Conference, Tbilsi, USSR*, 1922, p. 83(in Russian).

[Ma] P. O. Mazur, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**, 3173.

[MY] W. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, *Ann. Math.*, to appear.

[MSY] W. Meeks, III, L. Simon and S. T. Yau, to appear.

[Me] R. Melrose, Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 257—274.

[MiS] J. Michael and L. Simon, Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifolds of R^n. *Comm. Pure Appl. Math.*, XXVI(1973), 361—379.

[Mi] A. Milani, Non-analytical minimal varieties, Instituto Matematico "Leonida Tonelli," (1977), 77—13.

[Mil] J. Millson, On the first Betti number of a constant negatively curved manifold, *Ann. Math.*, **104**(1976), 235—247.

[M1] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, *J. Diff. Geom.*, **2** (1968), 1—7.

[M2] ——————, Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 51(1964), 542.

[M3] ——————, On the existence of a connection with curvature zero, *Comm. Math. Helv.*, **32**(1958), 215--223.

[Mk] N. Mok, Compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature, preprint.

[MoY] N. Mok and S. T. Yau, Completeness of the Kähler characterization of domains of holomorphy by curvature conditions.

[MZ] N. Mok and J. Q. Zhong, Curvature characterization of compact Hermitian symmetric spaces, *J. Diff. Geom.*, to appear.

[MR] S. Montiel and A. Ros, Minimal immersions of surfaces by the first eigen-

functions and conformal area, *Invent. Math.*, 83(1986), 153—166.

[Mr] J. D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, to appear.

[Mor] F. Morgan, A smooth curve in $\mathbf{R}^3$ bounding a continuum of minimal surfaces, preprint.

[Mo] S Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.*, **110** (1979), 593—606.

[Mos] J. Moser, On the volume elements of a manifold, *Trans. Am. Math. Soc.*, 120(1965), 286—294.

[MS] G. D. Mostow and Y. T. Siu, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, *Ann. Math.*, **112**(1980), 321—360.

[Mu] D. Mumford, An algebraic surface with K ample, $(K^2)=9$, $P_g=q=0$, *Amer. J. of Math.*, **101**(1979), 233—244.

[Nab] P. Nabonnand, Thesis, University of Nancy, 1980.

[Na] J. Nash, Ph. D. thesis, Stanford Univ, 1975, also *J. Diff. Geom.*, to appear.

[Ni] W. M. Ni, Conformal metrics with zero scalar curvature, and a symmetrization process via maximum principle, *Ann. of Math. Studies*, **102** (S. T. Yau, ed.), 193—202.

[Nir] L. Nirenberg, in *Nonlinear Problems*, edited by R. E. Langer, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1963, 177—193.

[O1] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces of $\mathbf{E}^3$ and $\mathbf{E}^N$, *Ann. Math.*, 80(1964), 340—364.

[O2] ———, The isoperimetric inequality, *Bull. Am. Math. Soc.*, 84(1978), 1182—1238.

[OS] R. Osserman and M. Schiffer, Doubly-connected minimal surfaces, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58(1975), 285—307.

[PPW] L. Payne, G. Polya, and H. Weinberger, On the ratio of consecutive eigenvalues, *J. Math. Phys.*, 35(1956), 289—298.

[Pe] R. Penrose, Some unsolved problems in classical general relativity, *Ann. of Math. Studies*, 102(S. T. Yau, ed.), 631—668.

[Pi] J. Pitts, Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds, *Mathematical Notes*, Princeton University Press.

[Pg] A. V. Pogorelov, An example of a two-dimensional Riemannian metric admitting no local realization in $\mathbf{E}^3$, *DAN*, 198(1971), *Soviet Math. Dok.*, 12 (1971), 729—730.

[Po] W. A. Poor, Jr., Some results on nonnegatively curved manifolds, *J. Diff. Geom.*, 9(1974), 583—600.

[P] A. Preissman, Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment. Math. Helv.*, 15(1942—43), 175—216.

[R] R. Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold,

Mich. Math. J., 26(1977), 457—472.

[Ri] A. Rigas, Geodesic spheres as generators of the homotopy groups of O, BO. *J Diff. Geom.*, 13(1978), 527—545.

[Ro] D. C. Robinson, Uniqueness of the Kerr black hole, *Phys. Rev. Lett.*, 34 (1975), 905—906.

[Rob] D. Robinson, A simple proof of the generalization of Israel's theorem, *Gen. Rel. Grav.*, 8(1977), 695—698.

[SU] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-spheres, *Ann. Math.*, 713(1981), 1—24.

[Sa] J. Sampson, Some properties and applications of harmonic mappings, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 11(1978), 211—228.

[Sc1] R. Schoen, A lower bound for the first eigenvalue of a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 233—238.

[Sc2] ————, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.*, 20(1984), 479—495.

[ScU] R. Schoen and K. Uhlenbeck, A regularity theory for harmonic maps, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 307—335.

[SS] R. Schoen and L. Simon, Regularity of stable minimal hypersurfaces, preprint.

[SWY] R. Schoen, S. Wolpert, and S. T. Yau, Geometric bounds on the low eigenvalues of a compact surface, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operator*, University of Hawaii at Manoa, 1979, 279—285.

[SY1] R. Schoen and S. T. Yau, Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature, in this volume.

[SY2] ————, Positivity of the total mass of a general space-time, *Physical Review Letters*, 43(1979), 1457—1459.

[SY3] ————, to appear.

[SY4] ————, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, *Ann. Math.*, 110(1979), 127—142.

[SY5] ————, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, *Manuscripta Math.*, 28(1979), 159—183.

[SY6] ————, On the univalent harmonic maps between surfaces, *Inv. Math.*, 44(1978), 265—278.

[SY7] ————, *Commun. Math. Phys.*, 65(1979), 45—76.

[SY8] ————, The geometry and topology of manifolds of positive scalar curvature, in preparation.

[SY9] ————, The structure of manifolds with positive scalar curvature, Interdisciplinary Symp. on Nonlinear Partial Diff. Equations, Madison, WI.

[Se] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms,

AMS Symposium on Number Theory, California Inst. of Technology, Pasadena, 1963.

[SL] L. Simon, Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems, *Ann. of Math.*, 118(1983), 525—571.

[Sim] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. Math.*, 88 (1968), 62—105.

[SWYY] I. M. Singer, B. Wong, S. T. Yau, and S. S. T. Yau, An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Series* IV, v. XII, n. 2(1985), 319—333.

[Si] Y. T. Siu, Complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. Math.*, 112(1980), 73—111.

[SiY1] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive curvature, *Inv. Math.*, to appear.

[SiY2] ———, Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, *Ann. Math.*, 105(1977), 225—264.

[SiY3] ———, Compactifications of negatively curved Kähler manifolds of finite volume, *Seminar in Diff. Geom.* (edited by S. T. Yau), 1982.

[S] R. T. Smith, Harmonic mappings of spheres, *Am. J. Math.*, 97(1975), 364—385.

[So] B. Solomon, On the Gauss map of an areaminimizing hypersurface, *J. Diff. Geom.*, 19(1984), 221—232.

[Su1] D. Sullivan, A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds, *Comm. Math. Helv.*, 51(1976), 183—189.

[Su2] ———, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Inv. Math.*, 36(1976), 225—255.

[Su3] ———, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, 18(1983), 723—732.

[Ta] N. Tanaka, Rigidity for elliptic isometric imbeddings, *Nagoya Math. J.*, 51(1973), 137—160.

[T1] C. Taubes, Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 139—170.

[T2] ———, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, *J. Diff. Geom.*, 19(1984), 517—560.

[T3] ———, Path-connected Yang-Mills moduli spaces, *J. Diff. Geom.*.

[TP] C. L. Terng and C. K. Peng, Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature, *Ann. of Math. Studies* (E. Bombieri, ed.), 177—198.

[Th] Sir W. Thomson (Lord Kelvin), On the division of space with minimal partitional area, *Phil. Mag.* (5), 24(Dec. 1887), 503—514.

[To] F. Tomi, On the local uniqueness of the problem of least area, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52(1973), 312—318.

[TW] A. Treibergs and W. Wei, Embedded hyperspheres with prescribed mean curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 513—522.

[Tr] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, **3** (1968), 265—274.

[UY] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections on stable vector bundles, *Comm. Pure Appl. Math.*, to appear.

[U] D. A. Uhlenbrock, Spectral distributions of Laplacians and Kato's inequality, *AMS Symposium on the Geometry of the Laplace Operation*, university of Hawaii at Manoa, 1979, 293—299.

[Ur] H. Urakawa, Bounded domains which are isospectral but not congruent, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, series 4, **15**(1982), 441—456.

[V] M. F. Vignéras, Variétés Riemannianes isospectrales et non isométriques, *Ann. Math.*, **112**(1980), 21—32.

[Vi] E. B. Vinberg, Some examples of crystallographic groups in Lobacevski space, *Math. Sbornik*, **78**(1969), 633—639, trans. *7(1969), 617—622.*

[Wa] R. Walter, A generalized Allendorfer-Weil formula and an inequality of the Cohn-Vossen type, *J. Diff. Geom.*, **10**(1975), 167—180.

[We] H. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. of Math.*, **121**(1986), 193—244.

[Wh] B. White, Perturbations of singularities and uniqueness of tangent cones for minimal surfaces, Thesis, Princeton University, 1981.

[Wi] T. J. Willmore, Note on embedded surfaces, *An. Sti. Univ.* "Al. I. Cuza," *Iasi Sect. Ia Mat.*, **11**(1965), 493—496.

[W] J. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[Wo] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, *Comm. Math. Helv.*, **46**(1971), 257—273.

[X1] F. Xavier, The gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 11 points of the sphere, preprint.

[X2] ————, A non-immersion theorem for hyperbolic manifolds, *Comment. Math. Helv.*, **60**(1985), 280—283.

[Yam] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J.*, **12**(1960), 21—37.

[YY] P. Yang and S. T. Yau, Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemannian surfaces and minimal submanifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **7**(1980), 55—63.

[Y] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **XXXI** (1978), 339—411.

[Y1] ————, On Calabi's conjecture and some new results in algebraic

geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74**(1977), 1798—1799.

[Y2] ————, On the curvature of compact Hermitian manifolds, *Inv. Math.*, **25**(1974), 213—239.

[Y3] ————, Submanifolds with constant mean curvature II, *Am. J. Math.*, **97**(1975), 76—100.

[Y4] ————, A general Schwarz Lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, **100**(1978), 197—203.

[Y5] ————, Compact three dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature, in *Proceedings of the Sympotium on Anomalies, Geometry and Topology*, World Scientific (to appear).

[ZY] J. Q. Zhong and H. C. Yang On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold *Scientia Sinica*, vol XXVII, No. **12**(1984), 1252—1265.